Список вопросов к экзамену

1. Метрика. Метрическое пространство. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Индуцированная метрика. Подпространство метрического пространства. Открытые множества в подпространстве метрического пространства. Метрическая топология. Эквивалентные метрики.
2. Система открытых окрестностей. Топология. Топологическое пространство. База и предбаза топологии. Локальная база топологии. Вес и характер топологического пространства. Первая и вторая аксиома счётности. Метрическая топология, её база. Метризуемое топологическое пространство. Порядковая топология, её база. Подпространство топологического пространства, его база. Сравнение топологий.
3. Типы точек в топологическом пространстве по отношению к множеству. Замыкание, внутренность и граница множества. Оператор замыкания, оператор топологического замыкания. Оператор внутренности. Двойственность между операторами внутренности и замыкания. Замыкание и внутренность в подпространствах.
4. Плотные множества в топологических пространствах и их подпространствах. Нигде не плотные множества. Замыкание пересечения открытого множества и плотного множества. Плотность топологического пространства. Сепарабельные топологические пространства. Сепарабельные метризуемые пространства. Сепарабельность пространств со второй аксиомой счётности.
5. Число Суслина, свойство Суслина. Число Суслина сепарабельного пространства. Метризуемое пространство со свойством Суслина.
6. Последовательность, подпоследовательность. Сходимость последовательности. Пределы и предельные точки последовательности. Пространства Фреше–Урысона. Связь свойства Фреше–Урысона с первой аксиомой счётности. Веер Фреше–Урысона. Пример недискретного пространства без нетривиальных сходящихся последовательностей. Характеризация точки прикосновения в пространстве с первой аксиомой счётности в терминах сходимости последовательностей.
7. Направленность, поднаправленность. Сходимость направленности. Пределы и предельные точки направленности. Характеризация точки прикосновения в произвольном пространстве в терминах сходимости направленностей.
8. Фильтры и ультрафильтры. Доказательство того, что всякое центрированного семейство содержится в ультрафильтре. Основное свойство ультрафильтров.
9. Сходимость фильтров и ультрафильтров. Характеризация точки прикосновения в произвольном пространстве в терминах сходимости фильтров и ультрафильтров. Отображения фильтров и ультрафильтров.
10. Непрерывность отображения метрических пространств в точке и на всём пространстве. Непрерывность расстояния до фиксированного непустого множества. Характеризация непрерывности отображения метрических пространств в терминах открытых множеств. Характеризация непрерывности отображения метрических пространств в терминах сходимости последовательностей.
11. Непрерывность отображения топологических пространств в точке и на всём пространстве. Доказательство равносильности непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ открытости прообразов элементов предбазы топологии Y. Свойства отображений, равносильные непрерывности. Характеризация непрерывности отображения топологических пространств в терминах сходимости ультрафильтров.
12. Непрерывность композиций, подотображений (и сужений) и надотображений непрерывных отображений. Непрерывность диагонального произведения двух непрерывных отображений. Непрерывность функций, полученных применением простейших операций (сложение, вычитание, умножение, деление, взятие минимума, максимума и модуля) к непрерывным функциям.
13. Гомеоморфизмы. Топологические свойства. Вложения. График отображения. Топология произведения двух пространств. Гомеоморфность графика непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ пространству X.
14. Ретракции. Характеризация ретрактов в терминах продолжения отображений. Формулировка теоремы о неретрагируемости и теоремы Брауэра о неподвижной точке. Вывод этих теорем друг из друга.
15. —
16. —
17. —
18. Аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3 и T_4. Равносильные формулировки. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Примеры, различающие аксиомы T_0–T_3. Сохранение (или несохранение) аксиом отделимости при переходе к подпространствам и при непрерывных отображениях.
19. Замкнутость графика отображения в хаусдорфово пространство. Равносильность хаусдорфовости замкнутости диагонали. Равенство непрерывных отображений, совпадающих на плотном множестве. Нормальность метризуемых пространств.
20. Лемма Урысона.
21. Теорема Титце–Урысона о продолжении. Её вывод из леммы Урысона.
22. Аксиома $T_{3\frac{1}{2}}$. Тихоновские (вполне регулярные) пространства. Пример вполне регулярного ненормального пространства.
23. Сумма топологических пространств. Аксиомы отделимости, вес, характер, плотность и число Суслина суммы топологических пространств. Непрерывные отображения суммы. Примеры.
24. Факторпространство. Факторное отображение. Условия, равносильные факторности отображения. Утверждения о факторности композиции отображений и сужения отображения. Факторность открытых и замкнутых сюръекций. Примеры.
25. Декартово произведение семейства множеств. Каноническая проекция. Тихоновское (топологическое) произведение топологических пространств. Каноническая база произведения топологических пространств. Открытость канонических проекций. Доказательство того, что произведение замыканий подмножеств сомножителей равно замыканию произведения этих подмножеств. Плотность произведения плотных множеств.
26. Аксиомы отделимости в топологических произведениях.

27. Критерий непрерывности отображения в топологическое произведение (в терминах канонических проекций). Непрерывность декартова и диагонального произведений непрерывных отображений. Доказательство того, что для хаусдорфова пространства X диагональ в X^A замкнута для произвольного множества A.
28. Семейство отображений, разделяющее точки. Семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества. Теорема о диагональном произведении.
29. Теорема Тихонова о вложении. Метризационная теорема Урысона.
30. Покрытия, подпокрытия, вписанные покрытия. Семейства множеств, двойственные покрытиям. Равносильные определения компактности. Характеризация компактности в терминах сходимости ультрафильтров.
31. Теоремы: всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто; любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно; любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления; компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств; всякий непрерывный образ компактного пространства компактен; всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто и, следовательно, факторно; любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом; любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.
32. Теоремы: во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности; во всяком T_3-пространстве любые два непересекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непересекающиеся окрестности; всякий компакт нормален; во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$-пространстве X для любых непересекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F. Теорема Тихонова о компактности произведений. Продолжение непрерывных функций с компактных подмножеств топологического пространства.
33. Множества первой и второй категории. Пространства со свойством Бэра. Теорема Бэра о категории.
34. Множества непрерывных и непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве как кольца и векторные пространства. Топология равномерной сходимости на множестве ограниченных непрерывных функций. Лемма об аппроксимации $\sqrt{x}$. Лемма об операциях min и max в замкнутом кольце ограниченных непрерывных функций, содержащем все постоянные функции.
35. Формулировка теоремы Вейерштрасса–Стоуна и её вывод из лемм.
36. Примеры компактов: суперпоследовательность Александрова, пространство W_1 всех не более чем счётных ординалов. Их свойства.
37. Компактность в классе метризуемых пространств: существование счётной базы во всяком метризуемом компакте, свойства метризуемого пространства, равносильные компактности.
38. Компактификации топологических пространств. Эквивалентность компактификаций. Порядок на классах эквивалентных компактификаций (определение). Доказательство того, что непрерывное отображение компактификаций $f\colon c_1X \to c_2X$ со свойством $f \circ c_1 = c_2$ переводит нарост в нарост.
39. Доказательство того, что отношение $\preccurlyeq$ на классах эквивалентных компактификаций является порядком.
40. Александровская компактификация. Теорема о равносильности её существования локальной компактности. Доказательство того, что александровская компактификация является наименьшей компактификацией локально компактного пространства.
41. Определение стоун-чеховской компактификации и доказательство её существования. Теорема о продолжении отображений на стоун-чеховскую компактификацию.
42. Локально компактные пространства. Характеризация хаусдорфовых локально компактных пространств как открытых подпространств компактов. Локальная компактность подпространств хаусдорфовых пространств. Локальная компактность сумм и произведений.
43. Паракомпактные пространства. Консервативные семейства множеств. Консервативность локально конечных семейств. Теорема: всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально. Замкнутые подпространства паракомпактных пространств.
44. Разбиение единицы. Локально конечное разбиение единицы. Существование локально конечных разбиений единицы, подчинённых открытым покрытиям паракомпактов.
45. Число Линделёфа топологического пространства. Финально компактные и линделёовы пространства. Простейшие свойства финально компактных пространств (равносильное определение, сохранение замкнутыми подпространствами, отсутствие несчётных замкнутых дискретных подпространств, сохранение финальной компактности непрерывными отображениями). Паракомпактность и нормальность линделёфовых пространств. Линделёфовость в классе метризуемых пространств.
46. Псевдокомпактные пространства. Свойства, равносильные псевдокомпактности.
47. Счётно компактные пространства. Свойства, равносильные счётной компактности. Доказательство псевдокомпактности вполне регулярных счётно компактных пространств. Доказательство счётной компактности нормальных псевдокомпактных пространств. Пример счётно компактного некомпактного пространства.
48. Секвенциально компактные пространства. Мультипликативность секвенциальной компактности. Равносильность секвенциальной компактности, счётной компактности и псевдокомпактности в классе метризуемых пространств.
49. Связность топологических пространств. Теорема об условиях, равносильных связности, и её следствия. Связность прямой. Сохранение связности непрерывными отображениями и произведениями.
50. Компоненты и квазикомпоненты. Совпадение компонент с квазикомпонентами в компакте.
51. Вполне несвязные, вполне разрывные и нульмерные пространства. Существование взаимно однозначного непрерывного отображения вполне разрывного пространства на нульмерное. Сохранение нульмерности подпространствами и произведениями. Сильно нульмерные пространства. Критерии сильной нульмерности (без доказательства). Равносильность вполне несвязности, вполне разрывности, нульмерности и сильной нульмерности для компактов.