

Список вопросов к экзамену

1. Метрика. Метрическое пространство. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Индуцированная метрика. Подпространство метрического пространства. Открытые множества в подпространстве метрического пространства. Метрическая топология. Эквивалентные метрики.
2. Система открытых окрестностей. Топология. Топологическое пространство. База и предбаза топологии. Локальная база топологии. Вес и характер топологического пространства. Первая и вторая аксиома счётности. Метрическая топология, её база. Метризуемое топологическое пространство. Порядковая топология, её база. Подпространство топологического пространства, его база. Сравнение топологий.
3. Типы точек в топологическом пространстве по отношению к множеству. Замыкание, внутренность и граница множества. Оператор замыкания, оператор топологического замыкания. Оператор внутренности. Двойственность между операторами внутренности и замыкания. Замыкание и внутренность в подпространствах.
4. Плотные множества в топологических пространствах и их подпространствах. Нигде не плотные множества. Замыкание пересечения открытого множества и плотного множества. Плотность топологического пространства. Сепарабельные топологические пространства. Сепарабельные метризуемые пространства. Сепарабельность пространств со второй аксиомой счётности.
5. Последовательность, подпоследовательность. Сходимость последовательности. Пределы и предельные точки последовательности. Пространства Фреше–Урысона. Связь свойства Фреше–Урысона с первой аксиомой счётности. Веер Фреше–Урысона. Характеризация точки прикосновения в пространстве с первой аксиомой счётности в терминах сходимости последовательностей.
6. Направленность, поднаправленность. Сходимость направленности. Пределы и предельные точки направленности. Характеризация точки прикосновения в произвольном пространстве в терминах сходимости направленностей.
7. Фильтры и ультрафильтры. Доказательство того, что всякое центрированное семейство содержится в ультрафильтре. Основное свойство ультрафильтров.
8. Сходимость фильтров и ультрафильтров. Характеризация точки прикосновения в произвольном пространстве в терминах сходимости фильтров и ультрафильтров. Отображения фильтров и ультрафильтров.
9. Непрерывность отображения метрических пространств в точке и на всём пространстве. Непрерывность расстояния до фиксированного непустого множества. Характеризация непрерывности отображения метрических пространств в терминах открытых множеств. Характеризация непрерывности отображения метрических пространств в терминах сходимости последовательностей.
10. Непрерывность отображения топологических пространств в точке и на всём пространстве. Доказательство равносильности непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ открытости прообразов элементов предбазы топологии Y . Свойства отображений, равносильные непрерывности. Характеризация непрерывности отображения топологических пространств в терминах сходимости ультрафильтров.
11. Непрерывность композиций, подотображений (и сужений) и надотображений непрерывных отображений. Непрерывность диагонального произведения двух непрерывных отображений. Непрерывность функций, полученных применением простейших операций (сложение, вычитание, умножение, деление, взятие минимума, максимума и модуля) к непрерывным функциям.
12. Гомеоморфизмы. Топологические свойства. Вложения. График отображения. Топология произведения двух пространств. Гомеоморфность графика непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ пространству X .
13. Аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3 и T_4 . Равносильные формулировки. Хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Примеры, различающие аксиомы T_0 – T_3 . Сохранение (или несохранение) аксиом отделимости при переходе к подпространствам и при непрерывных отображениях.
14. Замкнутость графика отображения в хаусдорфово пространство. Равносильность хаусдорфовости замкнутости диагонали. Равенство непрерывных отображений, совпадающих на плотном множестве. Нормальность метризуемых пространств.
15. Лемма Урысона.
16. Теорема Титце–Урысона о продолжении. Её вывод из леммы Урысона.
17. Аксиома $T_{3\frac{1}{2}}$. Тихоновские (вполне регулярные) пространства. Пример вполне регулярного ненормального пространства.
18. Сумма топологических пространств. Факторпространство. Факторное отображение. Условия, равносильные факторности отображения. Примеры.
19. Декартово произведение семейства множеств. Каноническая проекция. Тихоновское (топологическое) произведение топологических пространств. Каноническая база произведения топологических пространств. Открытость канонических проекций.
20. Замкнутость произведения замкнутых подмножеств сомножителей. Плотность произведения плотных множеств. Аксиомы отделимости в топологических произведениях.
21. Критерий непрерывности отображения в топологическое произведение (в терминах канонических проекций). Непрерывность декартова и диагонального произведений непрерывных отображений.
22. Семейство отображений, разделяющее точки. Семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества. Теорема о диагональном произведении.
23. Теорема Тихонова о вложении. Метризация теорема Урысона.
24. Покрытия, подпокрытия, вписанные покрытия. Семейства множеств, двойственные покрытиям. Равносильные определения компактности. Характеризация компактности в терминах сходимости ультрафильтров.

25. Теоремы: всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто; любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно; любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления; компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств; всякий непрерывный образ компактного пространства компактен; всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто; любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом; любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.
26. Теоремы: во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непесекающиеся окрестности; во всяком T_3 -пространстве любые два непесекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непесекающиеся окрестности; всякий компакт нормален; во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$ -пространстве X для любых непесекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F . Теорема Тихонова о компактности произведений.
27. Множества первой и второй категории. Пространства со свойством Бэра. Теорема Бэра о категории.
28. Множества непрерывных и непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве как кольца и векторные пространства. Топология равномерной сходимости на множестве ограниченных непрерывных функций. Лемма об аппроксимации \sqrt{x} . Лемма об операциях \min и \max в замкнутом кольце ограниченных непрерывных функций, содержащем все постоянные функции.
29. Формулировка теоремы Вейерштрасса–Стоуна и её вывод из лемм.
30. Компактность в классе метризуемых пространств: существование счётной базы во всяком метризуемом компакте, свойства метризуемого пространства, равносильные компактности.
31. Компактификации топологических пространств. Эквивалентность компактификаций. Порядок на классах эквивалентных компактификаций.
32. Александровская компактификация. Теорема о равносильности её существования локальной компактности.
33. Определение стоун-чеховской компактификации и доказательство её существования. Продолжение отображений в компакты на стоун-чеховскую компактификацию.
34. Локально компактные, счётно компактные, псевдокомпактные и секвенциально компактные пространства. Пример секвенциально компактного не компактного пространства.
35. Локально конечные семейства множеств, их консервативность. Паракомпактные пространства. Теорема: всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально. Замкнутые подпространства паракомпактных пространств.
36. Финально компактные и линделёфовы пространства. Паракомпактность и нормальность линделёфовых пространств. Линделёфовость стрелки Зоргенфрея.
37. Разбиение единицы. Локально конечное разбиение единицы. Существование локально конечных разбиений единицы, подчинённых открытым покрытиям паракомпактов.
38. Связные топологические пространства. Компонента и квазикомпонента топологического пространства. Вполне несвязные пространства. Нульмерные пространства.