Задачи к экзамену

1. Эквивалентны ли метрики
$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})_2=\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n-y_n)^2} \qquad \text{и} \qquad d(\mathbf{x},\mathbf{y})_\infty=\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|$$
на множестве числовых последовательностей $\{\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty\}$?

2. Пусть X — множество, d — метрика на нём, a — любое положительное число, $\bar a\colon X\times X\to\mathbb{R}$ — функция, тождественно равная a, и $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — возрастающая функция со свойствами $f(0)=0$ и $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ для всех $x,y\in\mathbb{R}$. Проверьте, что $a\cdot d$, $\min\{d,\bar a\}$, $f\circ d$ и $\frac{d}{1+d}$ — тоже метрики. Эквивалентны ли они друг другу и метрике d?

3. Пусть X — множество и d_1 и d_2 — две метрики на нём. Какие из функций $\max\{d_1,d_2\}$, $\min\{d_1,d_2\}$, d_1+d_2, $d_1\cdot d_2$ и $\frac{d_1}{d_2}$ тоже являются метриками? (В последнем случае полагаем $\frac{d_1}{d_2}(x,x)=0$ для $x\in X$.)

4. Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

5. Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

6. Сравните следующие топологии на замкнутой верхней полуплоскости:
а) топология, индуцированная из евклидовой плоскости;
б) топология плоскости Немыцкого;
в) топология, индуцированная из плоскости с топологией лексикографического порядка;
г) топология, порождённая лексикографическим порядком на верхней полуплоскости.

7. Покажите, что если X — метризуемое топологическое пространство и d — любая метрика, порождающая топологию X, то замыкание $\overline{B_d(x,\varepsilon)}$ в пространстве X всякого открытого шара $B_d(x,\varepsilon)$ относительно любой метрики d', порождающей топологию X, содержится в замкнутом шаре $\overline{B}_d(x,\varepsilon)$ того же радиуса с тем же центром относительно той же метрики d'. Верно ли, что всегда $\overline{B_d(x,\varepsilon)}=\overline{B}_d(x,\varepsilon)$?

8. Пусть $W_1^0=\{\alpha:\alpha<\omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией и $W_1=W_1^0\cup\cup\{\omega_1\}=\{\alpha:\alpha\leqslant\omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, тоже с порядковой топологией. Заметьте, что W_1^0 является открытым плотным подпространством пространства W_1. Покажите, что W_1^0 — несепарабельное пространство с первой аксиомой счётности, каждая точка в нём имеет тип G_δ (т.е. является пересечением счётного числа открытых множеств) и к каждой его неизолированной точке сходится нетривиальная последовательность. При этом W_1 содержит точку ω_1, к которой не сходится никакая последовательность и которая не имеет тип G_δ.

9. Приведите пример топологических пространств X и Y и непрерывной сюръекции $f\colon X\to Y$, которая
а) не является ни открытым, ни замкнутым отображением;
б) является открытым, но не является замкнутым отображением;
в) является замкнутым, но не является открытым отображением;
г) является замкнутым и взаимно однозначным, но не открытым отображением;
д) является открытым и замкнутым отображением, но не является гомеоморфизмом.

10. Пусть $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение топологического пространства X в себя. Покажите, что подотображение $X\to f(X)$ отображения f является ретракцией тогда и только тогда, когда $f\circ f=f$.

11. Верно ли, что если график $\operatorname{Gr} f$ отображения $f\colon X\to Y$ топологических пространств гомеоморфен пространству X, то f непрерывно?

12. Покажите, что замкнутый диск $\overline{D}^n$ и любой n-мерный симплекс Δ^n, где $n\geqslant 1$, гомеоморфны.

13. Докажите, что тор T^2 гомеоморфен «бублику» — поверхности в $\mathbb{R}^3$, получаемой вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её.

14. Покажите, что отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств непрерывно и замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{f(A)}^Y=f(\overline{A}^X)$ для любого множества $A\subset X$.

15. Покажите, что отображение $f\colon X\to Y$ топологических пространств непрерывно и открыто тогда и только тогда, когда $\overline{f^{-1}(B)}^X=f^{-1}(\overline{B}^Y)$ для любого $B\subset Y$.

16. Покажите, что метрика $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ на топологическом пространстве $(X,\mathscr{T})$ непрерывна относительно топологии произведения на $X\times X$ тогда и только тогда, когда порождаемая ею метрическая топология $\mathscr{T}_d$ слабее (нестрого) топологии $\mathscr{T}$. В частности, на метризуемом пространстве непрерывна всякая метрика, порождающая его топологию.

17. Покажите, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_0 и T_3, регулярно. Верно ли, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_4, нормально?

18. Покажите, что всякое регулярное пространство со счётной базой нормально. Всякое ли хаусдорфово пространство со счётной базой нормально?

19. Покажите, что всякое счётное регулярное пространство нормально. Всякое ли счётное хаусдорфово пространство нормально?

20. а) Приведите пример двух разных функций $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, сужения которых на всюду плотное в $\mathbb{R}$ множество $\mathbf{P}$ иррациональных чисел непрерывны и совпадают.
б) Приведите пример двух разных функций $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, которые в каждой точке всюду плотного в $\mathbb{R}$ множества $\mathbf{P}$ непрерывны и совпадают.

21. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально замкнутым*, или *нуль-множеством*, если существует непрерывная функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ такая, что $A=f^{-1}(\{0\})$.
а) Докажите, что во вполне регулярном пространстве X точка x имеет тип G_δ (т.е. является пересечением счётного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда одноточечное множество $\{x\}$ функционально замкнуто.
б) Приведите пример вполне регулярного пространства, в котором не все точки имеют тип G_δ.

22. Докажите, что если T_1-пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то его мощность не превосходит $2^{\aleph_0}$.

23. Докажите, что если T_3-пространство сепарабельно, то его вес (минимальная мощность базы) не превосходит $2^{\aleph_0}$.

24. Приведите пример факторного, но не открытого и не замкнутого отображения.

25. *Ящичной топологией* на произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ топологических пространств называется топология, порождённая базой $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в X_α. Покажите, что произведение счётного числа прямых с ящичной топологией несвязно.

26. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства.
а) Покажите, что если $Y \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ плотно в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, то проекция $\pi_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$.
б) Приведите пример произведения $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и множества $Y \subset X$ таких, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha \in A$, однако Y не плотно в X.

27. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства.
а) Приведите пример произведения $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и замкнутого множества $Y \subset X$ таких, что проекции $\pi_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α.
б) Приведите пример произведения $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y \subset X$ таких, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha \in A$.

28. Докажите счётную мультипликативность сепарабельности.

29. Докажите, что канторово множество $C \subset \mathbb{R}$ гомеоморфно тихоновской степени $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ дискретного пространства $\{0,1\}$.

30. Докажите теорему Бэра о категории для полных метрических пространств (метрическое пространство *полно*, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится): *В любом полном метрическом пространстве* (X,d) *пересечение* $G = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ *любой последовательности* $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

31. Докажите *лемму Лебега*: для каждого открытого покрытия $\mathscr{U}$ метрического компакта (X,d) существует *число Лебега*, т.е. положительное число λ такое, что покрытие $\{B_d(x,\lambda) : x \in X\}$ вписано в $\mathscr{U}$.

32. Докажите, что линейно упорядоченное пространство X с порядковой топологией компактно тогда и только тогда, когда для всякого непустого множества $Y \subset X$ существуют $\inf Y$ и $\sup Y$.

33. Докажите, что квадрат $[0,1]\times[0,1]$ с топологией лексикографического порядка компактен.

34. Пусть X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство. Верно ли, что замыкание Y в стоун-чеховской компактификации βX пространства X является стоун-чеховской компактификацией βY пространства Y?

35. Докажите, что всякое хаусдорфово локально компактное пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторый хаусдорфов компакт.

36. Докажите теорему Бэра для хаусдорфовых локально компактных пространств.

37. Верно ли, что всякое хаусдорфово финально компактное пространство линделёфово?

38. Докажите, что к плоскости Немыцкого нельзя добавить одну точку так, что получится компактное пространство, но можно добавить одну точку так, что получится линделёфово пространство.

39. Пусть A, Y и X_α, $\alpha \in A$, — множества. Для $A_0 \subset A$ обозначим через π_{A_0} естественное отображение проектирования $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha$, определённое правилом $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha\in A_0}$.

Докажите псевдокомпактность всякого множества $X \subset [0,1]^A$ с тем свойством, что $\pi_{A_0}(X) = [0,1]^{A_0}$ для любого счётного $A_0 \subset A$.

40. Проверьте, что для каждой последовательности $C_1, C_2, \ldots$ связных подпространств топологического пространства такой, что $C_n \cap C_{n+1} \neq \varnothing$ при $n = 1, 2, \ldots$, объединение $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ связно.

41. Заметьте, что любое открыто-замкнутое подмножество тихоновского пространства X является пересечением с X некоторого открыто-замкнутого подмножества компакта βX. Можно ли распространить это утверждение с βX на произвольное тихоновское пространство, содержащее X в качестве плотного подпространства? на произвольную компактификацию пространства X?

42. Пусть X — связное метризуемое пространство и d — любая метрика, порождающая его топологию. Покажите, что для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $k \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_k \in X$ такие, что $x = x_1$, $y = x_k$ и $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ для $i < k$.

43. Докажите связность любого метрического компакта (X,d), в котором для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ существуют $k \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_k \in X$ такие, что $x = x_1$, $y = x_k$ и $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ для $i < k$.