Обобщения топологических групп

Определение

Полугруппа S с топологией, относительно которой полугрупповая операция $S \times S \to S$ непрерывна по первому (второму) аргументу, называется право(лево)топологической полугруппой.
Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция раздельно непрерывна, называется полутопологической полугруппой.
Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция непрерывна, называется топологической полугруппой.
Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно по первому (второму) аргументу, называется право(лево)топологической группой.
Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, называется полутопологической группой.
Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно, называется паратопологической группой.
Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно и операция взятия обратного непрерывна, называется квазитопологической группой.

Теорема (Эллис)

Всякая компактная хаусдорфова полутопологическая группа является топологической группой.

Определение

Отображение $f\colon X \times Y \to Z$ сильно квазинепрерывно в точке (x, y), если для любой окрестности W точки $f(x, y)$ в Z и любой окрестности U точки x в X существуют непустое открытое $U_1 \subset X$ и открытое $V \subset Y$ такие, что $U_1 \subset U$, $y \in V$ и $f(U_1 \times V) \subset W$.

Лемма

Пусть X и Y — компакты, Z регулярно и $f\colon X \times Y \to Z$ раздельно непрерывно. Тогда f сильно квазинепрерывно в каждой точке.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, U_0 — окрестность x_0 и W — окрестность z_0. Z регулярно $\implies$ существуют окрестности W_0 и W_1 точки z_0 такие, что $\overline{W}_0 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W$.

Попытаемся построить по индукции последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек X и Y и убывающие последовательности $(U_n)_{n\geqslant 0}$ открытых подмножеств X и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых подмножеств Y со свойствами $x_n \in U_n$, $y_0, y_n \in V_n$ и $f(x_n, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Положим $U_1 = \{x \in U_0 : f(x, y_0) \in W_0\}$. f раздельно непрерывно $\implies$ U_1 открыто, и $x_0 \in U_1$. Положим $V_1 = Y$. Если $f(U_1 \times V_1) \not\subset W$, то выберем $x_1 \in U_1$ и $y_1 \in V_1$ так, что $f(x_1, y_1) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Шаг $n+1$: Положим $U'_{n+1} = \{x \in U_n : f(x, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1\}$. Множество U'_{n+1} открыто, и $x_n \in U'_{n+1}$. Пусть U_{n+1} — окрестность x_n, $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$. Положим $V'_{n+1} = \{y \in V_n : f(x_n, y) \in W_0\}$. Это множество открыто и содержит y_n и y_0. Пусть V_{n+1} — окрестность множества $\{y_0, y_n\}$ такая, что $V_{n+1} \subset V'_{n+1}$ и $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$. Если $f(U_{n+1} \times V_{n+1}) \not\subset W$, то выберем $x_{n+1} \in U_{n+1}$ и $y_{n+1} \in V_{n+1}$ так, что $f(x_{n+1}, y_{n+1}) \in Z \setminus \overline{W}$.

Предположим, что удалось построить бесконечные последовательности. Пусть x^* и y^* — предельные точки последовательностей (x_n) и (y_n). Имеем $x^* \in \bigcap \overline{U}_n = \bigcap U_n$ (так как $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$) $\implies$ $f(x^*, y_n) \in Z \setminus \overline{W}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $f(x^*, y^*) \in Z \setminus W$ (потому что f раздельно непрерывна).

С другой стороны, для $n > k$ по построению $f(x_k, y_n) \in W_0$ $\implies$ $f(x_k, y^*) \in \overline{W}_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. $\implies$ $f(x^*, y^*) \in \overline{W}_0 \subset W$. $\square$

Лемма

Любая компактная хаусдорфова полутопологическая группа G является паратопологической группой.

Доказательство. Пусть $x_0, y_0 \in G$, $z_0 = x_0 \cdot y_0$, W — окрестность z_0, W_1 — окрестность z_0 такая, что $\overline{W_1} \subset W$. Для $U, V \subset G$ положим $F_{U,V} = (G \setminus W) \cap (\overline{U \cdot V})$. Пусть $\mathscr{F} = \{F_{U,V} : U, V$ — окрестности x_0 и $y_0\}$.

Достаточно показать: $\exists$ открытые $U \ni x_0$ и $V \ni y_0$, для которых $F_{U,V} = \varnothing$.

Предположим, что все элементы семейства $\mathscr{F}$ непусты. Тогда оно центрировано и состоит из замкнутых подмножеств компакта G; значит, $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$.

Возьмём $z \in \bigcap \mathscr{F} \subset G \setminus \overline{W_1}$ и $U \in \tau_1$, для которого $U \cdot z \cap \overline{W_1} = \varnothing$. Множество $U \cdot x_0$ открыто, $x_0 \in U \cdot x_0$. Умножение сильно квазинепрерывно $\implies$ $\exists$ открытые U_1 и V такие, что $\varnothing \neq U_1 \subset U \cdot x_0$, $y_0 \in V$ и $U_1 \cdot V \subset W_1$. $\exists u \in U$, для которого $u \cdot x_0 \in U_1$, и $\exists$ открытое $U_2 \subset X$, для которого $x_0 \in U_2$ и $u \cdot U_2 \subset U_1$. Имеем $u \cdot U_2 \cdot V \subset U_1 \cdot V \subset W_1 \implies u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W_1}$.

Поскольку $z \in \overline{U_2 \cdot V}$, имеем $u \cdot z \in u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W_1}$ и $u \cdot z \in U \cdot z$. Значит, $\overline{W_1} \cap U \cdot z \neq \varnothing$. Противоречие. $\square$

Лемма

Любая компактная хаусдорфова паратопологическая группа G является топологической группой.

Доказательство. G хаусдорфова $\implies X = \{(x, y) \in G \times G : x \cdot y = 1\}$ замкнуто в $G \times G$.

Пусть $F \subset G$ замкнуто. Положим $P = (G \times F) \cap X$. Это компакт. Имеем $(x, y) \in P \iff y \in F$ и $x = y^{-1}$. $\implies$ образ P при проекции $G \times G$ на первый сомножитель — это F^{-1}. Поскольку F компактно и проектирование непрерывно, F^{-1} — компакт $\implies$ замкнут в G. □

Замечание

Из доказательства леммы видно, что *если G — хаусдорфова паратопологическая группа и $F \subset G$ — компакт, то F^{-1} — компакт.*