Свободные топологические группы

Свободные группы — это группы, элементы которых не связаны никакими соотношениями, кроме тех, которые вытекают из определения группы. Всякая свободная группа G свободно порождена некоторым своим подмножеством X; это означает, что любой элемент $g \in G$ можно записать в виде произведения элементов $x \in X$ и их обратных, причём такая запись единственна с точностью до вставки и вычёркивания комбинаций вида $x \cdot x^{-1}$ и $x^{-1} \cdot x$. Для свободной группы, порождённой множеством X, используют обозначение $F(X)$.

Свободные группы обладают так называемым универсальным свойством: любое отображение $f\colon X \to G$ любого множества X в любую группу G продолжается, и притом единственным образом, до гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$. При этом понятно, что $\hat{f}(F(X)) \subset \langle X \rangle_G$ (здесь и ниже $\langle X \rangle_G$ обозначает групповую оболочку множества X в G).

Для каждого тихоновского пространства X определена его свободная топологическая группа $F(X)$. Как группа это свободная группа, порождённая множеством X, и она снабжена групповой топологией, относительно которой X является подпространством топологической группы $F(X)$ и для которой выполнено аналогичное универсальное свойство:

любое непрерывное отображение $f : X \to G$ пространства X в любую топологическую группу G единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f} : F(X) \to G$.

Таким образом, топология свободной топологической группы $F(X)$ — сильнейшая из всех групповых топологий на $F(X)$, индуцирующих на множестве X топологию пространства X. Можно показать также, что это слабейшая из всех топологий с универсальным свойством.

Существование свободной топологической группы

Рассмотрим семейство $\mathscr{F}$ всех непрерывных отображений $f\colon X \to G_f$, где G_f — отделимые топологические группы, являющиеся (как пространства) подпространствами тихоновской степени $\mathbb{R}^{2^{|X|}}$ (это ограничение нужно для того, чтобы рассматриваемые группы и отображения образовывали множества).

С точностью до гомеоморфизма и взятия надотображений отображения $f \in \mathscr{F}$ реализуют все непрерывные отображения из X в любые топологические группы. Ясно, что если нам удастся определить групповую топологию на $F(X)$ так, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to G_f$ из семейства $\mathscr{F}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$, то свободная группа с этой топологией будет обладать универсальным свойством.

Рассмотрим диагональное произведение $\underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} : X \to \prod\limits_{f\in\mathscr{F}} G_f$. Групповая оболочка $\langle \underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f(X)\rangle$ в группе $\prod\limits_{f\in\mathscr{F}} G_f$ образа пространства X является свободной топологической группой пространства X.

То, что X гомеоморфно образу $\underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f(X) \subset \langle \underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f(X)\rangle$, следует из того, что даже уже непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ разделяют точки и замкнутые множества (поскольку X вполне регулярно). В дальнейшем мы будем отождествлять X с $\underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f(X)$.

То, что $\langle X\rangle$ обладает универсальным свойством, вытекает из того, что все непрерывные отображения $f : X \to G_f$ из семейства $\mathscr{F}$ реализуются как проектирования X на сомножители G_f, а значит, продолжаются до гомоморфизма — проектирования всего произведения на G_f. Сужение проектирования на $\langle X\rangle = F(X)$ — требуемое продолжение. Как уже отмечалось, из существования продолжений для всех $f \in \mathscr{F}$ следует универсальное свойство.

То, что группа $\langle X \rangle = \langle \mathop{\Delta}\limits_{f \in \mathscr{F}} f(X) \rangle$ свободна, можно показать, явно предъявив некоторую отделимую групповую топологию на $F(X)$, относительно которой тождественное вложение $\varphi\colon X \to F(X)$ непрерывно. Действительно, это вложение φ присутствует в семействе $\mathscr{F}$; следовательно, ни одно «лишнее» соотношение не выполняется в сомножителе $G_\varphi = F(X)$, а значит, и во всей групповой оболочке $\langle \mathop{\Delta}\limits_{f \in \mathscr{F}} f(X) \rangle$, потому что группа G_φ порождена множеством X.

Граевское продолжение псевдометрик на свободную группу

Пусть $d \leqslant 1$ — псевдометрика на X и $\widetilde{X} = X \sqcup \{e\} \sqcup X^{-1}$. Для $x, y \in \widetilde{X}$ положим

$$\widetilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x^\varepsilon, y^\varepsilon), & \text{если } x, y \in X^\varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon = \pm 1, \\ 1, & \text{если } x = e \text{ и } y \ne e \text{ или } x \ne e \text{ и } y = e, \\ 0, & \text{если } x = y = e, \\ 1, & \text{если } x \in X^\varepsilon \text{ и } y \in X^{-\varepsilon} \text{ для некоторого } \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Для $g \in F(X)$ положим

$$\|g\|_d = \min\Big\{\inf\Big\{\sum_{i=1}^n \widetilde{d}(g_i, u_i) : \; n \in \mathbb{N},\; g_i, u_i \in \widetilde{X},\; g_1 \dots g_n = g,\; u_1 \dots u_n = e\Big\}, 1\Big\}.$$

Это инвариантная (относительно сопряжений) полунорма:

- $\|g\|_d \geqslant 0 \;\; \forall g \in F(X)$ (очевидно);
- $\|g^{-1}\|_d = \|g\|_d \;\; \forall g \in F(X)$ (очевидно);
- $\|g \cdot h\|_d \leqslant \|g\|_d + \|h\|_d \;\; \forall g, h \in F(X)$ $\big($для любых записей $g = g_1 \dots g_n$, $h = h_1 \dots h_k$, $e = u_1 \dots u_n$ и $e = v_1 \dots v_k$ $\;g_1 \dots g_n h_1 \dots h_k$ — запись слова gh и $u_1 \dots u_n v_1 \dots v_k$ — запись e, так что $\|g\|_d \leqslant \sum\limits_{i \leqslant n} \tilde{d}(g_i, u_i) + \sum\limits_{j \leqslant k} \tilde{d}(h_j, v_j)\big)$;
- $\|h^{-1} g h\|_d = \|g\|_d \;\; \forall g, h \in F(X)$ (если $g = g_1 \dots g_n$, $e = u_1 \dots u_n$ и $h = h_1 \dots h_k$, то $g^{-1} h g = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} g_1 \dots g_n h_1 \dots h_k$ и $e = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} u_1 \dots u_n h_1 \dots h_k$, причём $\tilde{d}(h_j, h_j) = 0$, так что $\|h^{-1} g h\|_d \leqslant \sum\limits_{i \leqslant n} \tilde{d}(g_i, u_i) \implies \|h^{-1} g h\|_d \leqslant \|g\|_d$).

Предложение (Граев)

inf *достигается, причём для несократимой записи слова g и записи e, состоящей из букв несократимой записи слова g и их обратных, а также (возможно) буквы e.*

Это предложение имеет несложное, но длинное доказательство (индукцией по длине слова g).

Пусть X — топологическое пространство и d — непрерывная псевдометрика на X. Тогда $\tilde{d}$ — непрерывная псевдометрика на $X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$.

Псевдометрика d порождает на X топологию $\mathscr{T}_d^X$ (база — все открытые шары). Полунорма $\|\cdot\|_d$ порождает на $F(X)$ групповую топологию $\mathscr{T}_d$, потому что она инвариантна (база окрестностей e — все открытые шары).

Замечание

$\mathscr{T}_d|_X = \mathscr{T}_d^X$. Действительно, для $x \in X$ база окрестностей x в топологии $\mathscr{T}_d$ образована множествами вида $\{xg : \|g\|_d < a\}$ для $a > 0$. Заметим: $xg \in X \iff g = x^{-1}y$ для $y \in X$. Однако $\|xy^{-1}\|_d = \tilde{d}(x, y) = d(x, y)$, так что окрестности x в топологии $\mathscr{T}_d|_X$ = шары с центрами в x в псевдометрике d.

Топология любого тихоновского пространства X порождается всеми непрерывными псевдометриками на этом пространстве в том смысле, что шары всех радиусов со всеми центрами относительно всех непрерывных псевдометрик образуют базу топологии. Действительно, для любой точки $x_0 \in X$ и любой её окрестности U существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x_0) = 0$ и $f|_{X\setminus U} \equiv 1$. Единичный шар с центром в x_0 относительно непрерывной псевдометрики d, определённой правилом $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, содержит x_0 и содержится в U.

Замечание

Если $g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \neq e$ и $\min\{d(x_i, x_j) : i, j \leqslant n, i \neq j\} > 0$, то $\|g\|_d > 0$ (это легко выводится из сформулированного выше предложения).

Значит, если X — вполне регулярное пространство с топологией $\mathscr{T}_X$, то

$$\mathscr{T} = \sup\{\mathscr{T}_d : d \text{ — непрерывная псевдометрика на } X\}$$

(супремум семейства топологий — это топология, базой которой служит объединение всех топологий семейства) — отделимая групповая топология на $F(X)$, и $\mathscr{T}|_X \subset \mathscr{T}_X$, т.е. тождественное вложение $\mathrm{id}\colon (X, \mathscr{T}_X) \to (F(X), \mathscr{T})$ непрерывно. Мы получили нужное вложение φ.