Компактификации

Определение. Пара (K, c), где K — компакт, а $c\colon X \to K$ — гомеоморфное вложение топологического пространства X в K с тем свойством, что $\overline{c(X)} = K$, называется *компактификацией* пространства X или *компактным хаусдорфовым расширением* пространства X. Разность $K \setminus c(X)$ называется *наростом* расширения.

Как правило, при рассмотрении компактификации cX пространства X удобно считать, что само X (а не его образ при гомеоморфном вложении) содержится в cX в качестве подпространства. Это вполне допустимо, так как в топологии гомеоморфные пространства неотличимы друг от друга по своим свойствам.

Замечание 1. Если некоторое пространство X вкладывается в компакт K, т.е. существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y = f(X) \subset K$, то пара $(\overline{Y}, \mathrm{i} \circ f)$, где i — тождественное вложение $Y \to \overline{Y}$, является компактификацией пространства X. Следовательно, каждое пространство, вложимое в компакт, обладает компактификацией.

Поскольку все компакты вполне регулярны, а это свойство наследственно, любое пространство, обладающее компактификацией, обязано быть вполне регулярным (тихоновским).

Теорема 1. *Топологическое пространство X обладает компактификацией тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.*

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы будем понимать не только пару (K, c), но и сам компакт K, содержащий (гомеоморфную копию) X в качестве плотного подпространства. Для компактификаций данного пространства X принято использовать обозначения, состоящие из двух символов: cX, bX, βX и т.п.; при этом второй символ — это обозначение самóго пространства, а первый — обозначение его гомеоморфного вложения в соответствующую компактификацию. Так, запись cX не только обозначает некоторый компакт, но и подразумевает, что этот компакт содержит гомеоморфную копию пространства X, причём гомеоморфное вложение X в cX осуществляется отображением $c\colon X \to cX$ и $\overline{c(X)} = cX$. Мы, как правило, будем считать, что пространство X само является подпространством своей компактификации; в этом случае единственная разница между c и тождественным отображением состоит в том, что у c область значений больше (cX, а не X).

Определение. Компактификации c_1X и c_2X считаются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon c_1X \to c_2X$, действующий на X как тождественное отбражение (т.е. оставляющее все точки $x \in X$ неподвижными).

(В общем случае, когда X не отождествлено с $c(X)$, следует требовать выполнение равенства $c_2 = \varphi \circ c_1$.)

Таким образом, две компактификации пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и гомеоморфизм между ними оставляет X неподвижным. Чтобы прояснить последнее условие, приведём пример двух гомеоморфных, но не эквивалентных компактификаций одного и того же пространства.

Пример. Пусть $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 = (0,1)$ и $X_2 = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим компактификации c_1X и c_2X пространства X, представляющие собой сумму $S^1 \oplus [0,1]$ окружности и отрезка, в которую X вложено по-разному: сужение $c_1|_{X_1}$ — это вложение $i\colon X_1 \to S^1$ интервала в окружность, определённое формулой $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, и $c_1|_{X_2}$ — тождественное вложение X_2 в отрезок $[0,1]$, тогда как сужение $c_2|_{X_1}$ — это тождественное вложение X_1 в $[0,1]$ и $c_1|_{X_2} = i|_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$ — вложение X_2 в окружность. Компактификации c_1X и c_2X гомеоморфны, но не эквивалентны, поскольку при любом гомеоморфизме суммы $S^1 \oplus [0,1]$ в себя окружность должна переходить в окружность, а отрезок — в отрезок. Это вытекает из того, что окружность и отрезок связны и не гомеоморфны (потому что отрезок $[0,1]$ содержит ровно две точки x с тем свойством, что разность $[0,1] \setminus \{x\}$ связна, а окружность содержит бесконечно много таких точек).

Легко проверить, что эквивалентность компактификаций действительно является отношением эквивалентности на любом множестве компактификаций данного пространства X, но для того, чтобы воспользоваться этим обстоятельством, надо выделить достаточно представительный набор компактификаций, который является множеством (а не целым классом множеств). Прежде всего, поскольку X плотно в любой своей компактификации cX, имеем $d(cX) \leqslant |X|$, а значит, $w(cX) \leqslant 2^{|X|}$. Действительно, из регулярности любого компакта вытекает, что множества, удовлетворяющие условию

$$U = \operatorname{Int}(\overline{U}), \tag{$*$}$$

образуют в нём базу. С другой стороны, поскольку $\overline{X} = cX$, для всякого открытого в cX множества U имеем $\overline{U} = \overline{U \cap X}$. Значит, каждое множество, удовлетворяющее условию $(*)$, однозначно определяется своим пересечением с X, т.е. некоторым подмножеством множества X, и число таких подмножеств не превосходит числа $2^{|X|}$ всех подмножеств множества X.

Таким образом, любая компактификация пространства X вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^{2^{|X|}}$, так что достаточно рассматривать только компактификации, являющиеся подпространствами этого куба. А такие компактификации действительно образуют множество, и их эквивалентность в смысле данного выше определения действительно является отношением эквивалентности. Мы будем обозначать множество всех компактификаций $cX \subset [0,1]^{2^{|X|}}$ пространства X через $\mathscr{C}(X)$, а множество классов эквивалентности таких компактификаций — через $\mathfrak{C}(X)$.

Теперь упорядочим множество $\mathfrak{C}(X)$. Точнее, мы введём транзитивное и рефлексивное отношение $\leqslant$ на множестве компактификаций $\mathscr{C}(X)$ и докажем, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$ тогда и только тогда, когда компактификации c_1X и c_2X эквивалентны, а это означает, что формула[1] $[c_1X] \preccurlyeq [c_2X] \iff c_1X \leqslant c_2X$ корректно определяет отношение $\preccurlyeq$ на $\mathfrak{C}(X)$ и это отношение не только транзитивно и рефлексивно, но и антисимметрично, т.е. является порядком.

Определение. Пусть c_1X и c_2X — компактификации одного и того же тихоновского пространства X. Положим $c_1X \leqslant c_2X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$, которое переводит каждую точку x в себя.

(В общем случае, когда X не отождествлено с $c(X)$, следует требовать выполнение равенства $c_1 = f \circ c_2$.)

Заметим, что отображение f в этом определении автоматически сюръективно, потому что образ $f(c_2X)$ компактен и потому замкнут в c_1X, и при этом $X = f(X)$ и $\overline{X} = c_1X$. Более того, можно доказать, что нарост переходит в нарост: $f(c_2X \setminus X) = c_1X \setminus X$.

Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Компактификации c_1X и c_2X эквивалентны тогда и только тогда, когда $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$.*

Рассмотрим теперь «экстремальные» (наибольшие и наименьшие[2]) компактификации.

[1]Напомним, что квадратные скобки используются для обозначения классов эквивалентности.

[2]В соответствии со сделанными выше оговорками имеются в виду компактификации, принадлежащие наибольшему (наименьшему) относительно порядка $\preccurlyeq$ элементу множества $\mathfrak{C}(X)$ классов эквивалентных компактификаций.

Александровская компактификация

Наименьшие компактификации устроены проще всего, но они существуют не для всех пространств.

Определение. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если каждая точка $x \in X$ имеет компактную (не обязательно открытую!) окрестность.

Для хаусдорфовых пространств это условие равносильно существованию у каждой точки окрестности с компактным замыканием.

Теорема 3. *Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX, для которой нарост $\alpha X \setminus X$ состоит из одной точки. Эта компактификация является наименьшим элементом множества компактификаций $\mathscr{C}(X)$.*

Доказательство. Возьмём любую точку $* \notin X$ и положим $\alpha = \mathrm{id_X}$ и $\alpha X = X \cup \{*\}$. Объявим открытыми в αX все множества, открытые в X, а также все множества вида $\{*\} \cup (X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X. Легко видеть, что αX — компактификация пространства X. Значит, $X \in T_{3\frac{1}{2}}$ и мы можем рассмотреть множество компактификаций $\mathscr{C}(X)$.

Пусть $cX \in \mathscr{C}(X)$. Соотношение $\alpha X \leqslant cX$ будет доказано, если мы покажем, что отображение $f\colon cX \to \alpha X$, определённое правилом

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in X, \\ * & \text{при } x \in cX \setminus X, \end{cases}$$

непрерывно и переводит нарост $cX \setminus X$ в нарост-точку $\{*\}$, а остальные точки оставляет на месте. Чтобы доказать непрерывность, достаточно проверить, что X открыто в cX. Действительно, прообраз любого открытого множества является либо открытым подмножеством множества X (так что если множество X открыто, то он будет открыт и во всём пространстве cX), либо множеством вида $f^{-1}(\alpha X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X (а такое множество является дополнением в cX до множества K, которое компактно и потому замкнуто. То, что локально компактное пространство X открыто в cX, вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Любое локально компактное хаусдорфово пространство Y открыто в любом хаусдорфовом пространстве Z, содержащем Y в качестве плотного подпространства.*

Доказательство. Каждая точка $y \in Y$ обладает компактной окрестностью N. Эта окрестность замкнута, поскольку Y хаусдорфово, и содержит некоторую открытую окрестность U точки y. Поскольку $\overline{U}^Y \subset N$, замыкание $\overline{U}^Y$ компактно. Легко видеть, что $\overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y$, потому что Y плотно в Z; поскольку это множество компактно, оно замкнуто и в Z. Имеем $\overline{U}^Z = \overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y \subset Y$. Пусть W — открытое множество в Z, для которого $U = Y \cap W$. Тогда $y \in W \subset \overline{W}^Z = \overline{Y \cap W}^Z = \overline{U}^Z \subset Y$, а значит, каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, содержащуюся в Y, т.е. Y открыто. ■

■

Нетрудно доказать, что $w(\alpha X) = w(X)$.

Определение. Компактификация αX локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства X называется *александровской компактификацией*, или *одноточечной компактификацией*, или *минимальной компактификацией* этого пространства.

Теорема 4. *Если в семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного пространства X есть наименьший элемент cX (относительно порядка $\leqslant$), то X локально компактно и компактификация cX эквивалентна александровской компактификации αX.*

Доказательство. Сначала покажем, что нарост $cX \setminus c(X)$ является одноточечным множеством.

Предположим, что нарост $cX \setminus X$ содержит две разные точки x и y. Очевидно, пространство $Y = cX \setminus \{x, y\}$ локально компактно, и его компактификация αY является также и компактификацией $c'X$ пространства X. По условию теоремы $cX \leqslant c'X$; значит, существует непрерывное отображение $f\colon c'X \to cX$, для которого $f|_X = \mathrm{id_X}$. Непрерывные отображения в хаусдорфовы пространства, совпадающие на плотном подмножестве, совпадают везде; следовательно, $f|_Y = \mathrm{id_Y}$, так что компакты $c'X$ и cX являются компактификациями пространства Y. Как упоминалось выше, имеем $f(c'X \setminus Y) = cX \setminus Y$. Вспомнив, что $c'X = \alpha Y = Y \cup \{*\}$ и $Y = cX \setminus \{x, y\}$, мы видим, что $f(\{*\}) = \{x, y\}$ — одна точка отображается в две, а такого быть не может. Значит, нарост $cX \setminus X$ действительно состоит из одной точки.

Таким образом, $cX = X \cup \{\star\}$ для некоторой точки $\star \notin X$. Покажем, что X локально компактно, т.е. любая точка $x \in X$ имеет компактную окрестность (в X). Поскольку пространство cX регулярно (будучи хаусдорфовым компактом), оно является и T_1-пространством, так что множество $X = cX \setminus \{\star\}$ — открытая окрестность в cX любой точки $x \in X$ и любая точка $x \in X$ имеет окрестность V, замыкание которой (в компакте cX) содержится в X; это замыкание и является компактной окрестностью точки x в X.

Итак, $cX = X \cup \{\star\}$ и пространство X локально компактно. По теореме об александровской компактификации для пространства X определена одноточечная компактификация $\alpha X = X \cup \{*\}$. По условию теоремы $cX \leqslant \alpha X$, т.е. существует непрерывное отображение $\varphi\colon \alpha X \to cX$, для которого $\varphi|_X = \mathrm{id_X}$. Согласно сформулированному выше утверждению имеем $\varphi(\{*\}) = \{\star\}$, а значит, φ биективно и является гомеоморфизмом, поскольку любое непрерывное отображение компакта в хаусдорфово пространство переводит замкнутые множества в замкнутые. Следовательно, компактификации cX и αX эквивалентны. ■

Стоун–чеховская компактификация

Наибольшая компактификация, в отличие от наименьшей, существует всегда, но устроена она, как правило, гораздо сложнее (даже для локально компактных пространств).

Определение. Компактификация тихоновского пространства X, наибольшая относительно $\leqslant$, называется *компактификацией Стоуна–Чеха*, или *стоун-чеховской компактификацией*, или *стоун-чеховским расширением*, или *максимальной компактификацией* пространства X и обозначается βX.

Теорема 5. *Для каждого тихоновского пространства X существует стоун-чеховская компактификация βX.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX$ и диагональное отображение

$$\beta = \mathop{\Delta}_{cX \in \mathscr{C}(X)} c\colon X \to \prod_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX,$$

которое по теореме о диагональном произведении отображений является гомеоморфным вложением; будем считать, что $X = \beta(X)$ (т.е. отождествим X с его гомеоморфной копией $\beta(X)$). Обозначим замыкание $\overline{X}$ в $\prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX$ через βX. По теореме Тихонова о компактности произведений и в силу компактности замкнутых подмножеств компактов пространство βX является компактификацией пространства X, причём эта компактификация наибольшая: для любой компактификации $c_0X \in \mathscr{C}(X)$ сужение $\widetilde{\pi}_{c_0X}$ канонической проекции $\pi_{c_0X}\colon \prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX \to c_0X$ на X тождественно, поэтому $c_0X \leqslant \beta X$ при всех $c_0X \in \mathscr{C}(X)$, так что βX действительно стоун-чеховская компактификация. ■

Стоун-чеховскую компактификацию редко удаётся описать конструктивно, поскольку доказательство её существования основано на теореме Тихонова, которая равносильна аксиоме выбора. Однако её можно охарактеризовать понятным и весьма полезным свойством.

Теорема 6. *Пусть X — тихоновское пространство.*

① *Каждое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ пространства X в любой компакт K можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta X \to K$.*

② *Если компактификация cX обладает тем свойством, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ пространства X в любой компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon cX \to K$, то cX эквивалентна*[1] *стоун-чеховской компактификации βX.*

Доказательство. ① Положим $c = \mathrm{id}_{\mathrm{X}} \Delta \mathrm{f}\colon \mathrm{X} \to \beta\mathrm{X} \times \mathrm{K}$. По теореме о диагональном отображении c — гомеоморфное вложение, так что $cX = \overline{c(X)} \subset \beta X \times K$ — компактификация пространства X (здесь отождествлять X с $c(X)$ технически неудобно). В силу максимальности βX существует непрерывное отображение $g\colon \beta X \to cX$, для которого $g|_X = c$. Пусть $\pi\colon cX \to K$ — сужение проекции $\pi_K\colon \beta X \times K \to K$ на cX. Положим $\hat{f} = \pi \circ g\colon \beta X \to K$. Отображение $\hat{f}$ является продолжением отображения f, так как $\hat{f}|_X = \pi \circ g|_X = \pi \circ c = f$.

② По предположению тождественное вложение $\mathrm{id}_{\mathrm{X}}\colon \mathrm{X} \to \beta\mathrm{X}$ можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{\mathrm{id}}_X\colon cX \to \beta X$. Имеем $(\hat{\mathrm{id}}_X)|_X = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, т.е. $\beta X \leqslant cX$. В силу максимальности компактификации βX имеем также $cX \leqslant \beta X$; значит, cX и βX эквивалентны. ■

[2]Слово «эквивалентна» здесь не вполне уместно, поскольку сама стоун-чеховская компактификация определена с точностью до эквивалентности. Однако по традиции (и из эстетических соображений) принято вести себя так, как если бы компактификация βX была жёстко фиксирована.