Предложение 1. *Если топологическое пространство обладает базой мощности $\leqslant \kappa$, то любая его база содержит подсемейство мощности $\leqslant \kappa$, являющееся базой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — любая база топологии пространства X и $\mathscr{B}_0$ — база мощности $\leqslant \kappa$. Для каждой пары $(U, V) \in \mathscr{B}_0 \times \mathscr{B}_0$ зафиксируем такой элемент $W_{(U,V)}$ базы $\mathscr{B}$, что $U \subset W_{(U,V)} \subset V$, если он существует; если такого элемента нет, положим $W_{(U,V)} = \varnothing$. Семейство $\mathscr{B}' = \{W_{(U,V)} : (U, V) \in \mathscr{B}_0 \times \mathscr{B}_0\}$ имеет мощность $\leqslant \kappa$ и является базой. Действительно, первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе, надо проверить, что для любой окрестности O любой точки $x \in X$ существует $U \in \mathscr{B}'$, для которого $x \in U \subset O$. Поскольку $\mathscr{B}_0$ — база, существует $V \in \mathscr{B}$, $x \in V \subset O$. Поскольку $\mathscr{B}$ — тоже база, существует $W \in \mathscr{B}$, $x \in W \subset V$. Наконец, поскольку $\mathscr{B}_0$ — база, существует $U \in \mathscr{B}$, $x \in U \subset W$. По построению для пары (U, V) был зафиксирован элемент $W_{(U,V)} \in \mathscr{B}'$ такой, что $U \subset W_{(U,V)} \subset V$. Ясно, что $x \in W_{(U,V)} \subset O$. ■

Отображения топологических пространств в произведения

Предложение 2. *Отображение $f\colon X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\pi_\alpha \circ f$ непрерывна для каждого $\alpha \in A$.*

Доказательство. Доказательства требует только непрерывность отображения f в предположении непрерывности всех композиций $\pi_\alpha \circ f$. Рассмотрим предбазу

$$\mathscr{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\, U \text{ открыто в } X_\alpha\}$$

топологии произведения $\prod X_\alpha$. Для каждого $\alpha \in A$ имеем $f^{-1}\bigl(\pi_\alpha^{-1}(U)\bigr) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U)$, а это множество открыто в силу непрерывности отображения $\pi_\alpha \circ f$. Таким образом, прообраз при отображении f каждого элемента предбазы $\mathscr{B}$ открыт. Значит, отображение f непрерывно. ■

Из этого предложения вытекает важная теорема. Напомним, что диагональ, или диагональное произведение, $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ семейства отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, переводит каждую точку $x \in X$ в элемент $\bigl(f_\alpha(x)\bigr)_{\alpha \in A}$ произведения $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$.

Теорема 1. *Диагональное произведение $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, одного и того же пространства X в пространства Y_α, $\alpha \in A$, непрерывно.*

Действительно, для каждого $\alpha \in A$ имеем $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$, так что теорема сразу вытекает из предложения 2.

Теперь рассмотрим вложения топологических пространств в декартовы произведения.

Определение. Пусть X — множество, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство множеств и $\mathscr{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство отображений. Говорят, что $\mathscr{F}$ *разделяет точки* множества X, если для каждой пары различных точек $x, y \in X$ найдётся $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Если X и все Y_α — топологические пространства и для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего x, существует такой индекс $\alpha \in A$, что $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}^{Y_\alpha}$, то говорят, что семейство $\mathscr{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества* в пространстве X.

Заметим, что если X — T_0-пространство, то любое семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества в пространстве X, разделяет и точки.

Теорема 2. *Если семейство непрерывных отображений* $\mathscr{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ *разделяет точки пространства* X*, то диагональное произведение* $f = \Delta f_\alpha\colon X \to \prod Y_\alpha$ *— непрерывная инъекция. Если, сверх того, семейство* $\mathscr{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества, то* f *— гомеоморфное вложение.*

В частности, если существует $\alpha \in A$*, для которого* f_α *— гомеоморфное вложение, то* f *тоже гомеоморфное вложение.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Если непрерывное отображение* $f\colon X \to Y$ *топологических пространств инъективно и одноэлементное семейство* $\{f\}$ *разделяет точки и замкнутые множества, то* f *— гомеоморфное вложение.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что подотображение отображения f с областью значений $f(X)$, т.е. отображение $\check{f}\colon X \to f(X)$, определённое правилом $\check{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\check{f}$ непрерывно и взаимно однозначно по предположению, достаточно проверить, что оно замкнуто, или, другими словами, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$ имеет место равенство

$$\check{f}(F) = \overline{\check{f}(F)}^{f(X)}, \qquad \text{т.е.} \qquad f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}^{Y}. \tag{$\star$}$$

Пусть F — замкнутое множество в X. Если $f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $f(x) \notin \overline{f(F)}^{Y}$, поскольку $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Следовательно, правая часть равенства $(\star)$ содержится в левой. Обратное включение очевидно. ∎

Доказательство теоремы. Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует такое $f_\alpha \in \mathscr{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Таким образом, $f(x) \neq f(y)$, а это и означает, что f инъективно. Непрерывность f следует из теоремы 1.

Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ тоже обладает этим свойством, так как если $f(x) \in \overline{f(F)}$ для некоторого $F \subset X$, то

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x)) \in \pi_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{\pi_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$$

для каждого $\alpha \in A$ (здесь мы использовали непрерывность проекций и тот факт, что при непрерывном отображении образ замыкания любого множества содержится в замыкании его образа). Осталось применить лемму. ∎

Определение. *Тихоновским кубом* называется топологическое произведение вида $[0,1]^\kappa$, где κ — любой бесконечный кардинал. Тихоновский куб $[0,1]^{\aleph_0}$ называется также *гильбертовым кубом.*

Теорема Тихонова о вложении. *Всякое тихоновское пространство веса* $\kappa \geqslant \aleph_0$ *вкладывается в тихоновский куб* $[0,1]^\kappa$*.*

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство и $w(X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, семейство всех дополнений до прообразов 1 при непрерывных функциях $X \to [0,1]$ составляет базу пространства X, а поскольку $w(X) = \kappa$, из этой базы можно выделить базу $\mathscr{B}$ мощности κ. Пусть $\mathscr{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, где $|A| = \kappa$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём непрерывную функцию $f_\alpha\colon X \to [0,1]$, для которой $U_\alpha = f_\alpha^{-1}\big([0,1)\big)$.

Семейство $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества: если $x \in X$ и $F \subset X$ — не содержащее точку x замкнутое множество, то найдётся окрестность $U_\alpha \in \mathscr{B}$ этой точки, не пересекающая F. Соответствующая функция f_α переводит F в 1, причём $f_\alpha(x) \neq 1$, поскольку $f_\alpha(U_\alpha) \subset [0,1)$ и $x \in U_\alpha$. Значит, $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Поскольку X — T_0-пространство, семейство $\mathscr{F}$ разделяет также и точки. По теореме о диагональном произведении $\Delta f_\alpha\colon X \to [0,1]^A = [0,1]^\kappa$ — гомеоморфное вложение. ∎

Замечание 1. Вес тихоновского куба $[0,1]^\kappa$ равен κ. Действительно, из того, что $w([0,1]) = \aleph_0$, немедленно вытекает, что каноническая предбаза (а значит, и каноническая база) произведения $[0,1]^\kappa$ имеет мощность κ. Значит, вес куба $[0,1]^\kappa$ не больше κ. Но он не может быть и меньше κ — ведь мы только что доказали, что любое тихоновское пространство веса κ (в частности, дискретное пространство мощности κ) вкладывается в $[0,1]^\kappa$, а вес подпространства не может быть больше веса самого пространства. Следовательно, $w([0,1]^\kappa) = \kappa$, и теорему о вложении в тихоновский куб можно сформулировать так: *любое бесконечное тихоновское пространство вкладывается в тихоновский куб того же веса.*

Важнейшее следствие теорем Тихонова состоит в том, что всякое тихоновское пространство можно *компактифицировать*, т.е. вложить в некоторый компакт в качестве всюду плотного подпространства.

Следствие. *Любое тихоновское пространство X вкладывается в некоторый компакт K в качестве всюду плотного подпространства.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $f\colon X \to [0,1]^{w(X)}$, которое существует по теореме Тихонова. Пространство $f(X)$ гомеоморфно пространству X, и его замыкание $\overline{f(X)}$ в пространстве $[0,1]^{w(X)}$ (которое компактно по теореме Тихонова о компактности произведения компактов) компактно. ■

Компактификации

Определение. Пара (K, c), где K — компакт, а $c\colon X \to K$ — гомеоморфное вложение топологического пространства X в K с тем свойством, что $\overline{c(X)} = K$, называется *компактификацией* пространства X или *компактным хаусдорфовым расширением* пространства X. Разность $K \setminus c(X)$ называется *наростом* расширения.

Как правило, при рассмотрении компактификации cX пространства X удобно считать, что само X (а не его образ при гомеоморфном вложении) содержится в cX в качестве подпространства. Это вполне допустимо, так как в топологии гомеоморфные пространства неотличимы друг от друга по своим свойствам.

Замечание 2. Если некоторое пространство X вкладывается в компакт K, т.е. существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y = f(X) \subset K$, то пара $(\overline{Y}, \mathrm{i} \circ f)$, где i — тождественное вложение $Y \to \overline{Y}$, является компактификацией пространства X. Следовательно, каждое пространство, вложимое в компакт, обладает компактификацией.

Поскольку все компакты вполне регулярны, а это свойство наследственно, любое пространство, обладающее компактификацией, обязано быть вполне регулярным (тихоновским). Таким образом, из предыдущего замечания, теоремы Тихонова о вложении в тихоновский куб и компактности тихоновских кубов (которая вытекает из теоремы Тихонова о компактности произведений) следуют такие теоремы.

Теорема 3. *Топологическое пространство X обладает компактификацией тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.*

Теорема 4. *Каждое вполне регулярное пространство X имеет компактификацию (K, c) со свойством $w(K) = w(X)$.*