Теорема Тихонова о компактности произведений

Теорему Тихонова о компактности произведений обычно называют просто теоремой Тихонова. Это одна из главных теорем не только общей топологии, но и всей математики. Она находит применения в самых разнообразных и неожиданных контекстах. Мы ограничимся тем, что докажем её равносильность аксиоме выбора.

То, что теорему Тихонова можно вывести из системы аксиом ZF и аксиомы выбора (т.е. из ZFC), ясно из существования её доказательства — по сути само это доказательство как раз и есть её вывод. Осталось показать, как из системы ZF и теоремы Тихонова вывести аксиому выбора.

Напомним формулировку аксиомы выбора: для каждого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых множеств существует функция выбора, т.е. отображение $f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ с тем свойством, что $f(\alpha) \in X_\alpha$ для всякого $\alpha \in A$. Заметим, что всякая функция выбора — это просто элемент декартова произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, так что аксиома выбора равносильна утверждению, что декартово произведение непустого семейства непустых множеств непусто.

Итак, пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — непустое семейство непустых множеств. В каждом множестве X_α возьмём по точке x_α; мы можем это сделать, поскольку все множества X_α непусты (однако без аксиомы выбора мы не можем утверждать, что все точки x_α образуют множество). Возьмём произвольную точку $*$ и положим $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{*\}$. Снабдим каждое множество Y_α топологией $\mathscr{T}_\alpha = \{\varnothing, Y_\alpha, X_\alpha, \{*\}\}$. Каждое Y_α с этой топологией компактно. По теореме Тихонова произведение $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ тоже компактно (причём это произведение заведомо непусто, поскольку оно содержит, например, отображение $f\colon A \to \bigcup Y_\alpha$, принимающее постоянное значение $*$ во всех точках α). Для каждого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$. По определению топологии произведения все проекции π_α непрерывны; значит, каждое множество F_α замкнуто в $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, будучи прообразом замкнутого в Y_α множества X_α. Кроме того, семейство $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Действительно, для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ пересечение $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}$ содержит функцию $f\colon A \to \bigcup Y_\alpha$, определённую правилом $f(\alpha_i) = x_{\alpha_i}$ для $i \leqslant n$ и $f(\alpha) = *$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Такая функция существует, поскольку аксиомы ZF позволяют нам формировать конечные декартовы произведения (в частности, $A \times \bigl(\bigcup Y_\alpha\bigr)$) и выделять в них подмножества, определённые конкретными формулами.

Таким образом, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Поскольку это пространство компактно, пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ непусто. Осталось заметить, что это пересечение совпадает с произведением $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Теорема Тихонова о компактности произведений. it Топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все X_α компактны.

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из непрерывности всех канонических проекций $\pi_\beta\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ и того, что непрерывные отображения сохраняют компактность.

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием компактности в терминах ультрафильтров. Пусть $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ — топологическое произведение семейства компактных пространств и $\mathscr{U}$ — любой ультрафильтр на множестве $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Нам нужно показать, что $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\mathscr{U}_\alpha = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathscr{U}\}$. Семейство $\mathscr{U}_\alpha$ является ультрафильтром на X_α (см. слайды про ультрафильтры), и, поскольку X_α компактно, $\mathscr{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ и покажем, что $\mathscr{U}$ сходится к точке $\mathbf{x}$. Пусть U — любая окрестность точки $\mathbf{x}$ в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha$. По определению канонической окрестности найдётся такое конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$, что $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Для каждого $i \leqslant n$ ультрафильтр $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ сходится к x_{α_i}, поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$. Из того, что пересечение конечного числа элементов любого фильтра принадлежит этому фильтру, вытекает, что $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcap_{i\leqslant n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$, а из того, что вместе с каждым своим элементом всякий фильтр содержит все бо́льшие множества, — что $U \in \mathscr{U}$. Мы показали, что любая окрестность точки $\mathbf{x}$ принадлежит ультрафильтру $\mathscr{U}$, а это и означает, что $\mathscr{U}$ сходится к $\mathbf{x}$. ■

Поскольку произведение любого семейства хаусдорфовых пространств хаусдорфово, из теоремы Тихонова немедленно вытекает такое утверждение (его называют также хаусдорфовой версией теоремы Тихонова):

Следствие 1. *Произведение любого семейства компактов является компактом.*