Покрытия

Определение. Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. *Покрытие* множества Y — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X, которое *покрывает* Y, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют *открытым* (*замкнутым*, *открыто-замкнутым*) покрытием.

Пусть $\mathscr{C}'$ — ещё одно покрытие множества Y. Говорят, что $\mathscr{C}'$ *вписано* в $\mathscr{C}$, и пишут $\mathscr{C}' \leqslant \mathscr{C}$ или $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$, если всякий элемент C' покрытия $\mathscr{C}'$ содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$. Покрытие $\mathscr{C}'$ *комбинаторно вписано* в $\mathscr{C}$ или является *ужатием* покрытия $\mathscr{C}$, если оба покрытия заиндексированы элементами одного и того же множества A (т.е. $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathscr{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in A\}$) и $C'_\alpha \subset C_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется *подпокрытием* покрытия $\mathscr{C}$, если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathscr{C}' \supset Y$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуации, когда $Y = X$.

Замечание 1. Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что *семейство $\mathscr{C}$ подмножеств множества X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.*

Компактные пространства и их свойства

Мы будем часто пользоваться этим замечанием и начнём прямо сейчас: мы приведём сразу два равносильных определения важнейшего топологического свойства — компактности, эквивалентность которых вытекает как раз из этого замечания.

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются *компактами*.

Определение′. Топологическое пространство *компактно*, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Как уже было сказано, эти определения равносильны: если $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus U : U \in \mathscr{U}\}$ состоит из замкнутых множеств (поскольку все $U \in \mathscr{U}$ открыты), центрировано (если бы существовало конечное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ с пустым пересечением, то согласно важному замечанию множества $\{X \setminus F : F \in \mathscr{F}'\}$ образовывали бы конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$) и имеет пустое пересечение (потому что $\mathscr{U}$ — покрытие). Точно так же если $\mathscr{F}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств X и $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$, то $\mathscr{U} = \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}\}$ — открытое покрытие[1] X, и в силу центрированности семейства $\mathscr{F}$ из него нельзя выделить конечное подпокрытие.

Весьма полезно также и следующее простое замечание.

[1] По определению покрытие должно быть индексированным семейством. Однако на индексное множество никаких ограничений не накладывается, и в данном случае можно считать, что это множество $\mathscr{F}$, т.е. что семейство $\mathscr{U}$ индексировано элементами F этого множества. Вообще, любое семейство можно трактовать как индексированное своими собственными элементами, так что любое семейство множеств, объединение которых содержит данное множество, можно рассматривать как покрытие этого множества.

Предложение 1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{B}$ — любая база его топологии. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое его покрытие элементами базы $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства X. Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathscr{U}$, содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathscr{B}$, который содержит точку x и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X элементами базы $\mathscr{B}$. По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество V_{x_i} содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \cdots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \ldots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. ■

Компактность можно определить эквивалентным образом и на языке сходимости. Мы ограничимся критерием компактности в терминах ультрафильтров.

Теорема 1. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.*

Доказательство. Необходимость. Существование ультрафильтра $\mathscr{U}$ на X, который не сходится ни к одной точке $x \in X$, означает, что у любой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U_x, не принадлежащая ультрафильтру $\mathscr{U}$. Эти окрестности образуют открытое покрытие компактного пространства X; пусть $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. В силу основного свойства ультрафильтров имеем $U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех i. Значит, ультрафильтра, который не сходится ни к какой точке, существовать не может.

Достаточность. Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано (см. замечание выше). Значит, $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X (см. слайды к предыдущему вопросу). По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Пусть V — содержащий эту точку элемент покрытия $\mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Этого быть не может — любые два элемента любого фильтра обязаны пересекаться. Значит, всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. ■