Фильтры и ультрафильтры

Определение

Центрированное семейство множеств — это любое семейство $\mathscr{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$, то $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \varnothing$.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
3. если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Фильтр $\mathscr{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является базой фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Теорема

Любое центрированное семейство $\mathscr{C}$ на произвольном множестве X содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X.

Для доказательства нужна лемма Цорна (которая, как известно, равносильна аксиоме выбора — см. книгу Верещагина и Шеня «Начала теории множеств»)

Лемма Цорна

Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в X есть максимальный элемент.

Доказательство. Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на X, содержащих $\mathscr{C}$, отношением включения $\subset$. Если $\mathfrak{L}$ — любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup \mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \ldots, F_n \in \bigcup \mathfrak{L}$ найдутся $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathscr{F}_i$ для $i \leqslant n$, и поскольку $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено, без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_n$ (иначе перенумеруем $F_1, \ldots, F_n$). Значит, $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \varnothing$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U}$, содержащее $\mathscr{C}$. Ясно, что $\mathscr{U}$ — ультрафильтр. $\square$

Теорема (основное свойство ультрафильтров)

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр на X, и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathscr{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \neq \varnothing$. Если $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \cdots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \setminus A \neq \varnothing,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathscr{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathscr{U}$ и, значит, $F \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, и из максимальности $\mathscr{F}$ вытекает, что $\mathscr{F} = \mathscr{U}$. Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$, и пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F} \neq \mathscr{U}$, то найдется $A \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathscr{F}$, а поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, так что $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. □

Следствие (основное свойство ультрафильтров)

Если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на множестве X, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \subset X$ и существует $A \in \mathscr{U}$ такой, что $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$. В частности, если $A_1, \ldots, A_m$ — любые подмножества X со свойством $A_1 \cup \cdots \cup A_m = X$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$.

Доказательство. Предположим, что $A_i \notin \mathscr{U}$ для всех $i \leqslant m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ для $i \leqslant m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)) = \varnothing$. □

Определение

Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X сходится к некоторой точке $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathscr{F}$. Для сходимости $\mathscr{F}$ к x используется обозначение $\mathscr{F} \to x$. Фильтр сходится, или является сходящимся, если он сходится к некоторой точке.

Теорема

Для топологического пространства X, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:

а) *x является точкой прикосновения множества A;*

б) *существует фильтр $\mathscr{F}$ на X, который содержит A и сходится к x;*

в) *существует ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, который содержит A и сходится к x.*

Доказательство. а)⇒в): Семейство $\mathscr{B}(x)$ всех окрестностей точки x в X центрировано. Поскольку x — точка прикосновения множества A, семейство $\{A \cap U : U \in \mathscr{B}(x)\}$ тоже центрировано и, значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Из свойства 3 вытекает, что $\mathscr{U}$ содержит как все окрестности x (а значит, $\mathscr{U} \to x$), так и множество A.
в)⇒б): тривиально.
б)⇒а): Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ сходится к точке x, он содержит все окрестности x. То, что он содержит также и множество A, означает, что пересечение A с любой окрестностью x непусто (в силу свойства 1), т.е. x является точкой прикосновения множества A. □

Отображения фильтров

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на X. Семейство множеств
$$\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathscr{F}(f(F) \subset A)\}$$
называется образом фильтра $\mathscr{F}$ при отображении f и обозначается $\beta f(\mathscr{F})$.

Предложение

Образ любого фильтра при любом отображении является фильтром. Образ любого ультрафильтра при любом отображении является ультрафильтром.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, и пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X. То, что образ $\mathscr{F}$ при отображении f является фильтром, ясно: выполнение условий 1 и 3 из определения фильтра очевидно, а выполнение условия 2 вытекает из того, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$. Если при этом $\mathscr{F}$ является ультрафильтром, то из основного свойства ультрафильтров и очевидного равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что образ $\mathscr{F}$ тоже является ультрафильтром. □