На всякий случай:
Группа G — это множество вместе с заданными на нём ассоциативной бинарной операцией $* : G \times G \to G$, унарной операцией $^{-1} : G \to G$ и 0-арной операцией e. При этом должны выполняться условия $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ и $g * e = e * g = g$ для всех $g \in G$.

стандартные обозначения для операций над множествами в группах:
$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}$, $a * B = \{a\} * B$, $A * b = A * \{b\}$, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

Определение

Группа G с топологией $\mathscr{T}$ называется топологической группой, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента $^{-1} : G \to G$ непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G \times G$. При этом $\mathscr{T}$ называется групповой топологией, или топологией, согласованной с групповыми операциями.

Примеры

- Любая группа превращается в топологическую группу, будучи снабжённой дискретной топологией.
- Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топологической группой (а прямая Зоргенфрея с той же операцией сложения топологической группой не является — операция перехода к обратному не непрерывна).
- Топологической группой является и любая тихоновская степень прямой с покоодинатными умножением и взятием обратного, так что любое тихоновское пространство является подпространством топологической группы.

- На пространстве P иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относительно которой P является топологической группой. Действительно, пространство P гомеоморфно тихоновскому произведению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (будет обсуждаться впоследствии), а на степени $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ дискретной группы $\mathbb{Z}$ определены операции покоординатного сложения и перехода к обратному. Нетрудно убедиться в том, что эти операции непрерывны относительно топологии тихоновского произведения.
- То же верно и для канторова дисконтинуума C — он гомеоморфен счётной тихоновской степени двухэлементной дискретной группы $\mathbb{Z}_2$.

Специфические топологические свойства топологических групп

Уже из самогó существования непрерывных групповых операций вытекают многие топологические свойства топологических групп, вообще говоря, не присущие общим топологическим пространствам, например

1. *Любая топологическая группа G является однородным топологическим пространством, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f : G \to G$ такой, что $f(g) = h$.*

   Действительно, в качестве f можно взять отображение, определённое правилом $x \mapsto h \cdot g^{-1} \cdot x$. Оно непрерывно в силу непрерывности умножения и обладает непрерывным обратным $x \mapsto g \cdot h^{-1}x$.

   (Неоднородные топологические пространства: сходящаяся последовательность; любое недискретное пространство, имеющее хотя бы одну изолированную точку; отрезок.)

Таким образом, топология любой топологической группы полностью определяется окрестностями единицы в этой группе: для любой окрестности U любого элемента g топологической группы G множество $g^{-1} \cdot U$ (так же как и $U \cdot g^{-1}$) является окрестностью единицы, так что все окрестности любого $g \in G$ являются окрестностями единицы, помноженными на g (или, как говорят, сдвигами окрестностей единицы на g), и зная, например, локальную базу в единице, мы тем самым знаем и локальные базы во всех точках G, т.е. всю топологию.

Поскольку $1 \cdot 1 = 1$ и $1 = 1^{-1}$, из непрерывности умножения и взятия обратного следует, что для любой окрестности единицы U в топологической группе существуют окрестности единицы V и W такие, что $V \cdot V \subset U$ и $W^{-1} \subset U$.

2. *Если топологическая группа удовлетворяет акиоме отделимости T_0, то она удовлетворяет также и аксиомам T_1 и T_2. Кроме того, всякая топологическая группа удовлетворяет аксиомам T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Действительно, предположим, что топологическая группа G удовлетворяет аксиоме T_0. Покажем, что тогда G удовлетворяет аксиоме T_2 (а значит, и T_1). Пусть $g, h \in G$, $g \neq h$, и пусть U — окрестность одной из этих точек, не содержащая другую; допустим для определённости, что $g \in U$ и $h \notin U$.

Пусть V — окрестность единицы, для которой $V \cdot V \subset g^{-1} \cdot U$ (она существует, потому что $g^{-1} \cdot U$ — окрестность единицы). Тогда V^{-1} — тоже окрестность единицы, а $g \cdot V$ и $h \cdot V^{-1}$ — окрестности точек g и h соответственно. Покажем, что $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$.

Предположим, что это не так; тогда для некоторых $v_1, v_2 \in V$ имеем $g \cdot v_1 = h \cdot v_2^{-1}$, откуда $h = g \cdot v_1 \cdot v_2$, а значит, $h \in g \cdot V \cdot V \subset g \cdot g^{-1} U = U$ в противоречие с определением U. Следовательно, $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$. Это доказывает, что $G \in T_2$.

Ввиду доказанного утверждения в дальнейшем мы не будем уточнять, какой именно из аксиом T_0–T_2 удовлетворяет данная топологическая группа, и станем называть группу, удовлетворяющую любой из этих аксиом, просто отделимой.

Теперь докажем, что любая топологическая группа удовлетворяет аксиоме T_3. В силу однородности для этого достаточно показать, что какова бы ни была окрестность единицы U, существует окрестность единицы V, для которой $\overline{V} \subset U$. В качестве V можно взять любую окрестность единицы со свойством $V \cdot V \subset U$.

Действительно, у любой точки $g \notin U$ есть окрестность, не пересекающая V — это $g \cdot V^{-1}$ (если $g \cdot V^{-1} \cap V \neq \varnothing$, то $g \cdot v_1^{-1} = v_2$ для некоторых $v_1, v_2 \in V$, откуда $g \in V \cdot V \subset U$).

Доказательство того, что всегда $G \in T_{3\frac{1}{2}}$, несколько сложнее. Оно основано на понятии нормы и на следующем чисто алгебраическом утверждении, которое имеет исключительную важность для теории топологических групп.

Определение

Полунормой на группе G называется функция $\|\cdot\|: G \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $\|1\| = 0$,
2. $\|g\| = \|g^{-1}\|$ для всех $g \in G$ и
3. $\|g \cdot h\| \leqslant \|g\| + \|h\|$ для всех $g, h \in G$.

Из этих свойств вытекает и свойство

4. $\|g\| \geqslant 0$ для всех $g \in G$.

Лемма (исключительной важности)

Пусть G — произвольная группа и U_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность её подмножеств со свойствами

$$① \ 1 \in U_n, \qquad ② \ U_n = U_n^{-1} \quad \text{и} \quad ③ \ U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда на группе G существует полунорма $\|\cdot\|$ такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{x \in G : \|x\| < \frac{1}{2^n}\right\} \subset U_n \subset \left\{x \in G : \|x\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\right\}. \tag{$\star$}$$

Доказательство этой леммы сводится к построению монотонной системы множеств $U(\frac{m}{2^n})$ со свойствами

$$U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = U_n \qquad \text{и} \qquad U\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \cdot U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset U\Big(\frac{m+1}{2^n}\Big),$$

после чего норма определяется как

$$\|x\| = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|,$$

где

$$f(x) = \inf\Big\{\frac{m}{2^n} : x \in U(\frac{m}{2^n})\Big\}.$$

Одно из следствий важной леммы — то, что всякая топологическая группа удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$. Более того, в топологической группе точки отделяются от не содержащих их замкнутых множеств не просто какими-то непрерывными функциями, а непрерывными полунормами, т.е. функциями, хорошо согласованными с групповой структурой; иными словами, шары относительно непрерывных полунорм образуют базу окрестностей единицы. Действительно, для любой окрестности единицы U в топологической группе G легко построить, пользуясь непрерывностью операций, последовательность окрестностей единицы $U_1 \subset U, U_2, U_3, \dots$ со свойствами 1–3 из формулировки леммы. Нетрудно видеть, что полунорма, существование которой утверждается в лемме, непрерывна (это вытекает из формулы $(\star)$ и неравенства $\|g \cdot h\| \leqslant \|g\| + \|h\|$). Ясно, что она отделяет 1 от $G \setminus U$.

Пересечение H всех окрестностей единицы в любой топологической группе G является замкнутой нормальной подгруппой, потому что в силу непрерывности операций и того, что $G \in T_3$, для любой окрестности единицы U и любого $g \in G$ существуют окрестности единицы V_1, V_2, V_3 и V_4 такие, что
$V_1 \cdot V_1, V_2^{-1}, g^{-1} \cdot V_3 \cdot g, \overline{V}_4 \subset U$.
Ясно, что факторгруппа G/H с топологией факторпространства является отделимой топологической группой, и между топологическими свойствами групп G и G/H имеется прозрачная связь. Так что по существу изучение топологических групп сводится к изучению отделимых топологических групп.

3. *Всякая отделимая топологическая группа, удовлетворяющая первой аксиоме счётности, метризуема.*

Действительно, если у единицы топологической группы G имеется счётная база окрестностей $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, то неё имеется и счётная база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ со свойствами 1–3 из важной леммы. Её легко построить по индукции: надо положить $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$, а затем, считая, что окрестность U_n уже построена, найти окрестность единицы W со свойством $W \cdot W \subset U_n \cap V_{n+1}$ и положить $U_{n+1} = W \cap W^{-1}$.
Очевидно, множества $B_n = \left\{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\right\}$, где $\|\cdot\|$ — полунорма, существование которой утверждается важной леммой, тоже образуют базу окрестностей единицы, причём эта полунорма является нормой (т.е. $\|g\| \neq 0$ для $g \neq 1$), а соответствующая этой норме метрика $d(g, h) = \|g^{-1} \cdot h\|$ порождает топологию.

4. *Группы Ли*

Определение

Группа Ли — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

Другими словами, это топологическая группа G, в некоторой окрестности единицы которой (а значит, и в некоторой окрестности любой другой точки) все элементы можно представить в виде $g(\mathrm{t})$, где $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — набор вещественных параметров, причём операции умножения и взятия обратного выражаются вещественно-аналитической вектор-функцией от совокупности параметров, что можно кратко записать как $g(\mathrm{t}) \cdot g^{-1}(\mathrm{s}) = g(f(\mathrm{t}, \mathrm{s}))$, где f — вещественно-аналитическая вектор-функция.

Известно, что не на всяком топологическом многообразии можно ввести структуру гладкого многообразия: существует компактное триангулируемое многообразие размерности 10 (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^{10}$, и который допускает триангуляцию), которое не гомеоморфно никакому гладкому многообразию. С группами ситуация иная: всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пространству, допускает структуру группы Ли, и притом единственную; другими словами, для любой такой топологической группы G существуют группа Ли $\hat{G}$ и топологический изоморфизм (т.е. изоморфизм, являющийся одновременно гомеоморфизмом) между G и $\hat{G}$. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и не имела малых подгрупп (последнее условие означает, что некоторая окрестность единицы не содержит нетривиальных подгрупп). Таким образом, с точки зрения топологической алгебры группы Ли — это в точности локально компактные группы без малых подгрупп.

Приведённые примеры показывают, что наличие непрерывных групповых операций на топологическом пространстве оказывает весьма сильное влияние на топологические свойства этого пространства. Верно и обратное.

1. Недискретные отделимые групповые топологии существуют на на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются топологизируемыми. Вопрос о существовании нетопологизируемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что *всякая бесконечная группа топологизируема.* Проблема Маркова оставалась нерешённой почти сорок лет — до 1980 г., когда были построены сразу два принципиально разных примера нетопологизируемых групп, счётный и несчётный.

Счётную нетопологизируемую группу построил А.Ю. Ольшанский. Эта группа G содержит конечное множество $Z = \{1, z_1, \ldots, z_k\}$ с тем свойством, что для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существует $n_g \in \mathbb{N}$, для которого $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$, причём все числа n_g ограничены в совокупности одним числом $N \in \mathbb{N}$.

Таким образом, каждый отличный от единицы элемент g является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leqslant N$ и $j \leqslant k$.

Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G, потому что оно является прообразом одноточечного (и следовательно, замкнутого в любой T_1-топологии) множества $\{z_j\}$ при отображении $f : x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения.

Стало быть, дополнение до единицы в группе G является конечным объединением замкнутых множеств и потому замкнуто в любой групповой топологии. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ (а значит, и все остальные одноточечные множества, так как топологические группы однородны) открыто в любой отделимой групповой топологии, т.е. любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Несчётный пример построил С. Шелах. Он сконструировал свою группу G в предположении справедливости континуум-гипотезы (оно совместимо с аксиомами теории множеств). Эта группа G обладает тем замечательным свойством, что она порождается любым своим несчётным подмножеством, причём в очень сильном смысле:

$$S^{10000} = G \text{ для любого несчётного } S \subset G.$$

Кроме того, $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы G со свойством, которое называется малнормальностью или антинормальностью:

$$g^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g \cap M_\alpha = \{1\} \text{ для любого } g \in G \setminus M_\alpha,$$

причём

$$M_\alpha \subset M_\beta \text{ для } \alpha < \beta.$$

Предположим, что U — окрестность единицы в некоторой недискретной групповой топологии на группе G.

Если U счётна, то она содержится в некоторой подгруппе M_α, а значит, для любого $g \in G \setminus M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ является окрестностью единицы, будучи пересечением двух окрестностей единицы, а значит, топология дискретна, вопреки предположению. Таким образом, в недискретной групповой топологии на G счётные окрестности единицы не могут существовать.

В силу непрерывности умножения какова бы ни была окрестность единицы U, найдётся окрестность единицы V, для которой $V^{10000} \subset U$. Мы только что показали, что V должна быть несчётной; значит, $U = G$. Таким образом, всякая недискретная групповая топология на G антидискретна.

2. Всякая группа, допускающая компактную отделимую групповую топологию, вкладывается в качестве подгруппы в декартово произведение конечных групп.

Простейшие свойства топологических групп

Теорема

Пусть G — топологическая группа и $g \in G$. Тогда

1. *отображение $R_g \colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto x \cdot g$, является гомеоморфизмом;*
2. *отображение $L_g \colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto g \cdot x$, является гомеоморфизмом;*
3. *отображение $i \colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto x^{-1}$, является гомеоморфизмом.*