Теорема

Для любого метрического пространства (M, d) группа $\mathrm{Iso}(M)$ всех изометрических преобразований пространства M с топологией поточечной сходимости является топологической группой.

Доказательство. Пусть $h = g \cdot f$, $\varepsilon > 0$, $x \in M$ и $U = W(x, h, 2\varepsilon)$. Положим $y = f(x)$, $V = W(x, f, \varepsilon)$ и $W = W(y, g, \varepsilon)$. Покажем, что $W \cdot V \subset U$. Возьмём $f_1 \in V$ и $g_1 \in W$ и рассмотрим $h_1 = g_1 \cdot f_1$. Надо показать, что $d(h_1(x), h(x)) < 2\varepsilon$: $d(f_1(x), f(x)) < \varepsilon$, $d(g_1(y), g(y)) < \varepsilon$, $y = f(x)$ и g_1 — изометрия $\Longrightarrow$ $d(g_1(f_1(x)), g_1(y)) < \varepsilon$. Поскольку $g_1 \cdot f_1(x) = h_1(x)$ и $g(y) = h(x)$, имеем

$$d(h_1(x), h(x)) \leqslant d(h_1(x), g_1(y)) + d(g_1(y), h(x)) =$$
$$= f(g_1 \cdot f_1(x), g_1(y)) + d(g_1(y), g(y)) < 2\varepsilon.$$

Чтобы доказать непрерывность обратного, достаточно проверить, что $g \in W(x, f, \varepsilon) \iff g^{-1} \in W(y = f(x), f^{-1}, \varepsilon)$. Если $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$, то $d(g^{-1}(g(x)), g^{-1}(y)) < \varepsilon$, так как g^{-1} — изометрия. Поскольку $g^{-1}(g(x)) = x = f^{-1}(y)$, имеем $g^{-1} \in W(y, f^{-1}, \varepsilon)$. $\square$

Пусть G — топологическая группа, и пусть M_G — метрическое пространство всех ограниченных равномерно непрерывных (относительно левой равномерности) функций $G \to \mathbb{R}$ с метрикой равномерной сходимости, определённой формулой

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in G\}.$$

Группа $\mathrm{Iso}(M_G)$ с топологией поточечной сходимости — топологическая группа.

Если $f \in M_G$ и $a \in G$, положим $f_a(x) = f(a \cdot x)$ для $x \in G$ и $h_a(f) = f_a$. Ясно, что $f_a \in M_G$. Отображение $h_a \colon M_G \to M_G$ — изометрия. Для каждого $a \in G$ положим $\psi(a) = h_a$.

- ψ — гомоморфизм;
- ψ — изоморфизм;
- ψ непрерывно;
- ψ — гомеоморфизм группы G на подпространство $\psi(G)$ группы $\mathrm{Iso}(M_G)$.

Теорема (В.В. Успенский)

Всякая топологическая группа G топологически изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Iso}(M)$ с топологией поточечной сходимости для некоторого метрического пространства M.

Следствие

Любая топологическая группа G топологически изоморфна некоторой подгруппе H (не обязательно топологической) группы $\mathrm{Homeo}(G)$ с топологией поточечной сходимости.

Таким образом, сужение топологии поточечной сходимости пространства $\mathrm{Homeo}(G)$ на подпространство-подгруппу H оказывается групповой топологией, хотя на всём пространстве $\mathrm{Homeo}(G)$ эта топология может не быть групповой (например, топология поточечной сходимости на группе $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость с обычной топологией, не групповая).