Метрические пространства

Определение

Метрикой на множестве X называется функция $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ для любых $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Множество X с метрикой d называется метрическим пространством и обозначается (X, d) или просто X. Точками метрического пространства считаются точки множества X. Значение $d(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y в метрике d или в метрическом пространстве (X, d). Расстояние между непустыми множествами $A, B \subset X$ определяется формулой $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Вместо $d(\{x\}, A)$ пишут $d(x, A)$.

Из определения метрики вытекает, что $d(x, y) > 0$ для любых различных $x, y \in X$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки x, или открытым шаром радиуса ε с центром в точке x, а множество

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \leqslant \varepsilon\}$$

— замкнутым шаром радиуса ε с центром в x.

Говорят, что множество $U \subset X$ открыто, если для любого $x \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Всякое множество $F \subset X$, для которого $X \setminus F$ открыто, называется замкнутым.

Иначе, множество U открыто, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε-окрестность этой точки, и F замкнуто, если у любой не принадлежащей F точки найдётся ε-окрестность, не пересекающая F.

В силу неравенства треугольника все открытые шары $B_d(x, \varepsilon)$ действительно открыты: если $y \in B_d(x, \varepsilon)$, то $d(y, x) < \varepsilon$, а значит, найдётся $\delta > 0$, для которого $d(y, x) < \varepsilon - \delta$; для любой точки $z \in B_d(y, \delta)$ по неравенству треугольника имеем $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon$, а это означает, что $B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Очевидно также, что все замкнутые шары $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$ замкнуты.

Итак, открытые множества — это всевозможные объединения множеств вида $B_d(x, \varepsilon)$ (с разными x и ε). Иными словами, множество $U \subset X$ открыто $\iff$ $U = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in A\}$, где A — любое подмножество X и ε_x, $x \in A$, — любые положительные числа.

Непрерывность отображений метрических пространств, сходимость последовательности в метрическом пространстве и т.п. определяются точно так же, как и в случае числовых функций — например, отображение f непрерывно в точке x, если для любой ε-окрестности U точки $f(x)$ найдётся δ-окрестность V точки x, для которой $f(V) \subset U$.

Топологическое пространство

Определение (Хаусдорф)

Пусть X — множество и каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство $\mathscr{N}(x)$ подмножеств X так, что выполнены следующие условия-аксиомы:

1. любое множество $N \in \mathscr{N}(x)$ содержит точку x;
2. если $N, M \in \mathscr{N}(x)$, то $N \cap M \in \mathscr{N}(x)$;
3. $\forall\, N \in \mathscr{N}(x)$ существует $U \in \mathscr{N}(x)$ с тем свойством, что $U \subset N$ и $\forall\, y \in U$ $\exists\, M \in \mathscr{U}(y)$ такое, что $M \subset U$;
4. если $N \in \mathscr{N}(x)$ и $N \subset M \subset X$, то $M \in \mathscr{N}(x)$.

Элементы семейства $\mathscr{N}(x)$ называются окрестностями точки x, а семейство семейств $\{\mathscr{N}(x)\}_{x \in X}$ — системой окрестностей. Множество X вместе с заданной на нём системой окрестностей называется топологическим пространством; точками топологического пространства считаются точки множества X.
Подмножество U топологического пространства X называется открытым, если у любой точки $x \in U$ имеется окрестность $N \in \mathscr{N}(x)$, для которой $N \subset U$.
Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто.

Условие 3 в определении Хаусдорфа говорит, что любая окрестность N любой точки x содержит открытую (т.е. являющуюся открытым множеством) окрестность U этой же точки x.

Определение

Пусть X — множество и каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство $\mathscr{U}(x)$ подмножеств X так, что выполнены следующие условия-аксиомы:

1. любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ содержит точку x;
2. для любых $U, V \in \mathscr{U}(x)$ найдётся $W \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $W \subset U \cap V$;
3. для любого множества $U \in \mathscr{U}(x)$ и любой точки $y \in U$ найдётся $V \in \mathscr{U}(y)$ такое, что $V \subset U$.

Семейство $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in X}$ называется системой открытых окрестностей. Множество X вместе с заданной на нём системой открытых окрестностей называется топологическим пространством; точками топологического пространства считаются точки множества X.

Подмножество U топологического пространства X называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $V \subset U$. Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто. Любое открытое множество U, содержащее точку $x \in X$, называется открытой окрестностью этой точки.

Условие 3 в этом определении равносильно тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$, $x \in X$, открыто, а условия 1 и 3 вместе — тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ является открытой окрестностью точки x.

Следующее определение (в терминах открытых множеств), как легко видеть, равносильно определению Хаусдорфа (в терминах окрестностей):

Определение топологического пространства

Топологическое пространство — это множество X вместе с семейством $\mathscr{T}$ его подмножеств, удовлетворяющим следующим условиям-аксиомам:

1. $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;
2. если $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}$, то $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{T}$ (иными словами, если A — произвольное индексное множество и для всякого $\alpha \in A$ $U_\alpha \in \mathscr{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathscr{T}$);
3. если $U, V \in \mathscr{T}$, то $U \cap V \in \mathscr{T}$.

Семейство $\mathscr{T}$ называется топологией на множестве X, его элементы — открытыми множествами, а их дополнения — замкнутыми множествами. Множества, являющиеся одновременно и открытыми, и замкнутыми, называются открыто-замкнутыми.

Для топологического пространства (множества X с топологией $\mathscr{T}$) используется обозначение $(X, \mathscr{T})$ или X; его точками считаются элементы множества X.

Множество $U \subset X$ называется открытой окрестностью точки $x \in X$, если $U \ni x$ и $U \in \mathscr{T}$. Любое подмножество X, содержащее открытую окрестность точки x, называется окрестностью точки x, а любое подмножество вида $N \setminus \{x\}$, где N — окрестность точки x, называется проколотой окрестностью x.

Окрестности определены и для подмножеств X: открытой окрестностью множества $A \subset X$ называется любое открытое подмножество X, содержащее A, а окрестностью множества A называется любое подмножество X, содержащее некоторую открытую окрестность множества A.

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется базой топологии $\mathscr{T}$, или базой топологического пространства X, если любое открытое множество U в X является объединением элементов $\mathscr{B}$.

Очевидно, семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ является базой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X тогда и только тогда когда для каждой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся $V \in \mathscr{B}$, удовлетворяющее условиям $x \in V \subset U$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда

1. $\bigcup \mathscr{B} = X$ *и*
2. *для любых $U, V \in \mathscr{B}$ и любой точки $x \in U \cap V$ найдётся $W \in \mathscr{B}$ со свойством $x \in W \subset U \cap V$, т.е. пересечение любых двух элементов $\mathscr{B}$ является объединением некоторого семейства элементов $\mathscr{B}$.*

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется предбазой топологии $\mathscr{T}$, или предбазой топологического пространства X, если семейство всех конечных пересечений элементов $\mathscr{B}$ является базой топологии $\mathscr{T}$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathscr{B} = X$.

Определение

Семейство $\mathscr{B}(x)$ (открытых) окрестностей точки x топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ называется (открытой) локальной базой топологии $\mathscr{T}$ в точке x, или базой (открытых) окрестностей точки x в пространстве $(X, \mathscr{T})$, если любая окрестность точки x содержит окрестность из $\mathscr{B}(x)$.

Всякая предбаза топологии $\mathscr{T}$ на множестве X однозначно определяет некоторую базу той же топологии, а значит, и саму топологию. Семейство локальных баз топологии во всех точках $x \in X$ образует систему окрестностей и тоже однозначно определяет топологию. Однако одна и та же топология может иметь (и почти всегда имеет) много разных баз и локальных баз. Если семейство $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X, то любое семейство $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$, тоже является базой $\mathscr{T}$.

Определение

Наименьшая мощность локальной базы топологии топологического пространства X в точке $x \in X$ называется характером X в точке x и обозначается $\chi(x, X)$:

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}(x)| : \mathscr{B}(x) \text{ — локальная база топологии } X \text{ в точке } x\}.$$

Супремум кардиналов $\chi(x, X)$ по всем точкам $x \in X$ называется характером пространства X и обозначается $\chi(X)$:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Если характер пространства X не более чем счётен, т.е. X имеет не более чем счётную локальную базу в каждой точке, то говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности.

Определение

Наименьшая мощность базы топологии топологического пространства X называется **весом** этого пространства и обозначается $w(X)$:

$$w(X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ — база топологии } X\}.$$

Если вес пространства X не более чем счётен, то говорят, что X удовлетворяет **второй аксиоме счётности**.

Для любого топологического пространства X имеет место неравенство

$$\chi(X) \leqslant w(X),$$

поскольку любая база любой топологии на множестве X содержит открытую локальную базу той же топологии в каждой точке $x \in X$.

Определение

Пусть X — метрическое пространство. Семейство $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$, где $\mathscr{B}(x) = \{B_d(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ — множество всех ε-окрестностей точки x метрического пространства (X, d), образует систему открытых окрестностей, а значит, порождает некоторую топологию $\mathscr{T}_d$, называемую метрической топологией. Семейство $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ является базой этой топологии.

Если (X, d) — любое метрическое пространство и $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой d, то характер пространства $(X, \mathscr{T}_d)$ всегда не более чем счётен: любая окрестность любой точки $x \in X$ содержит $\frac{1}{n}$-окрестность x для некоторого n; значит, семейство $\frac{1}{n}$-окрестностей x для всех $n \in \mathbb{N}$ образует локальную базу топологии $\mathscr{T}_d$ в точке x, а это семейство не более чем счётно.

Разные метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X могут порождать одну и ту же топологию $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$ на X.

Определение

Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X эквивалентны, если они порождают одну и ту же метрическую топологию, т.е. если $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$.

Примеры метрических пространств

- Произвольное множество X с дискретной метрикой $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, которая определяется так:
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$
Эта метрика порождает дискретную топологию $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, в которой все подмножества X открыты (и замкнуты).
- Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d\colon (x,y) \mapsto |x-y|$.
- На любом нормированном векторном пространстве V с нормой $\|\cdot\|$ стандартным образом определяется метрика $d(x,y) = \|x-y\|$. Таким образом, на векторном пространстве со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ возникает метрика $d(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ — она порождена нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

В частности, стандартное скалярное произведение на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, определённое правилом $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{y} = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$, задаёт евклидову норму $|\mathrm{x}|_n = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} x_i^2}$ и евклидову метрику $d_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} (x_i - y_i)^2}$. Топологию, порождённую этой метрикой на $\mathbb{R}^n$, мы будем называть евклидовой топологией.

Новые метрики можно строить из уже имеющихся. Если $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — метрика на множестве X, то для любого $\lambda > 0$ отображения $\lambda \cdot d\colon (x,y) \mapsto \lambda \cdot d(x,y)$ и $\min(d, \boldsymbol{\lambda})\colon (x,y) \mapsto \min\{d(x,y), \lambda\}$ (здесь $\boldsymbol{\lambda}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная λ) тоже являются метриками на X, и они порождают ту же топологию. Вообще, если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, то $f \circ d\colon (x,y) \to f(d(x,y))$ — метрика, эквивалентная d. Кроме того, сумма

$$d_1 + d_2\colon (x,y) \mapsto d_1(x,y) + d_2(x,y)$$

и максимум

$$\max(d_1, d_2)\colon (x,y) \mapsto \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

любых двух метрик d_1 и d_2 на одном и том же множестве тоже являются метриками.

Примеры топологических пространств

Определение

Топологическое пространство **метризуемо**, если его топология метризуема, т.е. является метрической топологией, порождённой некоторой метрикой.

Предложение

Всякое метризуемое топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.

- На пустом или одноточечном множестве X существует ровно одна топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$, но на всяком непустом неодноточечном X есть по меньшей мере две разные топологии: $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ и $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$. Топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ называется антидискретной, и она никогда не метризуема для непустых неодноточечных X. Топология $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ называется дискретной, и она порождена дискретной метрикой.
- Всякий линейный порядок $\leqslant$ на множестве X порождает порядковую, или интервальную, топологию на X; её предбазу составляют все открытые лучи $\{x : x < a\}$ и $\{x : a < x\}$, где $a \in X$, а базу — все открытые интервалы.

- Прямая/стрелка Зоргенфрея S. Как множество прямая Зоргенфрея — это вещественная прямая $\mathbb{R}$. Её топология порождена базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Подпространство $[0, 1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется стрелкой Зоргенфрея, а топология прямой Зоргенфрея называется топологией стрелки. Прямая Зоргенфрея гомеоморфна стрелке Зоргенфрея (т.е. неотличима от неё с точки зрения топологии).

Подпространства

Определение

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $Y \subset X$. Тогда сужение $d_Y = d|_{Y\times Y}$ метрики $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ на $Y \times Y$ является метрикой на множестве Y. Метрическое пространство (Y, d_Y) называется подпространством метрического пространства (X, d), а метрика d_Y называется индуцированной, или относительной, метрикой.

Предложение

Пусть (X, d) — метрическое пространство и (Y, d_Y) — его подпространство. Множество $U \subset Y$ открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y) тогда и только тогда, когда $U = V \cap Y$ для некоторого открытого в (X, d_X) множества V.

Доказательство. Множество $U \subset Y$ открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y) $\iff$ для любой точки $y \in U$ найдётся $\varepsilon_y > 0$ такое, что её ε_y-окрестность $B_{d_Y}(y, \varepsilon_y)$ содержится в U, т.е. $U = \bigcup\{B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) : y \in U\}$. С другой стороны, ясно, что ε-окрестностью любой точки y в (Y, d_Y) является пересечение ε-окрестности этой точки в (X, d) с Y, т.е. $B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) = B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y$. Значит,

$$U = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y : y \in U\} = Y \cap \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in U\},$$

так что U является пересечением с Y множества $V = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in Y\}$, которое открыто в (X, d).

Обратно, множество V открыто в (X, d) $\iff$ $V = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in V\}$ для некоторых $\varepsilon_x > 0$. Ясно, что $V \cap Y \subset \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) : y \in V \cap Y\}$. Следовательно,

$$V \cap Y = \bigcup\{B_d(y, \varepsilon_y) \cap Y : y \in V \cap Y\} = \bigcup\{B_{d_Y}(y, \varepsilon_y) : y \in V \cap Y\},$$

а это множество открыто в метрическом пространстве (Y, d_Y). $\square$

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство и $Y \subset X$. Тогда семейство $\mathscr{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{T}\}$ является топологией на множестве Y. Топологическое пространство $(Y, \mathscr{T}_Y)$ называется подпространством топологического пространства $(X, \mathscr{T})$, а топология $\mathscr{T}_Y$ называется индуцированной, или относительной, топологией.

Таким образом, если X — топологическое пространство и $Y \subset X$, то множество $A \subset Y$ открыто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = U \cap Y$ для некоторого открытого в X множества $U \subset X$, и $A \subset Y$ замкнуто в индуцированной топологии тогда и только тогда, когда $A = F \cap Y$ для некоторого замкнутого в X множества $F \subset X$.

В силу доказанного предложения о подпространствах метрических пространств если (X, d) — метрическое пространство и (Y, d_Y) — его подпространство с индуцированной метрикой, то топологическое пространство $(Y, \mathscr{T}_{d_Y})$ с метрической топологией является подпространством пространства $(X, \mathscr{T}_d)$.

Наследственные свойства

Пусть $\mathscr{P}$ — свойство топологических пространств и $\star$ — какое-нибудь условие на подпространства топологических пространств.

Определение

Говорят, что свойство $\mathscr{P}$ топологических пространств **наследуется подпространствами, удовлетворяющими условию** $\star$, если все удовлетворяющие условию $\star$ подпространства любого пространства со свойством $\mathscr{P}$ тоже обладают этим свойством. Свойство топологического пространства называется **наследственным**, если оно наследуется всеми подпространствами.

Предложение

Метризуемость, свойство удовлетворять первой аксиоме счётности и свойство удовлетворять второй аксиоме счётности — наследственные свойства.

Лемма

Пусть X — топологическое пространство и Y — его подпространство.

1. *Если $\mathscr{B}$ — база топологии X, то семейство $\mathscr{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{B}\}$ — база топологии Y.*
2. *Если $\mathscr{B}(y)$ — (открытая) локальная база топологии X в точке $y \in Y$, то семейство $\mathscr{B}_Y(y) = \{U \cap Y : U \in \mathscr{B}(y)\}$ — (открытая) локальная база топологии Y в точке y.*

Доказательство. 1. По определению топологии подпространства все элементы семейства $\mathscr{B}_Y$ открыты в Y и для любого открытого в Y множества $U \subset Y$ существует открытое в X множество V такое, что $U = V \cap Y$, а по определению базы $V = \bigcup\{W \in \mathscr{B} : W \subset V\}$, откуда

$$U = \bigcup\{W \cap Y : W \in \mathscr{B},\ W \subset V\} = \bigcup\{W \in \mathscr{B}_Y : W \subset U\};$$

значит, $\mathscr{B}_Y$ является базой топологии Y.

2. По определению окрестности всякая окрестность N любой точки $y \in Y$ в пространстве Y содержит некоторую открытую в Y окрестность U этой точки, а по определению топологии подпространства $U = V \cap Y$ для некоторого открытого в X множества V (которое является открытой окрестностью точки y в X). По определению (открытой) локальной базы существует (открытая) окрестность W точки y в X, которая содержится в V и принадлежит $\mathscr{B}(y)$. Имеем $W \cap Y \in \mathscr{B}_Y$; ясно, что $W \cap Y$ — (открытая) окрестность y в Y. $\square$

Сравнение топологий

Определение

Топология $\mathscr{T}_1$ на множестве X сильнее, или тоньше, топологии $\mathscr{T}_2$ на том же множестве, если $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$; в этом случае говорят также, что $\mathscr{T}_2$ слабее, или грубее, топологии $\mathscr{T}_1$. Топология $\mathscr{T}_1$ строго сильнее топологии $\mathscr{T}_2$, если $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$ и $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$.

Если топология $\mathscr{T}_1$ на множестве X сильнее топологии $\mathscr{T}_2$ на X, а топология $\mathscr{T}_2$ сильнее топологии $\mathscr{T}_1$, то топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ совпадают. Кроме того, если топология $\mathscr{T}_2$ сильнее топологии $\mathscr{T}_1$, а топология $\mathscr{T}_3$ на X сильнее топологии $\mathscr{T}_2$, то $\mathscr{T}_3$ сильнее $\mathscr{T}_1$. Таким образом, отношение «быть сильнее» — частичный порядок на семействе всех топологий на множестве X.

На каждом множестве X есть самая слабая (антидискретная) и самая сильная (дискретная) топология. Однако если X содержит хотя бы две точки, то на нём есть и несравнимые топологии.

Типы точек по отношению к множеству

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Точка x называется точкой прикосновения множества A, если всякая её окрестность пересекает A. Точка x называется предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекает $A \setminus \{x\}$. Точка $x \in A$ изолирована в A, если у неё есть окрестность, пересечение которой с A есть $\{x\}$. Если некоторая окрестность точки x целиком содержится в A, то x называется внутренней точкой множества A. Предельные точки множества A, не являющиеся внутренними, называются граничными точками A. Точка $x \in X$ называется точкой накопления множества A, если пересечение всякой её окрестности с A бесконечно.

Для топологических пространств, в которых все одноточечные множества замкнуты, понятия точки накопления и предельной точки совпадают, поэтому в теории метрических пространств термин «точка накопления» не используется.

Определение

Множество всех точек прикосновения множества A в топологическом пространстве X называется замыканием множества A и обозначается через $\overline{A}$ (встречаются также обозначения $\mathrm{cl}(A)$, $[A]$ и др.). Если нужно указать, в каком пространстве берётся замыкание, используется обозначение $\overline{A}^X$ ($\mathrm{cl}_X(A)$, $[A]_X$ и др.).

Множество всех предельных точек множества A в пространстве X называется производным множеством множества A и обозначается A' или A^{d}.

Множество всех внутренних точек множества A в пространстве X называется внутренностью множества A и обозначается $\operatorname{Int} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся внутренность, используется обозначение $\operatorname{Int}_X A$.

Множество всех граничных точек множества A в пространстве X называется границей множества A и обозначается $\operatorname{Fr} A$ или $\operatorname{Bd} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся граница, используется обозначение $\operatorname{Fr}_X A$ или $\operatorname{Bd}_X A$.

Все точки любого множества $A \subset X$ являются точками прикосновения этого множества, и любая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной, причём все изолированные точки принадлежат A. Следовательно, $\overline{A} = A \cup A'$. Кроме того, по определению $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Положив $A = X$, мы получим определение перечисленных выше типов точек в само́м топологическом пространстве X, а не по отношению к некоторому его подмножеству. Однако при этом некоторые типы становятся тривиальными. Так, все точки любого пространства X являются точками прикосновения X, и все они внутренние, так что $\overline{X}^X = \operatorname{Int}_X X = X$, а множество граничных точек всегда пусто. Однако понятия изолированных и предельных точек (а также точек накопления) топологического пространства вполне осмыслены и полезны.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$, другими словами, тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Если A замкнуто, то $X \setminus A$ открыто, так что у любой точки $x \notin A$ есть окрестность $X \setminus A$, не пересекающая A.
Обратно, если A не замкнуто, то $X \setminus A$ не открыто; значит, у некоторой точки $x \notin A$ нет окрестности, целиком лежащей в $X \setminus A$, а это означает, что любая окрестность x пересекает A, т.е. x — предельная точка множества A. $\square$

Следствие

Замыкание $\overline{A}$ множества A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A, т.е. пересечение всех содержащих A замкнутых множеств.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{Int} A$, другими словами, тогда и только тогда, когда все точки A внутренние.

Следствие

Внутренность $\operatorname{Int} A$ множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A, т.е. объединение всех содержащихся в A открытых множеств.

Двойственность между операторами внутренности и замыкания: Для $A \subset X$

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Действительно, для любого $A \subset X$ множество $X \setminus \operatorname{Int} A$ замкнуто и содержит $X \setminus A$, поэтому $X \setminus \operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$, т.е. $\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$. С другой стороны, множество $X \setminus \overline{X \setminus A}$ открыто и содержится в $A = X \setminus (X \setminus A)$, поэтому $\operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$.

Замыкание и внутренность в подпространствах: Для $A \subset Y \subset X$

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y, \quad \operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}_X (X \setminus Y \cup A).$$

Плотные множества

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Множество $A \subset Y$ плотно в Y, если $\overline{A} \supset Y$. Множество, плотное во всём пространстве X, называется просто плотным, или всюду плотным. Множество $Y \subset X$ нигде не плотно, если его замыкание $\overline{Y}$ не содержит никакого непустого открытого множества.

- если Y плотно в X и $Y \subset Z \subset X$, то Z тоже плотно в X;
- если Y нигде не плотно и $Z \subset Y$, то Z тоже нигде не плотно;
- если $Y \subset X$ плотно в X, а Z нигде не плотно, то $Y \backslash Z$ плотно в X;
- если $Z \subset Y \subset X$, Z плотно в Y и Y плотно в X, то Z плотно в X.

Множество $Y \subset X$ нигде не плотно в $X \iff X \setminus Y$ содержит *открытое* плотное множество.

Предложение

Если X — пространство, U — открытое подмножество X и Y — плотное подмножество X, то

$$\overline{U} = \overline{U \cap Y}.$$

Доказательство. Если x — предельная точка множества U, то для любой открытой окрестности V точки x имеем $V \cap U \neq \varnothing$.
Поскольку Y плотно в X, имеем также $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$.
Значит, x является предельной точкой множества $U \cap Y$, откуда $\overline{U} \subset \overline{U \cap Y}$.
Обратное включение в доказательстве не нуждается. □

Сепарабельность

Определение

Наименьшая мощность плотного подмножества топологического пространства X называется плотностью этого пространства и обозначается $d(X)$:

$$d(X) = \min\{|A| : A \subset X, \overline{A} = X\}.$$

Если плотность пространства X не более чем счётна, т.е. X содержит какое-нибудь не более чем счётное плотное подмножество, то говорят, что X сепарабельно.

В отличие от метризуемости и свойства удовлетворять первой или второй аксиоме счётности сепарабельность — ненаследственное свойство. Однако открытыми подпространствами она наследуется.

Теорема

Всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Доказательство. Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и пусть Y — плотное множество в X. Тогда семейство

$$\mathscr{B} = \left\{B_d\left(y, \frac{1}{n}\right) : y \in Y,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

— база топологии X. Действительно, если U — открытое множество в X и $x \in U$, то $B_d(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и для любого натурального $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ имеем $B_d(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Выберем любую точку $y \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \cap Y$ (она существует, так как Y плотно в X). В силу неравенства треугольника $x \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \subset B_d(y, \frac{1}{n}) \subset U$.

Мы показали, что $\mathscr{B}$ — база топологии X. Осталось заметить, что если множество Y счётно, то семейство $\mathscr{B}$ тоже счётно. $\square$

Теорема

Любое пространство со второй аксиомой счётности сепарабельно.

Доказательство. Достаточно взять любую не более чем счётную базу и выбрать по точке в каждом её непустом элементе. Множество всех выбранных точек плотно и не более чем счётно. □

Следствие

Любое сепарабельное метризуемое пространство наследственно сепарабельно.

Доказательство. Свойство удовлетворять второй аксиоме счётности наследственно. □

Сначала рассмотрим непрерывность отображений метрических пространств.

Определение

Отображение f метрического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, ρ) называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in B_d(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$. Отображение $f \colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно, если оно непрерывно во всех точках пространства X.

Теорема

Для любого метрического пространства (X, d) и любого непустого множества $A \subset X$ функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая правилом $f(x) = d(x, A)$, $x \in X$, непрерывна.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y) \qquad \text{для всех } x, y \in X; \tag{$\star$}$$

тогда в качестве δ из определения непрерывности можно будет взять ε.

Напомним, что $d(x, A) = \inf\{d(x, z) : z \in A\}$. Для любой точки $z \in A$ имеем $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Переходя к инфимуму по $z \in A$, получаем $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Меняя местами x и y, видим, что $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$. Таким образом,

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y) \qquad \text{и} \qquad d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y),$$

откуда вытекает неравенство $(\star)$, а с ним и теорема. $\square$

Предложение

Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U)$ всякого множества $U \subset Y$, открытого в Y, открыт в X.

Доказательство

Необходимость. Надо показать, что множество $f^{-1}(U)$ открыто, т.е. что каждая точка $x_0 \in f^{-1}(U)$ содержится в $f^{-1}(U)$ вместе со своей окрестностью. Пусть $x_0 \in f^{-1}(U)$. Множество U открыто в Y и $f(x_0) \in U \implies \exists \varepsilon > 0$, для которого $B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Отображение f непрерывно в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, для которого $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$, т.е. $B_d(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$, что и требовалось.

Достаточность. Для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$ открыто в Y. Значит, $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$ открыто в X. Поскольку точка x_0 принадлежит множеству $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$, некоторая её окрестность $B_d(x_0, \delta)$ содержится в этом множестве $\implies f$ непрерывно в x_0. Из произвольности выбора x_0 следует непрерывность f. $\square$

Определение

Отображение $f: X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если прообраз при этом отображении любого множества, открытого в Y, открыт в X.
Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x_0)$ в пространстве Y является окрестностью точки x_0 в пространстве X, т.е. содержит открытую окрестность точки x_0.

Если для топологических пространств X и Y существует непрерывная сюръекция $f: X \to Y$, то говорят, что Y является непрерывным образом пространства X.

Из доказанного выше предложения видно, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение топологических пространств относительно порождённых метриками топологий.

Теорема

Для отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств следующие свойства равносильны:

1. *f непрерывно, т.е. прообраз при f любого открытого множества открыт;*
2. *прообраз при f любого замкнутого множества замкнут;*
3. *отображение f непрерывно в каждой точке пространства X;*
4. *образ при f замыкания любого множества $A \subset X$ в X содержится в замыкании образа $f(A)$ этого множества в Y;*
5. *замыкание в X прообраза $f^{-1}(B)$ любого множества $B \subset Y$ содержится в прообразе замыкания множества B в Y.*

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2 очевидно, 1 $\Leftrightarrow$ 3 доказывается как предложение выше.
2$\Rightarrow$4: Пусть $A \subset X$. В силу 2 множество $f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$ замкнуто, и оно содержит A; значит, $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^Y\right)$.
4$\Rightarrow$5 следует из того, что $B = f(f^{-1}(B))$, так что $\overline{B} \supset f(\overline{f^{-1}(B)})$.
5$\Rightarrow$2: если $F \subset Y$ замкнуто в Y, то в силу 5 имеем $\overline{f^{-1}(F)}^X \subset f^{-1}(F)$, а значит, $\overline{f^{-1}(F)}^X = f^{-1}(F)$, т.е. множество $f^{-1}(F)$ замкнуто. $\square$

Очень полезное утверждение

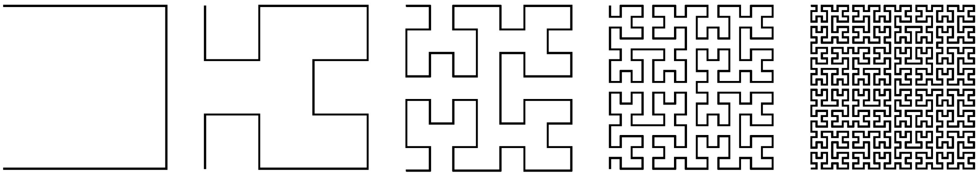
а) Если $f: X \to Y$ — отображение топологических пространств и существует предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты в X, то f непрерывно.

б) Если $f: X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ и существует локальная база топологии Y в точке $f(x)$, прообразы всех элементов которой являются окрестностями точки x в X (не обязательно открытыми), то f непрерывно в точке x.

Доказательство. а) Пусть $\mathscr{B}$ — предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты, и пусть $\mathscr{U} = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n : n \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}\}$ — порождённая ею база. Поскольку $f^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_n)$ и конечные пересечения открытых множеств открыты, заключаем, что прообразы всех элементов $\mathscr{U}$ открыты, а из того, что любое открытое множество в Y есть объединение элементов базы и прообраз объединения любого семейства множеств всегда равен объединению прообразов элементов этого семейства, следует, что прообраз любого открытого подмножества Y открыт, т.е. f непрерывно.
б) аналогично. $\square$

Примеры непрерывных отображений

- Любое отображение дискретного пространства куда угодно непрерывно.
- Отображение $f: X \to Y$ антидискретного пространства X в пространство Y непрерывно $\iff$ $f(X)$ с топологией, индуцированной из Y, антидискретно.
- Пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — две разные топологии на одном и том же множестве X. Тождественное отображение $\mathrm{id}_X : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ (т.е. топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ сравнимы и $\mathscr{T}_1$ сильнее).
- Существует непрерывное сюръективное отображение обычного отрезка $[0, 1]$ на квадрат. Такие отображения называются кривыми, заполняющими квадрат, или кривыми Пеано. Гильберт предложил такой вариант построения этого отображения:



- Простая проверка доказывает непрерывность следующих отображений (относительно обычной топологии на $\mathbb{R}$ и евклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$):

$$
\begin{aligned}
+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x+y;\\
-\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x-y;\\
\times\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x\cdot y;\\
/ \colon \widetilde{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x/y\\
&\qquad (\text{здесь } \widetilde{\mathbb{R}^2} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\});\\
\max\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto \max\{x,y\};\\
\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto \min\{x,y\};\\
\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto x;\\
\pi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \mapsto y;\\
|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto |x|.
\end{aligned}
$$

Гомеоморфизмы

Определение

Гомеоморфизмом, или топологическим отображением, между топологическими пространствами X и Y называется непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ с тем свойством, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ тоже непрерывно. Говорят, что пространства X и Y гомеоморфны, и пишут $X \cong Y$, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$. Топологические свойства, или топологические инварианты, — это те свойства топологических пространств, которые сохраняются гомеоморфизмами. Другими словами, $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, если каковы бы ни были гомеоморфные топологические пространства X и Y, X обладает свойством $\mathscr{P}$ $\iff$ Y обладает свойством $\mathscr{P}$.

Когда пространство X гомеоморфно некоторому подпространству Z пространства Y, говорят, что X гомеоморфно вложено, или просто вложено, или вкладывается, в пространство Y, а гомеоморфизм между X и Z называется топологическим вложением, или просто вложением.

Отношение $\cong$ («быть гомеоморфными») является отношением эквивалентности на классе топологических пространств.

Определение

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная топология произведения — она порождена базой

$$\mathscr{B} = \{U \times V : U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y\}.$$

Топологическим произведением, или просто произведением, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Аксиомы отделимости

T_0: *Каковы бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Аксиома T_0 равносильна такому условию:

- если $x \neq y$, то либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$.

T_1: *Каковы бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Равносильные условия таковы:

- Все одноточечные (значит, и конечные) множества замкнуты.

Действительно, $T_1 \iff x \notin \overline{\{y\}}$ и $y \notin \overline{\{x\}}$ для любых $x \neq y \iff \overline{\{x\}} \cap \{y : y \neq x\} = \varnothing$ для любой точки x, т.е. $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

- Все предельные точки любого множества являются точками накопления.

Действительно, если $x \neq y$ и $x \in \overline{\{y\}}$, то x — предельная точка множества $\{y\}$, но не точка его накопления. Обратно, если в T_1-пространстве точка x — не точка накопления множества A, то у x есть окрестность U, для которой $F = U \cap A$ конечно и потому замкнуто. Значит, $U \setminus F$ — не пересекающаяся с $A \setminus \{x\}$ окрестность точки x.

- Пересечение всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Это условие нарушается тогда и только тогда, когда существуют разные точки x и y такие, что y принадлежит любой окрестности точки x, т.е. тогда и только тогда, когда нарушается аксиома T_1.

T_2: *Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.*

Равносильное условие:

- пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Действительно, точка y принадлежит замыканию некоторого множества U, если любая окрестность y пересекается с U, поэтому то, что $y \in \bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность точки $x\}$, означает, что любая окрестность точки y пересекается с любой окрестностью точки x.

Поскольку каждая окрестность всякой точки содержит окрестность из любой локальной базы топологии в этой точке, аксиома T_2 равносильна и такому условию:

- для любой точки x и любой локальной базы $\mathscr{B}(x)$ в этой точке $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathscr{B}(x)\} = \{x\}$.

T_3: *У любой точки и любого не содержащего её замкнутого множества есть непересекающиеся окрестности.*

Эта аксиома равносильна такому условию (очень часто за аксиому T_3 принимают именно это условие):

- для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$.

Действительно, рассмотрим открытую окрестность U точки x в топологическом пространстве X, удовлетворяющем аксиоме T_3, и её дополнение $F = X \setminus U$ (которое является замкнутым множеством). Пусть V_x и V_F — непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно; поскольку любая окрестность содержит открытую, можно считать, что V_x и V_F открыты. Тогда $X \setminus V_F$ замкнуто, и $V_x \subset X \setminus V_F$. Значит, $\overline{V_x} \subset X \setminus V_F \subset X \setminus F = U$. Обратно, пусть F — замкнутое множество в топологическом пространстве X, удовлетворяющем сформулированному выше условию, и пусть $x \notin F$. Тогда $U = X \setminus F$ — открытая окрестность точки x, и по предположению существует окрестность V той же точки со свойством $\overline{V} \subset U$. Ясно, что $W = X \setminus \overline{V}$ — открытая окрестность множества F и $V \cap W = \varnothing$.

T_4: *У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся (открытые) окрестности.*

Равносильные условия:

- Для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F, что $\overline{V} \subset U$.

Доказательство равносильности этого условия аксиоме T_4 дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для аксиомы T_3.

- Если F и G — любые непересекающиеся замкнутые множества, то у F найдётся окрестность V такая, что G содержится в дополнении её замыкания.

Чтобы увидеть, что это условие равносильно первому, достаточно положить U равным дополнению G.

В этот список не включена ещё одна важнейшая аксиома отделимости, $T_{3\frac{1}{2}}$; её мы обсудим позже.

Определение

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называются хаусдорфовыми.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются регулярными.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4, называются нормальными.

В тех случаях, когда два множества (или точки) имеют непересекающиеся окрестности, говорят, что эти множества отделены окрестностями. Например, аксиома T_4 утверждает, что любые непересекающиеся замкнутые множества отделены окрестностями.

Класс всех топологических пространств, удовлетворяющих данной аксиоме отделимости, обозначается тем же символом, что и сама аксиома, так что запись $X \in T_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$, означает, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_i. Вместо «топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_i», часто пишут «T_i-пространство».

Теорема

Пусть $f, g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ точек их совпадения замкнуто в X.

Доказательство. Мы покажем, что множество $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ открыто в X.

Для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \neq g(x)$; поскольку Y хаусдорфово, существуют открытые в Y множества U и V такие, что $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Множество $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ открыто в x (так как f и g непрерывны), содержит точку x и содержится в A.

Мы показали, что каждая точка $x \in A$ содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью W; значит, A открыто. □

Следствие

Множество $\mathrm{Fix}\, f = \{x \in X : f(x) = x\}$ *неподвижных точек любого отображения* $f\colon X \to X$ *хаусдорфова пространства* X *в себя замкнуто в* X.

Доказательство. Достаточно применить теорему к отображениям f и $g = \mathrm{id}_X$. $\square$

Следствие

Если $f, g\colon X \to Y$ *— непрерывные отображения произвольного топологического пространства* X *в хаусдорфово пространство* Y, $A \subset X$, $\overline{A} = X$ *и* $f(a) = g(a)$ *для всех* $a \in A$, *то* $f = g$, *т.е.* $f(x) = g(x)$ *для всех* $x \in X$.

В частности, любые непрерывные функции на топологическом пространстве, совпадающие на плотном подмножестве этого пространства, совпадают и на всём пространстве.

Хорошо известна следующая теорема (она по традиции называется леммой):

Лемма Урысона

Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в T_4-пространстве X существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

Говорят, что непересекающиеся множества A и B в топологическом пространстве X функционально отделимы, если существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$. Ясно, что это условие равносильно существованию непрерывной функции $g\colon X \to \mathbb{R}$, принимающей разные постоянные значения на множествах A и B: если $g(A) \equiv a$ и $g(B) \equiv b$, то функцию f можно определить правилом $f(x) = \frac{|f(x)-a|}{|f(x)-a|+|f(x)-b|}$.

Таким образом, лемму Урысона можно сформулировать так: *топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4 тогда и только тогда, когда в нём любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы.*

Тихоновские пространства

Определение

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на множестве F.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются вполне регулярными, или тихоновскими.

Иногда за определение принимают равносильное условие: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, если для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f|_{X \setminus U} \equiv 1$.

$T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$: если $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, F замкнуто в X и $x \in X \setminus F$, то множества $U = f^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ и $V = f^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$, где $f\colon X \to [0,1]$ — непрерывная функция, равная 0 в точке x и 1 на множестве F, — непересекающиеся окрестности x и F.

$$\text{нормальность} \implies \text{тихоновость} \implies \text{регулярность} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Ни одну из этих стрелок нельзя обратить.

Примеры

- $T_0 \;\not\Longrightarrow\; T_1$

  Связное двоеточие — множество $\{a, b\}$, состоящее из двух точек a и b, с топологией $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

- $T_1 \;\not\Longrightarrow\; T_2$

  Множество $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского, в которой открыты все дополнения до конечных множеств и только они.

- $T_2 \;\not\Longrightarrow\; T_3$

  Прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой составляют все открытые интервалы и множества вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S$, где $\varepsilon > 0$ и $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

  Множество S замкнуто в новой топологии и $0 \notin S$, однако S и 0 не отделены окрестностями.

- $T_1 + T_3 \not\Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

  Сложный пример.

- $T_1 + T_{3\frac{1}{2}} \not\Longrightarrow T_4$

  Пространство $S \times S$ — квадрат стрелки Зоргенфрея.

$S \times S \in T_1$: топология пространства $S \times S$ сильнее обычной топологии плоскости $\mathbb{R}^2$ (которая порождена метрикой).

$S \times S \in T_{3\frac{1}{2}}$: это следует из того, что у топологии пространства $S \times S$ имеется база, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Всякая функция, тождественно равная нулю на открыто-замкнутом множестве и единице на его дополнении, непрерывна.

Мы показали, что пространство $S \times S$ вполне регулярно. Вместо того чтобы доказывать, что оно не нормально, мы докажем несколько более общий факт.

Предложение

Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подпространство мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$, то оно не удовлетворяет аксиоме T_4.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное пространство, $Y \subset X$ — счётное всюду плотное множество в X и D — замкнутое дискретное подпространство X мощности $2^{\aleph_0}$. Знаем: если непрерывные функции $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ принимают одинаковые значения в точках Y, то они совпадают. Значит, на X существует не более чем $|\mathbb{R}|^{|Y|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ разных непрерывных функций.

Поскольку D дискретно, любая функция $D \to \mathbb{R}$ непрерывна, а число разных таких функций равно $|D|^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если бы пространство X удовлетворяло аксиоме T_4, то каждая из этих функций допускала бы непрерывное продолжение на X, и все продолжения были бы разными (так как уже сами функции разные), а это невозможно, поскольку по теореме Кантора $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$. □

Аксиомы отделимости в подпространствах

Легко видеть, что свойство удовлетворять каждой аксиоме отделимости, кроме T_4, наследственно. Покажем, например, что если $X \in T_3$ и $Y \subset X$, то $Y \in T_3$. Пусть F — замкнутое подмножество Y и $x \in Y \setminus F$. Положим $G = \overline{F}^X$. Поскольку $F = G \cap Y$, имеем $x \notin G$; значит, в пространстве X существуют непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества G соответственно. По определению индуцированной топологии $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — окрестности точки x и множества F в пространстве Y, и они не пересекаются.

С аксиомой T_4 дело обстоит иначе, поскольку из того, что замкнутые множества F и G в подпространстве Y пространства X не пересекаются, вообще говоря, не следует, что их замыкания в X не пересекаются. Простой пример — пространство $X = \{a, b, c, d\}$ с топологией $\big\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ и его подпространство $Y = \{a, b, c\}$: помимо $\varnothing$ и X, в X замкнуты только множества $\{b, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ и $\{d\}$, и все они попарно пересекаются, так что аксиома T_4 выполняется в X тривиальным образом. Однако в Y есть непересекающиеся замкнутые множества $\{b\}$ и $\{c\}$, и они не отделены окрестностями.

Предложение

Если $X \in T_4$ и Y — замкнутое подпространство X, то $Y \in T_4$.

Доказательство. Если F и G — непересекающиеся замкнутые множества в Y, то они являются таковыми и в X, поскольку Y замкнуто в X. Значит, они имеют непересекающиеся окрестности U и V. Ясно, что $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — непересекающиеся окрестности F и G в Y. □

Однако открытыми подпространствами нормальность уже не наследуется. Более того, если в некотором пространстве все открытые подпространства нормальны, то в нём нормальны и вообще все подпространства.