Отображения $X \to X$ нельзя поточечно складывать или перемножать (если только само пространство $X$ не снабжено соответствующими операциями), но зато можно рассматривать их композиции. В частности, множество $\mathrm{Homeo}(X)$ всех гомеоморфизмов $X \to X$ с операцией композиции является группой, и на нём возникают те же естественные топологии, что и в случае функциональных пространств, а именно, топологии, порождённые стандартными предбазами $\{\langle F, U\rangle : A \in \mathscr{F},\ U \in \mathscr{U}\}$, где $\mathscr{F}$ — некоторое семейство подмножеств пространства $X$, $\mathscr{U}$ — семейство всех открытых подмножеств $X$ и $\langle F, U\rangle = \{h \in \mathrm{Homeo}(X) : h(F) \subset U\}$.

Топология, которая получается, когда $\mathscr{F}$ — семейство всех замкнутых (компактных) множеств, называется замкнуто-открытой (компактно-открытой), а когда $\mathscr{F}$ состоит из всех конечных множеств, получается топология поточечной сходимости. В случае, когда $X$ — метрическое пространство, группа $\mathrm{Homeo}(X)$ содержит подгруппу $\mathrm{Iso}(X)$ всех изометрических преобразований пространства $X$.

**Теорема**

*Если $X$ — нормальное пространство, то группа $G = \mathrm{Homeo}(X)$ с замкнуто-открытой топологией является топологической группой.*

**Доказательство.** Пусть $\mathscr{B}$ — стандартная предбаза замкнуто-открытой топологии.

Имеем $\langle K, W\rangle^{-1} = \langle X \setminus W, X \setminus K\rangle$ для любых $K, W \subset X$. $\implies$ Если $\langle K, W\rangle \in \mathscr{B}$, то $\langle K, W\rangle^{-1} \in \mathscr{B}$. $\implies$ Операция перехода к обратному непрерывна.

Непрерывность умножения: возьмём произвольные $f, g \in G$. Пусть $h = f \cdot g \in U$, где $U = \langle K, W\rangle \in \mathscr{B}$. Тогда $f(g(K)) \subset W$, т.е. $g(K) \subset f^{-1}(W)$. Из того, что $g$ и $f$ — гомеоморфизмы $X \to X$, следует, что $g(K)$ замкнуто в $X$ и $f^{-1}(W)$ — открытая окрестность множества $g(K)$. $X$ нормально $\implies$ $\exists$ открытое множество $V$ такое, что $g(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(W)$. $\implies$ $\langle K, V\rangle$ и $\langle \overline{V}, W\rangle$ — открытые окрестности точек $g$ и $f$, и $\langle \overline{V}, W\rangle \cdot \langle K, V\rangle \subset \langle K, W\rangle$. □

**Следствие**

*Для любого компакта $X$ компактно-открытая топология на группе $\mathrm{Homeo}(X)$ является групповой.*