Теорема 1 (Фролик). *Если X — экстремально несвязное пространство и $f\colon X \to X$ — гомеоморфизм, то множество* $\operatorname{Fix} f$ *неподвижных точек отображения f открыто (и замкнуто) в X.*

Следствие 1. *Всякое хаусдорфово пространство, квадрат которого экстремально несвязен, дискретно.*

Доказательство. Для автогомеоморфизма $f\colon X^2 \to X^2$, определённого правилом $f(x,y) = (y,x)$, множество неподвижных точек — диагональ в X^2. Диагональ в квадрате хаусдорфова пространства открыта $\iff$ это пространство дискретно. ■

Определение 1. Группа G с единицей 1 называется *булевой*, если в ней выполнено тождество $x^2 = 1$ для всех $x \in G$.

- Любая булева группа абелева.
- Любая булева группа является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. В частности, у неё есть базис, который её свободно порождает.
- Булева группа $B(X)$ с базисом X — не что иное как множество $[X]^{<\omega}$ всех конечных подмножеств X с операцией симметрической разности: для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B(X)$ $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\triangle\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}\cup\boldsymbol{y}) \setminus (\boldsymbol{x}\cap\boldsymbol{y})$. Ноль — пустое множество.

Теорема 2 (Малыхин). *Любая экстремально несвязная группа содержит открытую булеву подгруппу.*

Доказательство. Пусть G — экстремально несвязная группа. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi\colon G \to G$, $\varphi(g) = g^{-1}$. По теореме Фролика $\operatorname{Fix}\varphi$ открыто в G. Это открытая окрестность единицы. Пусть U — открытая окрестность единицы, для которой $U \cdot U \subset \operatorname{Fix}\varphi$ (её существование вытекает из равенства $1 \cdot 1 = 1$ и непрерывности умножения в точке $(1,1) \in G \times G$). Пусть H — подгруппа, порождённая множеством U. Она открыта: для $h \in H$ имеем $h \cdot U \subset h \cdot H \subset H$, и $h \cdot U$ — открытая окрестность точки h в силу непрерывности умножения.

Покажем, что подгруппа H булева. Для любых $u, v \in U$ имеем $u \cdot v \in \operatorname{Fix}\varphi$, откуда

$$v \cdot u = v \cdot u \cdot (u \cdot v \cdot u \cdot v) = (v \cdot (u \cdot u) \cdot v) \cdot u \cdot v = u \cdot v.$$

Следовательно, подгруппа H абелева. Любой элемент $h \in H$ есть произведение $u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, где $u_i \in U$. Значит, $h^2 = u_1^2 \cdot \ldots \cdot u_n^2 = 0$. ■

Следствие 2. *Если существует недискретная экстремально несвязная группа, то существует и булева недискретная экстремально несвязная группа.*

Остаётся нерешённой проблема: *существует ли без дополнительных теоретико-множественных предположений недискретная экстремально несвязная группа?*

Известно, что

- счётная недискретная экстремально несвязная группа существует в предположении справедливости континуум-гипотезы;
- в предположении несуществования так называемых быстрых ультрафильтров (которое совместимо с аксиомами ZFC теории множеств) счётных недискретных экстремально несвязных групп не существует;
- в предположении существования измеримых кадиналов (статус этого предположения не столь однозначен; измеримые кардиналы очень большие) существует недискретная экстремально несвязная группа измеримой мощности.