Булевы алгебры и пространства Стоуна

Определение 1. *Булева алгебра* — это непустое множество B с двумя бинарными операциями $\vee$ (супремум) и $\wedge$ (инфимум), одной унарной операцией $\neg$ (дополнение) и двумя выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющими аксиомам:

для любых $a, b, c \in B$

$$
\begin{aligned}
&a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c && a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
&a \vee b = b \vee a && a \wedge b = b \wedge a \\
&a \vee (a \wedge b) = a && a \wedge (a \vee b) = a \\
&a \vee 0 = a && a \wedge 1 = a \\
&a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) && a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
&a \vee \neg a = 1 && a \wedge \neg a = 0
\end{aligned}
$$

Пример 1. 1. Для множества X семейство $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X с операциями $\vee = \cup$, $\vee = \cap$, $\neg = X \setminus \bullet$ и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.

2. Для топологического пространства X семейство $\mathrm{CO}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств X с теми же операциями.

3. Для топологического пространства X семейство $\mathrm{RO}(X)$ всех канонически открытых подмножеств X с операциями

$$U \wedge V = U \cap V, \qquad U \vee V = \mathrm{Int}(\overline{U \cup V}), \qquad \neg U = X \setminus \overline{U}$$

и выделенными элементами $0 = \varnothing$ и $1 = X$.

(Канонически открытые множества = внутренности замкнутых: $U \in \mathrm{RO}(X)$, если $U = \mathrm{Int}\,\overline{U}$.)

4. Булева алгебра $\mathrm{RC}(X)$ канонически замкнутых множеств (замыканий открытых) с $0 = \varnothing$, $1 = X$ и операциями

$$F \wedge G = \overline{\mathrm{Int}(F \cap G)}, \qquad F \vee G = F \cup G, \qquad \neg F = X \setminus \mathrm{Int}\,F.$$

Теорема 1 (Стоуна). *Любая булева алгебра B изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компакта $S(B)$.*

Точки компакта $S(B)$ — *ультрафильтры* на B, т.е. гомоморфизмы в булеву алгебру $\{0, 1\}$. Его топология порождена базой $\{X \in S(B) : b \in X\}$, где $b \in B$.

Соответствие S — отображение из категории булевых алгебр и гомоморфизмов булевых алгебр в категорию `Comp` компактов и непрерывных отображений.

Определение 2. *Ковариантный функтор* $\mathscr{F} \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ — это отображение, которое

- сопоставляет каждому объекту $X \in \mathscr{D}$ объект $\mathscr{F}(X) \in \mathscr{D}$,
- сопоставляет каждому морфизму $f \colon X \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ морфизм $\mathscr{F}(f) \colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ в категории $\mathscr{D}$

таким образом, что

- $\mathscr{F}(\mathrm{id_X}) = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(\mathrm{X})}$,

- $\mathscr{F}(g \circ f) = \mathscr{F}(g) \circ \mathscr{F}(f)$

(т.е. функтор должен сохранять тождественные морфизмы и композиции морфизмов).

Аналогично, *контравариантный функтор* — это такое же отображение, но обращающее стрелки, то есть сопоставляющее морфизму $f\colon X \to Y$ морфизм $\mathscr{F}(f)\colon \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$, сохраняющее тождественные морфизмы и удовлетворяющее равенству $\mathscr{F}(g \circ f) = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(g)$.

Соответствие S является контравариантным функтором — любому гомоморфизму булевых алгебр $A \to B$ естественным образом соответствует непрерывное отображение $S(B) \to S(A)$.

Определение 3. Булева алгебра B *полна*, если для любого множества $X \subset B$ определены $\bigvee X$ и $\bigwedge X$ (считается, что $\bigvee \varnothing = 0$ и $\bigwedge \varnothing = 1$).

Булева алгебра B полна $\iff$ пространство Стоуна $S(B)$ экстремально несвязно. В булевой алгебре $\mathrm{CO}(X)$ открыто-замкнутых подмножеств экстремально несвязного пространства X для любого семейства $\mathscr{F} \subset \mathrm{CO}(X)$ $\quad \bigvee \mathscr{F} = \overline{\bigcup \mathscr{F}}$ ($\bigcup \mathscr{F}$ — объединение открыто-замкнутых множеств; оно открыто, и потому его замыкание открыто (и замкнуто) в экстремально несвязном пространстве) и $\bigwedge \mathscr{F} = \mathrm{Int}(\bigcap \mathscr{F})$ ($\bigcap \mathscr{F}$ — пересечение открыто-замкнутых множеств; оно замкнуто, и потому его внутренность замкнута (и открыта) в экстремально несвязном пространстве).