Теорема (Нагата)

Если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны, то пространства X и Y гомеоморфны.

Доказательство. Скажем, что функционал $g\colon C_p(X) \to \mathbb{R}$ **мультипликативный**, если $g(f \cdot h) = g(f) \cdot g(h)$ для всех $f, h \in C_p(X)$.

Обозначим через $\hat{X}$ подпространство пространства $C_p(C_p(X))$, образованное всеми ненулевыми непрерывными линейными мультипликативными функционалами на $C_p(X)$. Ясно, что $X \subset \hat{X} \subset L_p(X)$.

Топологический изоморфизм между кольцами $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ очевидным образом порождает гомеоморфизм между пространствами $\hat{X}$ и $\hat{Y}$. Поэтому теорема Нагаты будет доказана, если мы установим, что $\hat{X} = X$ и $\hat{Y} = Y$ (точнее, $\hat{X} = E(X)$ и $\hat{Y} = E(Y)$). Достаточно показать, что $\hat{X} \subset X$.

Пусть $g \in \hat{X}$. По условию $g \not\equiv 0$. Из $g \in L_p(X) \setminus \{0\}$ следует, что найдутся $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которых $g = \lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Случай 1: $n > 1$. Возьмём $f_1, f_2 \in C_p(X)$ такие, что $f_1(x_1) = \frac{1}{\lambda_1}$, $f_2(x_2) = \frac{1}{\lambda_2}$ и $f_i(x_j) = 0$ для $i = 1, 2$ и $j \leqslant n$, $i \neq j$. Имеем $g(f_1) = \lambda_1 \cdot f_1(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f_1(x_n) = 1$ и $g(f_2) = \lambda_1 \cdot f_2(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f_2(x_n) = 1$, но $g(f_1 \cdot f_2) = 0$, так как $(f_1 \cdot f_2)(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Значит, случай 1 невозможен.

Случай 2: $n = 1$, т.е. $g = \lambda_1 \cdot x_1$. Поскольку $g \not\equiv 0$, имеем $\lambda_1 \neq 0$. Для $f_0 \equiv 1$ имеем $f_0 = f_0^2$ и $g(f_0) = g(f_0^2) = g(f_0) \cdot g(f_0)$. С другой стороны, $g(f_0) = \lambda_1 \cdot x_1(f_0) = \lambda_1 \cdot f_0(x_0) = \lambda_1$. Значит, $\lambda_1 = 1$ и $g = x_1 \in X$. $\square$