Экстремально несвязные пространства

Определение 1. Топологическое пространство X *экстремально несвязно*, если замыкание любого открытого множества в нём открыто.

Равносильные условия

- внутренность любого замкнутого множества в X замкнута
- если $U, V \subset X$ открыты и $U \cap V = \varnothing$, то $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$
- любое всюду плотное множество $Y \subset X$ C^*-вложено в X, т.е. всякая непрерывная функция $Y \to [0,1]$ продолжается до непрерывной функции $X \to [0,1]$
- любое открытое множество $U \subset X$ C^*-вложено в X
- стоун-чеховская (максимальная) компактификация βX — проективный объект категории `Comp` компактов и непрерывных отображений. В частности, экстремально несвязные компакты — это в точности все проективные объекты этой категории.
- булева алгебра $\mathrm{CO}(X)$ образует базу топологии X и полна

Докажем только равносильность экстремальной несвязности второму условию, потому что её равносильность первому условию совершенно очевидна, а равносильность всем остальным доказывается не так просто.

Если U и V — непересекающиеся открытые множества в экстремально несвязном пространстве X, то $\overline{U}$ открыто-замкнуто, $\overline{U} \subset X \setminus V$ (потому что $X \setminus V$ — замкнутое множество, содержащее U) и $\overline{V} \subset X \setminus \overline{U}$ (потому что $X \setminus \overline{U}$ — замкнутое множество, содержащее V).

Обратно, пусть замыкания непересекающихся открытых множеств не пересекаются, и пусть $U \subset X$ открыто. Тогда $X \setminus \overline{U}$ тоже открыто и не пересекает U. Поскольку $\overline{X \setminus \overline{U}} \cap \overline{U} = \varnothing$, имеем $\overline{X \setminus \overline{U}} = X \setminus \overline{U}$, т.е. множество $X \setminus \overline{U}$ открыто-замкнуто. Значит, его дополнение $\overline{U}$ тоже открыто-замкнуто.

По поводу булевых алгебр см. конспект к следующему вопросу.