Каноническое отображение вычисления в пространство $C_p(C_p(X))$

Пусть X — пространство. Для каждого $x \in X$ рассмотрим отображение $e_x : C(X) \to \mathbb{R}$, определённое правилом $e_x(f) = f(x)$, $f \in C(X)$. Для $x \in X$ положим $E(x) = e_x$. Мы получили отображение из X в $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Из определения топологии на $C_p(X)$ вытекает

Предложение

Для любого $x \in X$ отображение $e_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ непрерывно.

Следовательно, E отображает X в $C_p(C_p(X)) = C_pC_p(X)$. Отображение E называется **канонческим отображением вычисления**.

Предложение

Отображение $E : X \to C_pC_p(X)$ — гомеоморфное вложение.

Доказательство. Имеем $E = \underset{f \in C(X)}{\Delta} f$, причём семейство $C(X)$ разделяет точки и замкнутые множества. По теореме о диагональном отображении E — гомеоморфное вложение. $\square$

Следствие

Всякое пространство X гомеоморфно подпространству $E(X)$ пространства $C_pC_p(X)$.

Рассмотрим подпространство

$$L_p(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in C_pC_p(X) : n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}\},$$

алгебраически порожденное множеством X в линейном пространстве $C_pC_p(X)$. Пространство $L_p(X)$ — наименьшее линейное подпространство линейного топологического пространства $C_pC_p(X)$, содержащее копию $E(X)$ пространства X.

Предложение

$L_p(X)$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$, причем X гомеоморфно его топологическому подпространству.

Определение

Линейное топологическое пространство, сопряженное к вещественному линейному пространству L, — это линейное пространство L' всех непрерывных функционалов (вещественных линейных функций) на L. Мы будем наделять его топологией поточечной сходимости.

Предложение

$L_p(X) = (C_p(X))'$.

Доказательство. При каноническом отождествлении X с $E(X) \subset C_p C_p(X)$ произвольная точка $x \in X$ становится линейным функционалом на $C_p(X)$, а именно, $x(f) = f(x)$ для всех $f \in C_p(X)$. Очевидно, функционал x непрерывен на $C_p(X)$. Поэтому и $\lambda_i x_i$ — непрерывный линейный функционал на $C_p(X)$, а отсюда следует, что и все $g \in L_p(X)$ — непрерывные линейные функционалы на $C_p(X)$. Остаётся доказать, что любой линейный функционал $C_p(X) \to \mathbb{R}$ представим в виде $\sum \lambda_i x_i$.

Лемма

Если $\varphi \in C_p C_p(X)$ *— линейная функция, то найдутся* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *и* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\varphi = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Доказательство. Возьмем $f \equiv 0 \in C_p(X)$. Имеем $\varphi(f) = 0$, и непрерывность φ $\implies$ $\exists x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\varphi(W(f, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)) \subset (-1, 1)$. Можно считать, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Пусть $g \in C_p(X)$ и $g(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Тогда $\varphi(g) = 0$. Действительно, $\forall k \in \mathbb{N}$ имеем $k \cdot g \in W(f, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \implies$ $|\varphi(k \cdot g)| < 1$. φ линейна $\implies$ $k \cdot |\varphi(g)| < 1$, т.е. $|\varphi(g)| < 1/k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\implies$ $\varphi(g) = 0$.

Выберем $g_i \in C_p(X)$ так, что $g_i(x_i) = 1$ и $g_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$. Положим $\lambda_i = \varphi(g_i)$. Проверим, что $\forall g \in C_p(X)$ имеем $\varphi(g) = \lambda_1 \cdot g(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot g(x_n)$.

Положим $g' = g - g(x_1) \cdot g_1 - \cdots - g(x_n) \cdot g_n$. Имеем $g' \in C_p(X)$ и $g'(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Значит, $\varphi(g') = 0$. Функция φ линейна $\implies$

$$0 = \varphi(g') = \varphi(g) - \varphi\left(\sum g(x_i) \cdot g_i\right) \qquad \text{и}$$

$$\varphi(g) = \varphi\left(\sum g(x_i) \cdot g_i\right) = \sum g(x_i) \cdot \varphi(g_i) = \sum \lambda_i \cdot g(x_i).$$

Вывод: $\varphi(g) = \sum \lambda_i \cdot g(x_n) = (\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n)(g)$. $\square$