Определение 1. Объект P в категории $\mathscr{C}$ называется *проективным*, если для произвольного эпиморфизма $e\colon E \to X$ и любого морфизма $f\colon P \to X$ существует морфизм $\bar{f}\colon P \to E$, для которого $e \circ \bar{f} = f$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "e"] \\ P \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Примеры

1. Утверждение, что все объекты в категории `Set` множеств и отображений проективны, равносильно аксиоме выбора.

Действительно, легко видеть, что в категории `Set` эпиморфизмы — это в точности сюръективные отображения множеств. Пусть $e\colon E \to X$ — любая сюръекция и $f\colon P \to X$ — любое отображение. Положим $\mathscr{F} = \{e^{-1}(x) : x \in X\}$. Имеем $E = \bigcup \mathscr{F}$. Пусть $\varphi\colon \mathscr{F} \to E$ — любая функция выбора. Положим $\bar{f} = \{(p, e) \in P \times E : e = \varphi(e^{-1}(f(p))\}$. Ясно, что $e \circ \bar{f} = f$.

Обратно, пусть $X = P = \mathscr{F}$ — любое семейство множеств и $f\colon P \to X$ — тождественное отображение. Положим $E = \bigcup \mathscr{F}$ и $e = \{(x, F) \in E \times \mathscr{F} : x \in F\}$. Ясно, что e — сюръекция (т.е. эпиморфизм). Любое отображение $\bar{f}$, для которого $e \circ \bar{f} = f$, — функция выбора для $\mathscr{F}$.

2. В категории `Grp` групп и гомоморфизмов проективные объекты — свободные группы.

Действительно, легко видеть, что в категории `Grp` эпиморфизмы — это сюръективные гомоморфизмы. Пусть $F(X)$ — свободная группа, свободно порождённая множеством X, G и H — группы, $f\colon F(X) \to G$ — любой гомоморфизм и $e\colon H \to G$ — сюръективный гомоморфизм. Положим $\mathscr{F} = \{e^{-1}(g) : g \in G\}$. Пусть $c\colon \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F} = H$ — любая функция выбора. Положим $\varphi = \{(x, h) \in X \times H : h = c(e^{-1}(f(x)))\}$. Получили отображение $\varphi\colon X \to H$. По определению свободной группы оно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{f}\colon F(X) \to H$. Очевидно, $e \circ \bar{f} = f$.

Обратно, пусть G — проективный объект в категории `Grp`, и пусть $F(G)$ — свободная группа, порождённая множеством G. По определению свободной группы тождественное вложение $G \hookrightarrow F(G)$ продолжается до гомоморфизима (и даже эпиморфизма) $e\colon F(G) \to G$. Пусть $f\colon G \to G$ — тождественный гомоморфизм. Любой гомоморфизм $\bar{f}\colon G \to F(G)$, для которого $e \circ \bar{f} = f$, обязан быть инъективным. Следовательно, группа G изоморфна подгруппе свободной группы $F(G)$. Согласно хорошо известной теореме Нильсена–Шрайера группа G и сама свободна.