Пример однородного максимального пространства

Пусть G — любая бесконечная группа с единицей 1. Прежде всего покажем, что на G существует неглавный ультрафильтр-идемпотент. Заметим, что $\beta G \setminus G$ (множество всех неглавных ультрафильтров на G) — подполугруппа полугруппы βG. Действительно, из вида канонической базы ультрафильтра-произведения произведения $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$ (см. предыдущий конспект) видно, что если все элементы ультрафильтра $\mathscr{V}$ бесконечные (т.е. он неглавный), то и все элементы этого произведения бесконечны (т.е. произведение — тоже неглавный ультрафильтр). Кроме того, множество G открыто в βG и βG — компакт. Значит, по теореме Эллима–Нумакуры в $\beta G \setminus G$ имеется идемпотент. Ясно, что он неглавный и является идемпотентом и в βG.

Пусть $\mathscr{U}$ — любой неглавный ультрафильтр-идемпотент на G. Зададим топологию на группе G системой окрестностей (см. определение Хаусдорфа в слайдах к вопросу 1): положим

$$\mathscr{N}(1) = \{\{1\} \cup U : U \in \mathscr{U}\}$$

и для $g \in G$ положим

$$\mathscr{N}(g) = \{g \cdot V : V \in \mathscr{N}(1)\} = \{\{g\} \cup g \cdot U : U \in \mathscr{U}\}.$$

Выполнение условий 1, 2 и 4 из определения Хаусдорфа системы окрестностей очевидно. Проверим 3.

Пусть $g \in G$ и $N \in \mathscr{N}(g)$, т.е. $N = \{g\} \cup g \cdot U$, где $U \in \mathscr{U}$. Поскольку $\mathscr{U} \cdot \mathscr{U} = \mathscr{U}$, элемент U ультрафильтра $\mathscr{U}$ содержит некоторый элемент канонической базы произведения $\mathscr{U} \cdot \mathscr{U}$, т.е. существуют $V \in \mathscr{U}$ и $W_x \in \mathscr{U}$, $x \in V$, для которых $\bigcup_{x \in V} x \cdot W_x \subset U$. Умножая обе части включения слева на g, получаем

$$\bigcup_{g \cdot x \in g \cdot V} g \cdot x \cdot W_x \subset g \cdot U, \qquad \text{т.е.} \quad \bigcup_{h \in g \cdot V} h \cdot W_{g^{-1} \cdot h} \subset g \cdot U.$$

Мы нашли окрестность $O = \{g\} \cup g \cdot V$ точки g с тем свойством, что $O \subset N$ и у любого $h \in O$ есть окрестность $O_h = \{h\} \cup h \cdot W_{g^{-1} \cdot h} \in \mathscr{N}(h)$, для которой $O_h \subset O$. Тем самым мы доказали выполнение условия 4 из определения Хаусдорфа.

Итак, система окрестностей $\{\mathscr{N}(g) : g \in G\}$ задаёт некоторую топологию на G. Она недискретна, потому что ультрафильтр $\mathscr{U}$ неглавный, и в G с этой топологией нет изолированных точек. Кроме того, пространство G с этой топологией однородно, потому что отображения $f_g \colon x \mapsto g \cdot x$ — гомеоморфизмы и переводят любую точку в любую другую.

Из теоремы 2.1 из записок к вопросу 15 следует, что пространство G с этой топологией совершенно несвязно. Действительно, пусть $x \in G$, $A \subset G$ и $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Заметим, что все множества вида $x \cdot U$, где $U \in \mathscr{U}$, образуют ультрафильтр $x \cdot \mathscr{U}$. С другой стороны, все они — окрестности или проколотые окрестности точки x, а значит, все пересекают A. Это означает, что A принадлежит ультрафильтру $x \cdot \mathscr{U}$ (иначе ультрафильтр $x \cdot \mathscr{U}$ не был бы максимальной центрированной системой, т.е. ультрафильтром). Следовательно, выполнено условие (b) теоремы 2.1.

Осталось вспомнить, что

$$\text{максимальность} = \text{совершенная несвязность} + \text{отсутствие изолированных точек}.$$