Множество $\mathbb{N}$ является полугруппой как относительно умножения $\cdot$, так и относительно сложения $+$. Операцию на полугруппе ультрафильтров $\beta\mathbb{N}$, порождённой аддитивной полугруппой натуральных чисел, будем обозначать тем же символом $+$ и называть сложением, хотя на этой полугруппе операция уже не коммутативна.

Теорема Шура. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon \mathbb{N} \to \{1, \ldots, m\}$ уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.*

Доказательство. Возьмём любой ультрафильтр-идемпотент $p \in \beta\mathbb{N}$. Ясно, что он неглавный (потому что в аддитивной полугруппе $\mathbb{N}$ нет идемпотентов, а главные ультрафильтры отождествляются с числами и складываются так же). Покажем, что любой элемент $A \in p$ содержит три точки x, y и z, для которых $x + y = z$. Напомним, что $\overline{A}$ — окрестность точки p в $\beta\mathbb{N}$. Поскольку $p + p = p$ и $p \in \overline{A}$, из непрерывности сложения по первому агументу вытекает существование окрестности U ультрафильтра p, для которой $U + p \subset \overline{A}$. Всякая окрестность содержит окрестность вида $\overline{P}$ для $P \in p$, причём $P \cap A \in p$. Значит, существует элемент $B \in p$ такой, что $B \subset A$ и $\overline{B} + p \subset \overline{A}$. Выберем любой $x \in B$. Имеем $x + p \in \overline{A}$ и $x \in \mathbb{N}$. Из непрерывности сложения по второму аргументу при условии, что (фиксированный) первый аргумент принадлежит $\mathbb{N}$, вытекает существование элемента $C \in p$ такого, что $x + \overline{C} \subset \overline{A}$, $C \subset A$ и $x \notin C$, т.е.

$$x + C \subset A, \qquad C \subset A, \qquad x \in A \setminus C.$$

Для любого $y \in C$ имеем $y \in A$, $y \neq x$ и $x + y = z$.

Осталось заметить, что по основному свойству ультрафильтров каково бы ни было разбиение множества $\mathbb{N}$ на конечное число кусков (т.е. раскраска множества $\mathbb{N}$ в конечное число цветов), один из кусков (одноцветных подмножеств) должен принадлежать ультрафильтру p. $\blacksquare$