Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть X — множество. Обозначим множество всех ультрафильтров на X через βX. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Семейство $\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subset X\}$ является базой некоторой топологии на βX. В дальнейшем мы будем рассматривать βX только с этой топологией. Точки-ультрафильтры пространства βX мы будем обозначать строчными латинскими буквами из второй половины алфавита: p, q, r и т.д.

Для $A \subset X$

$$\overline{A} \text{ — окрестность ультрафильтра } p \text{ в } \beta X \iff A \in p.$$

Множество X можно отождествить с подпространством βX, состоящим из главных ультрафильтров:

$$X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}.$$

Свойства пространства $\boldsymbol{\beta X}$

1. Множество всех главных ультрафильтров (вида $p_x = \{A \subset X : x \in A\}$), которое отождествляется с X,

- дискретно:

  для каждого $x \in X$ имеем $\{x\} \in p_x$, и окрестность $\overline{\{x\}} = \{p \in \beta X : \{x\} \in p\}$ ультрафильтра p_x состоит из единственной точки p_x;

- открыто:

  $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{p_x\}$, и все множества $\{p_x\}$ открыты;

- всюду плотно:

  любое непустое открытое множество U в βX содержит $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ для некоторого непустого множества $A \subset X$ (так как множества такого вида образуют базу топологии). Для $x \in A$ имеем $A \in p_x$. Значит, $p_x \in U$.

2. Для любого $A \subset X$ множество $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ открыто-замкнуто, так как $\beta X \setminus \overline{A} = \overline{X \setminus A}$ — это открытое множество.

3. Для всякого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ является замыканием множества $A \equiv \{p_x : x \in A\}$ в βX, причём $\overline{A} \cap X = A$.

Действительно, из того, что $A \subset \overline{A}$ и $\overline{A}$ замкнуто, следует, что $\overline{A}$ содержит замыкание множества A.

Обратно, пусть $p \in \overline{A}$ (т.е. $A \in p$). Любая окрестность U точки p в βX содержит окрестность вида $\overline{B}$, где $B \in p$. Для любой точки $x \in A \cap B$ имеем $p_x \in A$ и $A \cap B \in p_x$, т.е. $p_x \in \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \subset U$. Таким образом, любая точка p из $\overline{A}$ является предельной для A. Значит, $\overline{A}$ содержится в замыкании множества A.

Наконец, $p_x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $A \in p_x$, т.е. $x \in A$, а значит, $\overline{A} \cap X = A$.

4. Пространство βX хаусдорфово. Действительно, если $p, q \in \beta X$, $p \neq q$, то найдётся $A \in p$, $A \notin q$. Имеем $X \setminus A \in q$. Множества $\overline{A}$ и $\overline{X \setminus A}$ — непересекающиеся окрестности точек p и q.

5. Пространство βX компактно.

Доказательство. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства βX. Можно считать без ограничения общности, что каждое множество U_ι имеет вид $\overline{A}_\iota$ для $A_\iota \subset X$, т.е. $\mathscr{U} = \{\overline{A}_\iota : \iota \in I\}$ (см. конспекты к вопросу 3). Положим $\mathscr{F} = \{X \setminus A_\iota : \iota \in A\}$.

Предположим, что $\mathscr{F}$ центрировано. Тогда $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $p \in \beta X$. Поскольку $\mathscr{U}$ — покрытие пространства βX, имеем $p \in \overline{A}_\iota$ (т.е. $A_\iota \in p$) для некоторого $\iota \in I$. С другой стороны, $X \setminus A_\iota \in p$. Противоречие.

Значит, $\mathscr{F}$ не центрировано. Для $A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}$ таких, что $(X \setminus A_{\iota_1}) \cap \dots \cap (X \setminus A_{\iota_n}) = \varnothing$, имеем $A_{\iota_1} \cup \dots \cup A_{\iota_n} = X$. По основному свойству ультрафильтров для всякого $p \in \beta X$ существует номер $i \leqslant n$ такой, что $A_{\iota_i} \in p$, т.е. $p \in \overline{A}_{\iota_\alpha}$. ■

6. Любое отображение $f\colon X \to Y$ множества X в хаусдорфов компакт Y продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta X \to Y$.

Доказательство. Для любого ультрафильтра $p \in \beta X$ семейство $\beta f(p) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in p\}$ — ультрафильтр на Y. Он сходится к некоторой точке $y \in Y$. Положим $\hat{f}(p) = y$. Ясно, что $\hat{f}$ продолжает f: если $p_x \equiv x \in X$, то $\beta f(p_x) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \ni x\} = \{A \subset Y : f(x) \in A\}$ — это главный ультрафильтр $p_{f(x)}$ на Y, он сходится к $f(x)$.

Покажем, что $\hat{f}$ непрерывно. Пусть O — любая окрестность точки $y = \hat{f}(p)$. Она содержит замкнутую окрестность V, так как всякий компакт регулярен. Имеем $V \in \beta f(p)$, потому что $\beta f(p) \to y$, и $f^{-1}(V) \in p$ по определению отображения βf. Значит, $\overline{f^{-1}(V)}$ — окрестность точки p в βX. Покажем, что $\hat{f}(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$.

Предположим, что $q \in \overline{f^{-1}(V)}$ (т.е. $f^{-1}(V) \in q$) и $\hat{f}(q) \notin V$. Возьмём окрестность U точки $\hat{f}(q)$ в Y, которая не пересекается с V. По построению $\beta f(q) \to \hat{f}(q)$; значит, $U \in \beta f(q)$ и $f^{-1}(U) \in q$. Однако $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, так как $U \cap V = \varnothing$, а значит, $f^{-1}(V) \notin q$. Противоречие. ■

Для $\hat{f}(p)$ иногда используют обозначение $\lim\limits_p f$ или p-$\lim f$.

Напомним, что если $f\colon X \to Y$ — любое отображение, то для всякого ультрафильтра p на X определён ультрафильтр $\beta f(p)$ — его образ при отображении f (см. слайды к вопросу 2).

7. Продолжение $\hat{f}\colon \beta X \to \beta X$ всякого отображения $f\colon Y \to X \subset \beta X$ совпадает с βf.

Доказательство. Будем рассматривать f как отображение $Y \to \beta X$; это законно, так как $X \subset \beta X$. По определению отображения $\hat{f}$ для $p \in \beta Y$ имеем $\beta f(p) \to \hat{f}(p)$, т.е. любая окрестность $\overline{A}$ ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX принадлежит $\beta f(p)$, а это означает, что $f^{-1}(\overline{A}) \in p$ для любого $A \in \hat{f}(p)$. Поскольку $\overline{A} \cap X = A$, имеем $f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(A)$, т.е. $A \in \beta f(p)$. Значит, $\beta f(p) \in \overline{A}$ для любого $A \in \hat{f}(p)$.

Таким образом, ультрафильтр $\beta f(p) \in \beta X$ принадлежит любой окрестности ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в βX, а потому совпадает с ним в силу хаусдорфовости компакта βX. ■

8. Для любого отображения $f\colon X \to \beta X$ и любого $p \in \beta X$ образ $\hat{f}(p)$ имеет *каноническую базу*, состоящую из всех множеств вида

$$\bigcup \{F_x : x \in P\}, \quad \text{где } P \in p \text{ и } F_x \in f(x). \tag{$*$}$$

Доказательство. Все множества вида $(*)$ непусты и пересечение двух таких множеств $\bigcup\{F_x : x \in P\}$ и $\bigcup\{F'_x : x \in P'\}$ содержит множество $\bigcup\{(F_x \cap F'_x) : x \in (P \cap P')\}$, которое тоже имеет вид $(*)$. Значит, множества вида $(*)$ являются базой некоторого фильтра $\mathscr{F}$ — он состоит из всех надмножеств множеств вида $(*)$. Это ультрафильтр в силу основного свойства ультрафильтров: множество $A \subset X$ содержит множество вида $(*)$ тогда и только тогда, когда $\{x \in X : A \in f(x)\} \in p$, т.е. $\{x \in X : X \setminus A \in f(x)\} \notin p$, а это означает, что A содержит множество вида $(*)$ тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ такого множества не содержит. Значит, множества вида $(*)$

— база некоторого ультрафильтра q на X. Покажем, что $q \to \beta f(p)$. Если $Q \in q$, то $Q \supset \bigcup\{F_x : x \in P\}$ для некоторых $P \in p$ и $F_x \in f(x)$, $x \in P$. Так как $F_x \subset Q$, имеем $Q \in f(x)$ и $f(x) \in \overline{Q}$ для всех $x \in P$. Значит, $f^{-1}(\overline{Q}) \supset P \in p$, так что $\overline{Q} \in \beta f(p)$. ■

Полугруппы ультрафильтров

Пусть S — полугруппа. Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s \colon S \to S \quad (\subset \beta S)$$

правилом

$$L_s(x) = s \cdot x \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{L}_s \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $s \cdot p$.

В силу восьмого свойства пространства ультрафильтров ультрафильтр $s \cdot p$ имеет каноническую базу

$$\Big\{\bigcup\{F_x : x \in P\} : P \in p,\ F_x \in L_s(x)\Big\}.$$

Поскольку $L_s(x) = s \cdot x \in S$ для всякого $s \in P \in p$, все ультрафильтры $L_s(x)$ главные, так что в данном случае эта база имеет вид

$$\{s \cdot P : P \in p\}.$$

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q \colon S \to \beta S,$$

определённое правилом

$$R_q(x) = x \cdot q \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется *произведением ультрафильтров* p и q в βS. Он имеет каноническую базу

$$\Big\{\bigcup\{F_x : x \in P\} : P \in p,\ F_x \in R_q(x)\Big\}.$$

Заменяя $F_x \in R_q(x) = x \cdot q$ на меньшие множества $x \cdot Q_x$, где $Q_x \in q$ (это элементы базы ультрафильтра $x \cdot q$), получим *каноническую базу произведения* $p \cdot q$:

$$\Big\{\bigcup\{x \cdot Q_x : x \in P\} : P \in p,\ Q_x \in q\Big\}.$$

Умножение непрерывно по первому агрументу, а если первый аргумент — элемент S, то и по второму. Покажем, что из этих непрерывностей вытекает ассоциативность.

Пусть O_1 — любая окрестность $(p \cdot q) \cdot r$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $V_1 \ni p \cdot q$,
для которой $V_1 \cdot r \subset O_1$,
и существует окрестность $U_1 \ni p$,
для которой $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть O_2 — любая окрестность $p \cdot (q \cdot r)$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $U_2 \ni p$,
для которой $U_2 \cdot (q \cdot r) \subset O_2$.

Возьмём $x \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$x \cdot q \in V_1$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $W_1 \ni q$,
для которой $x \cdot W_1 \subset V_1$.

$x \cdot (q \cdot r) \in O_2$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $V_2 \ni q \cdot r$,
для которой $x \cdot V_2 \subset O_2$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $W_2 \ni q$,
для которой $W_2 \cdot r \subset V_2$.

Возьмём $y \in S \cap W_1 \cap W_2$.

$x \cdot y \in V_1$, $V_1 \cdot r \subset O_1 \implies (x \cdot y) \cdot r \in O_1$.
Непрерывность по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $Q_1 \ni r$,
для которой
$(x \cdot y) \cdot Q_1 \subset O_1$.

$y \cdot r \in V_2$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $Q_2 \ni r$, для
которой $y \cdot Q_2 \subset V_2$.
$x \cdot V_2 \subset O_2 \implies x \cdot (y \cdot Q_2) \subset O_2$.

Возьмём $z \in S \cap Q_1 \cap Q_2$.

Имеем $(x \cdot y) \cdot z \in O_1$ и $x \cdot (y \cdot z) \in O_2$. Из ассоциативности умножения в полугруппе следует, что

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in O_1 \cap O_2.$$

Таким образом, любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot r$ и $p \cdot (q \cdot r)$ пересекаются. Значит, эти точки совпадают, потому что пространство βS хаусдорфово.

Вывод: βS — компактная правотопологическая полугруппа (*правотопологическая* = умножение непрерывно по первому аргументу).

Две теоремы о компактных полугруппах

Теорема 1 (Эллис–Нумакура). *Любая непустая компактная хаусдорфова правотопологическая (= умножение непрерывно по первому аргументу) полугруппа S содержит идемпотент, т.е. элемент e такой, что $e \cdot e = e$.*

Доказательство. К упорядоченному семейству $(\mathscr{H}, \leqslant)$, где $\leqslant = \supset$, непустых замкнутых подполугрупп S применима лемма Цорна. Действительно, пусть множество $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ линейно упорядочено отношением $\supset$. Элементы любого конечного подмножества этого множества можно перенумеровать в порядке $\leqslant$-возрастания, т.е. $\subset$-убывания: $H_1 \supset \cdots \supset H_n$. Имеем $\bigcap\limits_{i \leqslant n} H_i = H_n \neq \varnothing$. Значит, любое такое множество $\mathscr{C}$ центрировано. Поскольку все $H \in \mathscr{C}$ замкнуты, а полугруппа S компактна, имеем $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$. Ясно, что это пересечение замкнуто и является подполугруппой, т.е. принадлежит семейству $\mathscr{H}$. Кроме того, оно больше (относительно порядка $\leqslant$) всех элементов множества $\mathscr{C}$. Значит, это верхняя грань множества $\mathscr{C}$.

Пусть H — $\leqslant$-максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент $\mathscr{H}$ и $e \in H$. Тогда $H \cdot e$ — подполугруппа: $x \cdot e \cdot y \cdot e = (x \cdot e \cdot y) \cdot e$, причём $x \cdot e \cdot y \in H$, так как H — подполугруппа. Кроме того, $H \cdot e \subset H$ (по той же причине). Подполугруппа $H \cdot e$ — образ подполугруппы H при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Подполугруппа H компактна, будучи замкнутым подмножеством компактного пространства S. Значит, $H \cdot e$ тоже компактна. Полугруппа S хаусдорфова, а в хаусдорфовом пространстве все компактные подмножества замкнуты. Следовательно, подполугруппа $H \cdot e$ замкнута, и из её минимальности следует, что $H \cdot e = H$.

Положим

$$E = \{x \in H : x \cdot e = e\}.$$

Множество E непусто и является подполугруппой (если $x, y \in H$, т.е. $x \cdot e = y \cdot e = e$, то $(x \cdot y) \cdot e = x \cdot (y \cdot e) = x \cdot e = e$). Множество E — прообраз замкнутого множества $\{e\}$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Следовательно, это замкнутая подполугруппа полугруппы S. Из того, что $E \subset H$ и минимальности подполугруппы H следует, что $E = H$. Значит, $e \in E$, т.е. $e \cdot e = e$. ■