Определение

Топологическое пространство обладает **свойством Суслина**, если в нём всякое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.

Легко видеть, что если топологическое пространство содержит всюду плотное подпространство со свойством Суслина, то оно само обладает этим свойством.

Определение

Топологическое пространство, которое является объединением счётного числа компактов, называется **σ-компактным**.

Теорема

Всякая σ-компактная топологическая группа обладает свойством Суслина.

Доказательство. Сначала сведём доказательство к случаю компактно порождённой группы, т.е. группы, порождённой (алгебраически) некоторым своим компактным подпространством: если $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, где K_n — компакты, и $\mathscr{U}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в G, то существует такой номер n, что компакт K_n (а значит, и его групповая оболочка в G, которая является компактно порождённой группой) пересекает несчётное число элементов $\mathscr{U}$. Следовательно, если существует σ-компактная группа без свойства Суслина, то существует и компактно порождённая группа без этого свойства.

Топологическая группа G, порождённая своим компактным подпространством K, является непрерывным (и даже непрерывным гомоморфным) образом свободной топологической группы $F(K)$ — надо рассмотреть тождественное вложение $K \to G$ и его продолжение до непрерывного гомоморфизма $F(K) \to G$. Значит, достаточно доказать теорему для свободных топологических групп компактов.

Наконец, всякий компакт K является непрерывным образом стоун-чеховской компактификации βD дискретного пространства D мощности $|K|$ (биекция $D \to K$ имеет непрерывное продолжение на βD), поэтому достаточно доказать, что плотная подгруппа $\langle D\rangle$ группы $F(\beta D)$ обладает свойством Суслина.

Пусть $\mathscr{O} = \{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $F(\beta D)$. Надо доказать, что оно содержит два пересекающихся множества. $\mathscr{O}$ несчётно $\implies$ для некоторого n несчётное число его элементов содержит слова $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ длины ровно n, причём наборы степеней ε_i у букв в этих словах одинаковы. D всюду плотно в $\beta D \implies$ Если O открыто и $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in O$, то найдутся окрестности V_i точек x_i такие, что $V_1^{\varepsilon_1} \dots V_n^{\varepsilon_n} \subset O$. D всюду плотно в $\beta D \implies \exists$ $y_i \in V_i \cap D \implies y_1^{\varepsilon_1} \dots y_n^{\varepsilon_n} \in O$. Значит, несчётное число элементов семейства $\mathscr{O}$ содержит слова длины n с буквами из D и одинаковыми наборами $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ степеней букв. Обозначим несчётное множество индексов этих элементов через A. Положим

$$\hat{\beta D} = \beta D^{\varepsilon_1} \times \dots \times \beta D^{\varepsilon_n},$$
$$\tilde{\beta D} = \beta D^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot \beta D^{\varepsilon_n} = \{x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n} : x_i \in \beta D\} \subset F(\beta D).$$

Те же обозначения будем использовать для D: $\hat{D} = D^{\varepsilon_1} \times \dots \times D^{\varepsilon_n}$, $\tilde{D} = D^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot D^{\varepsilon_n} \subset F(\beta D)$.

Имеем $\tilde{\beta} D = \mu(\hat{\beta D})$, где μ — естественное отображение умножения, которое каждой точке $\hat{x} = (x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}) \in \hat{\beta D}$ ставит в соответствие точку $\tilde{x} = x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n} \in \tilde{\beta D}$. Ясно, что μ — биекция. В дальнейшем мы всегда будем буквами в шляпке обозначать элементы и подмножества множества $\hat{\beta D}$, а теми же буквами с тильдой — соответствующие элементы и подмножества множества $\tilde{\beta D}$.

Пусть $\tilde{x}_\alpha \in O_\alpha \cap \tilde{D}$ для $\alpha \in A$. Поскольку $\tilde{x}_\alpha \cdot \tilde{x}^{-1} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}_\alpha \in O_\alpha$ для каждого $\tilde{x} \in \tilde{\beta D}$ и отображение умножения μ непрерывно, у каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{\beta D}$ есть открытая окрестность $U_{\tilde{x}}$ в $F(\beta D)$ такая, что $x_\alpha \cdot U_{\tilde{x}}^{-1} \cdot U_{\tilde{x}} \subset O_\alpha$. Окрестности $\mu^{-1}(U_{\tilde{x}} \cap \tilde{\beta D})$, $\tilde{x} \in \tilde{\beta D}$, образуют открытое покрытие $\hat{\eta}_\alpha$ компакта $\hat{\beta D}$. Аналогично, у каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{\beta D}$ есть открытая окрестность $V_{\tilde{x}}$ в $F(\beta D)$ такая, что $V_{\tilde{x}} \cdot V_{\tilde{x}}^{-1} \cdot \tilde{x}_\alpha \subset O_\alpha$. Окрестности $\mu^{-1}(V_{\tilde{x}} \cap \tilde{\beta D})$, $\tilde{x} \in \tilde{\beta D}$, образуют открытое покрытие $\hat{\theta}_\alpha$ компакта $\hat{\beta D}$.

Рассмотрим конечное покрытие компакта $\hat{\beta D}$, вписанное в η_α и в θ_α (годится конечное подпокрытие открытого покрытия, образованного всеми пересечениями $U \cap V$, где $U \in \eta_\alpha$ и $V \in \theta_\alpha$), и возьмём конечное разбиение $\hat{\gamma}_\alpha$ множества $\hat{D} \subset \hat{\beta D}$, вписанное в это покрытие (оно легко строится по индукции). Обозначим через $\tilde{\gamma}_\alpha$ разбиение множества $\tilde{D}$, образованное образами элементов разбиения $\hat{\gamma}_\alpha$ при отображении μ.

Имеем:

- набор точек $\{\tilde{x}_\alpha : \alpha \in A\} \subset \tilde{D}$;
- набор конечных разбиений $\tilde{\gamma}_\alpha$, $\alpha \in A$, множества $\tilde{D}$;
- для любых $\alpha \in A$ и $W \in \tilde{\gamma}_\alpha$ $\tilde{x}_\alpha \cdot W^{-1} \cdot W \subset O_\alpha$ и $W \cdot W^{-1} \cdot \tilde{x}_\alpha \subset O_\alpha$. Действительно, каждый элемент W разбиения $\tilde{\gamma}_\alpha$ есть $\mu(A)$ для некоторого $A \in \hat{\gamma}_\alpha$. По построению A содержится в некотором элементе конечного покрытия пространства $\hat{\beta D}$, которое вписано в покрытия $\hat{\eta}_\alpha$ и $\hat{\theta}_\alpha$. Это означает, что $A \subset \mu^{-1}(U_{\tilde{x}} \cap \tilde{\beta D})$ и $A \subset \mu^{-1}(V_{\tilde{y}} \cap \tilde{\beta D})$ для некоторых $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\beta D}$. Следовательно, $W = \mu(A) \subset U_{\tilde{x}}$ и $W = \mu(A) \subset V_{\tilde{y}}$. Нужное утверждение следует из определения множеств $U_{\tilde{x}}$ и $V_{\tilde{y}}$.

Для семейства $\mathscr{F}$ подмножеств множества X и $x \in X$ звезда точки x относительно $\mathscr{F}$ определяется так: $\mathrm{St}(x, \mathscr{F}) = \bigcup\{F \in \mathscr{F} : x \in F\}$.

Лемма

Если $\alpha, \beta \in A$ и $\mathrm{St}(\tilde{x}_\alpha, \tilde{\gamma}_\beta) \cap \mathrm{St}(\tilde{x}_\beta, \tilde{\gamma}_\alpha) \neq \varnothing$, то $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}_\alpha \in U \in \tilde{\gamma}_\beta$, $\tilde{x}_\beta \in V \in \tilde{\gamma}_\alpha$, $\tilde{z} \in U \cap V$. Тогда

$$\tilde{x}_\alpha \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot \tilde{x}_\beta \in \tilde{x}_\alpha \cdot U^{-1} \cdot U \subset O_\alpha, \quad \tilde{x}_\alpha \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot \tilde{x}_\beta \in V \cdot V^{-1} \cdot \tilde{x}_\beta \subset O_\beta.$$

□

Для дальнейшего нам понадобятся два комбинаторных утверждения — теорема Рамсея и лемма.

Теорема Рамсея

Пусть X — бесконечное множество, $k, m \in \mathbb{N}$ и $[X]^k$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X. Для любой раскраски $c\colon [X]^k \to \{1, \dots, m\}$ существует бесконечное однородное множество $A \subset X$ (т.е. такое, что $[A]^k$ одноцветно).

Доказательство. Положим $C_i = c^{-1}(i)$. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно для n и $k = n+1$. Выберем $a_0 \in X$. Теорема для $k = n \implies \exists$ бесконечное $A_0 \subset X$ и $i_0 \leqslant m$, для которых $F \in [A_0]^n \Rightarrow (\{a_0\} \cup F) \in C_{i_0}$. Выберем $a_1 \in A_0$. ...Получаем бесконечные множества $A_0 \supset A_1 \supset \dots$, точки $a_i \in A_{i-1}$ и числа $i_0, i_1, \dots \leqslant m$ такие, что $\forall F \in [A_j]^n$ имеем $(\{a_j\} \cup F) \in C_{i_j}$. Найдём $i \leqslant m$ и бесконечное $J \subset \mathbb{N}$ такие, что $i_j = i$ для всех $j \in J$. Ясно, что $\{a_j : j \in J\}$ — бесконечное множество, все k-элементные подмножества которого принадлежат C_i. $\square$

Комбинаторная лемма

Пусть X — бесконечное множество, $\{x_\xi : \xi \in \Xi\}$ — его бесконечное подмножество, $N \in \mathbb{N}$ и δ_ξ, $\xi \in \Xi$, — конечные разбиения множества X на N частей (= раскраски в N цветов). Тогда существуют различные $\xi, \zeta \in \Xi$, для которых $\mathrm{St}(x_\xi, \delta_\zeta) \cap \mathrm{St}(x_\zeta, \delta_\xi) \neq \varnothing$.

Доказательство. Как-нибудь перенумеруем элементы каждого разбиения: $\delta_\xi = \{A_{\xi,k} : k \leqslant N\}$, $\xi \in \Xi$. Зафиксируем любой линейный порядок $<$ на Ξ. Для каждой пары $\{\xi, \zeta\} \in [\Xi]^2$, где $\xi < \zeta$, положим $c(\{\xi, \zeta\}) = (k, l)$, если $x_\xi \in A_{\zeta,k}$ и $x_\zeta \in A_{\xi,l}$. Получили раскраску $c \colon [\Xi]^2 \to \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$. Теорема Рамсея $\Longrightarrow\ \exists\ (k, l) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ и бесконечное множество $Z \subset \Xi$ такие, что $c(\{\xi, \zeta\}) = (k, l)$ для любых $\xi, \zeta \in Z$. Пусть $\xi, \zeta, \chi \in Z$, $\xi < \zeta < \chi$. Тогда

- $x_\xi \in A_{\zeta,k}$ и $x_zeta \in A_{\xi,l}$, так как $c(\{\xi, \zeta\}) = (k, l)$;
- $x_\xi \in A_{\chi,k}$ и $x_\chi \in A_{\xi,l}$, так как $c(\{\xi, \chi\}) = (k, l)$;
- $x_\zeta \in A_{\chi,k}$ и $x_\chi \in A_{\zeta,l}$, так как $c(\{\zeta, \chi\}) = (k, l)$.

Имеем $x_\zeta \in \mathrm{St}(x_\xi, \delta_j) \cap \mathrm{St}(x_\chi, \delta_i)$. □

Вернёмся к нашим точкам $\tilde{x}_\alpha \in \tilde{D}$ и конечным разбиениям $\tilde{\gamma}_\alpha$ множества $\tilde{D}$, $\alpha \in A$. Их несчётно много $\implies$ существуют $N \in \mathbb{N}$ и несчётное множество $A' \subset A$ такие, что $|\tilde{\gamma}_\alpha| = N$ для всех $\alpha \in A'$. В силу комбинаторной леммы существуют $\alpha, \beta \in A'$, для которых $\mathrm{St}(\tilde{x}_\alpha, \tilde{\gamma}_\beta) \cap \mathrm{St}(\tilde{x}_\beta, \tilde{\gamma}_\alpha) \neq \varnothing$, и согласно самой первой лемме имеем $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$. $\square$