Функциональные пространства

Определение

Множество всех непрерывных отображений $X \to Y$ обозначается $C(X, Y)$. Для $A \subset X$ и $B \subset Y$ $\langle A, B\rangle = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}$.

Пусть $\mathscr{F} \ni \varnothing$ — некоторое семейство множеств в пространстве X. Тогда семейство $\mathscr{B}$ всех множеств вида $\langle A, U\rangle$, где $A \in \mathscr{F}$ и U — открытое в Y множество, составляет предбазу некоторой топологии на $C(X, Y)$, которая называется топологией равномерной сходимости на элементах семейства $\mathscr{F}$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех одноточечных (или, что равносильно, конечных) подмножеств пространства X, то эта топология называется топологией поточечной сходимости, и $C(X, Y)$ с этой топологией обозначается $C_p(X, Y)$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех компактных подмножеств пространства X, то она называется компактно открытой топологией, и $C(X, Y)$, наделённое этой топологией, обозначается $C_c(X, Y)$ или $C_k(X, Y)$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех ограниченных в X множеств, то $C(X, Y)$ с соответствующей топологией обозначается $C_0(X, Y)$.

Определение

Стандартная база пространства $C_p(X, Y)$ состоит из множеств вида

$$W(x_1, \ldots, x_k, U_1, \ldots, U_k) = \{f \in C(X, Y) : f(x_i) \in U_i, i \leqslant k\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ и $U_1, \ldots, U_k$ — открытые множества в Y.

Стандартная окрестность точки $f \in C_p(X) = C_p(X, \mathbb{R})$ — это окрестность вида

$$W(f, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon) = W\big(x_1, \ldots, x_k, (f(x_1) - \varepsilon, f(x_1) + \varepsilon), \ldots, (f(x_n) - \varepsilon, f(x_n) + \varepsilon)\big),$$

где $\varepsilon > 0$.

$C_p(X)$ можно рассматривать как топологическое пространство, как топологическое кольцо, как топологическую группу или как линейное топологическое пространство.

Чем слабее топология на пространстве функций, тем шире запас компактов в этом пространстве. Одно из самых важных достоинств топологии поточечной сходимости состоит в том, что она наименьшая среди практически всех естественных топологий, а значит, порождает наибольший запас компактов. Но главное преимущество топологии поточечной сходимости — то, что тихоновские пространства X и Y гомеоморфны в том (и только том) случае, если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны.

Отображение сужения и двойственное отображение

Пусть $Y \subset X$. Через $\pi_Y = \pi$ обозначается отображение сужения функций из $C_p(X)$ на Y: $\pi(f) = f|_Y$ для всех $f \in C_p(X)$. Подпространство $\pi(C_p(X)) \subset C_p(Y)$ обозначается $C_p(Y|X)$.

- π непрерывно и $\overline{\pi(C_p(X))} = C_p(Y)$;
- если X нормально и Y замкнуто в X, то $\pi(C_p(X)) = C_p(Y)$;
- если Y компактно, то $\pi(C_p(X)) = C_p(Y)$;
- если Y всюду плотно в X, то $\pi\colon C_p(X) \to C_p(Y|X)$ — уплотнение (взаимно однозначное непрерывное отображение).

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств. Двойственное к f отображение $f^{\#}\colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ определяется правилом $f^{\#}(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$ для $\varphi \in \mathbb{R}^Y$, $x \in X$, т.е. $f^{\#} = \varphi \circ f$.

Теорема

1. *Отображение $f^{\#}$ непрерывно.*
2. *Если $f(X) = Y$, то $f^{\#}$ — вложение и $f^{\#}(\mathbb{R}^Y)$ замкнуто в $\mathbb{R}^X$.*

1. Пусть $f^{\#}(\varphi) = \psi$ и $W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ — стандартная окрестность точки ψ в пространстве $\mathbb{R}^X$. Для $y_i = f(x_i)$, $i \leqslant k$, имеем $f^{\#}(W(\varphi, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)) \subset W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$. Значит, $f^{\#}$ непрерывно.

2. Пусть $f(X) = Y$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^Y$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Возьмём $y \in Y$ такое, что $\varphi_1(y) \neq \varphi_2(y)$. При $x \in f^{-1}(y)$ имеем $f^{\#}(\varphi_1)(x) = \varphi_1(y) \neq \varphi_2(y) = f^{\#}(\varphi_2)(x)$. Значит, $f^{\#}(\varphi_1) \neq f^{\#}(\varphi_2)$, т.е. $f^{\#}$ инъективно. Обратное отображение $(f^{\#})^{-1}\colon \varphi \circ f \mapsto \varphi$ непрерывно: если $\psi = f^{\#}(\varphi)$, т.е. $\psi = \varphi \circ f$, то для произвольной стандартной окрестности $U = W(\varphi, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ точки φ в $\mathbb{R}^Y$ имеем $f^{\#}(W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)) \subset U \ \ \forall x_i \in f^{-1}(y_i)$. Очевидно, $f^{\#}(\mathbb{R}^Y) = \{\varphi \in \mathbb{R}^X : \text{если } f(x_1) = f(x_2), \text{ то } \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ замкнуто. □

Теорема

Пусть $f\colon X \to Y$ *— отображение и* $f(X) = Y$*. Тогда*

1. f *непрерывно* $\iff$ $f^{\#}(C(Y)) \subset C(X)$;
2. *если* f *— факторное отображение, то* $f^{\#}(C(Y))$ *замкнуто в* $C_p(X)$;
3. f *— уплотнение (непрерывная биекция)* $\iff$ $f^{\#}(C(Y))$ *всюду плотно в* $C_p(X)$ *(и тогда* $f\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ *— гомеоморфное вложение в силу предыдущей теоремы);*
4. f *— гомеоморфизм* $\iff$ $f^{\#}(C(Y)) = C(X)$.

Доказательство. ❶ f непрерывно $\iff$ если $x \in \overline{A}$, то $f(x) \in \overline{f(A)}$. Если $f(x) \notin \overline{f(A)}$, то $\exists\, g \in C(Y)$ такая, что $g(f(x)) = 0$, $g(f(A)) = \{1\}$. Функция $f^{\#}(g) = g \circ f$ не непрерывна.

❷ Пусть f факторно, $\psi \in \overline{f^{\#}(C(Y))}^{C_p(X)}$. $\forall y \in Y$ все $\varphi \in f^{\#}(C(Y))$ постоянны на $f^{-1}(y)$ $\implies$ ψ постоянна на $f^{-1}(y)$ $\implies$ $\exists g\colon Y \to \mathbb{R}$ такая, что $\psi = g \circ f$, т.е. $\psi = f^{\#}(g)$. f факторно, ψ непрерывна $\implies$ g непрерывна.

3. Пусть f — уплотнение, $\varphi \in C(X)$ и $U = W(\varphi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ — стандартная окрестность φ. Положим $y_i = f(x_i)$, $i \leqslant k$. f — биекция $\implies \exists\, \psi \in C_p(X)$ такая, что $\psi(y_i) = \varphi(x_i)$ для $i \leqslant k$. Ясно, что $f^{\#}(\psi) \in U$.

   Обратно, если $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2) = y$, то $\forall \varphi \in f^{\#}(C(Y))\ \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Если $\psi \in C(X)$, $\psi(x_1) = 0$, $\psi(x_2) = 1$, то $W(\psi, x_1, x_2, \frac{1}{2}) \cap f^{\#}(C(Y)) = \varnothing$.

4. Знаем, что если $f^{\#}(C(Y)) = C(X)$, то f — уплотнение. Пусть f не является гомеоморфизмом. Тогда $\exists$ замкнутое $F \subset X$ такое, что $f(F)$ не замкнуто в Y. Возьмём $y \in \overline{f(F)} \setminus f(F)$ и $\varphi \in C(X)$ такую, что $\varphi(F) = \{0\}$ и $\varphi(x) = \{1\}$, где $x = f^{-1}(y)$. Если $\psi \in \mathbb{R}^Y$ и $f^{\#}(\psi) = \varphi$, то $\psi(y) = 1$ и $\psi(f(F)) = \{0\} \implies \psi$ не непрерывна. $\implies \varphi \notin f^{\#}(C(Y))$. Противоречие. $\square$