Одна нерешённая задача

Теорема Нильсена–Шрайера для топологических групп

Обозначения:

X — тихоновское пространство

$F(X)$ — свободная топологическая группа пространства X

$A(X)$ — свободная абелева топологическая группа X

$B(X)$ — свободная булева топологическая группа X

$L(X)$ — свободное ЛВП (локально выпуклое пространство) пространства X

Все эти объекты определяются соответствующим универсальным свойством: $F(X)$ ($A(X)$, $B(X)$, $L(X)$) — это топологическая группа (абелева топологическая группа, булева топологическая группа, ЛВП), которая содержит X в качестве подпространства, порождена множеством X и обладает тем свойством, что любое непрерывное отображение пространства X в топологическую группу (абелеву топологическую группу, булеву топологическую группу, ЛВП) Y продолжается до непрерывного гомоморфизма (гомоморфизма, гомоморфизма, линейного отображения).

Пространство $L_p(X)$ тоже определяется универсальным свойством:

Предложение 1

Топология пространства $L_p(X)$ — самая слабая из всех топологий, которые превращают $L_p(X)$ в топологическое векторное пространство, индуцируют на X его собственную топологию и обладают тем свойством, что любая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ продолжается до непрерывной линейной функции $L_p(X) \to \mathbb{R}$.

Доказательство. $L_p(X)$ — линейная оболочка в $C_pC_p(X)$ пространства X, которое гомеоморфно вложено в $C_pC_p(X)$ отображением вычисления. Предбаза топологии $C_pC_p(X)$ состоит из множеств вида $\{\varphi \in C_pC_p(X) : \varphi(f) \in U\}$, где $f \in C(X)$ и $U \subset \mathbb{R}$ открыто. Из того, что $L_p(X) = \{\lambda_1 e_{x_1} + \ldots + \lambda_n e_{x_n} : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X\}$ и $e_x(f) = f(x)$ для $x \in X$ и $f \in X(C)$, причём мы отождествляем x и e_x, следует, что предбаза $L_p(X)$ состоит из множеств

$$\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \in U\},$$

где $f \in C(X)$ и $U \subset \mathbb{R}$ открыто. Линейное продолжение $\hat{f}$ произвольной функции $f : X \to \mathbb{R}$ на $L_p(X)$ определено правилом $\hat{f}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots$ $\ldots + \lambda_n f(x_n)$, так что все элементы предбазы должны принадлежать любой топологии, относительно которой все такие продолжения непрерывны. С другой стороны, их открытость в $L_p(X)$ обеспечивает непрерывность продолжений. □

Предложение 2

Каждое непрерывное отображение $\varphi\colon X \to Y$ продолжается до непрерывного линейного отображения $\hat\varphi\colon L_p(X) \to L_p(Y)$.

Доказательство. Положим $\hat\varphi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1\varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(x_n)$. Отображение $\hat\varphi$ линейно. Проверим непрерывность. Пусть $V = \{\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, y_i \in Y, \lambda_1 f(y_1) + \ldots + \lambda_n f(y_n) \in U\}$, где $f \in C(Y)$ и $U \subset \mathbb{R}$ открыто, — элемент предбазы $L_p(Y)$. Линейность $\implies$ подпространство $\hat\varphi(L_p(X))$ пространства $L_p(Y)$ порождено множеством $\varphi(X)$ $\implies$

$$V \cap \hat\varphi(L_p(X)) =$$
$$= \{\lambda_1\varphi(x_1)+\ldots+\lambda_n\varphi(x_n) : n\in\mathbb{N}, \lambda_i\in\mathbb{R}, x_i\in X, \lambda_1 f(\varphi(x_1))+\ldots+\lambda_n f(\varphi(x_n))\in U\} =$$
$$= \{\hat\varphi(\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n) : n\in\mathbb{N}, \lambda_i\in\mathbb{R}, x_i\in X, \lambda_1 f(\varphi(x_1))+\ldots+\lambda_n f(\varphi(x_n))\in U\}.$$

Для $g = f \circ \varphi\colon X \to \mathbb{R}$ имеем

$$\hat\varphi^{-1}(V) = \hat\varphi^{-1}(V \cap \hat\varphi(L_p(X)) =$$
$$= \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, \lambda_1 g(x_1) + \ldots + \lambda_n g(x_n) \in U\}.$$

Это элемент предбазы пространства $L_p(X)$. Итак, прообраз при $\hat\varphi$ всякого элемента предбазы пространства $L_p(Y)$ открыт, а значит, φ непрерывно. $\square$

Теорема (Nielsen+Schreier)

Любая подгруппа свободной группы свободна.

Для свободных топологических групп это не так. Пример — свободная топологическая группа $F(X)$ пространства $X = [0,1]$ и её подгруппа $\langle Y \rangle$, порождённая множеством $Y = (0,1)$: не существует топологического пространства Z, для которого свободная топологическая группа $F(Z)$ топологически изоморфна группе $\langle Y \rangle$.

Проблема

Описать пары пространств X и Y с тем свойством, что $F(Y)$ ($A(Y)$, $B(Y)$) вкладывается в $F(X)$ ($A(X)$, $B(X)$) в качестве топологической подгруппы.

Теорема (Nickolas)

Если X — индуктивный предел вложенной последовательности компактов (т.е. $X = \bigcup K_n$, где K_n — компакт и $K_n \subset K_{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $U \subset X$ открыто $\iff$ $U \cap K_n$ открыто в K_n для всех $n \in \mathbb{N}$), то $F(X^n)$ вкладывается в $F(X)$ в качестве замкнутой подгруппы для любого n. В частности, свободная топологическая группа конечномерного куба вкладывается в свободную топологическую группу отрезка.

Eli Katz+Morris+Nickolas: $A((0,1))$ вкладывается в $A([0,1])$ в качестве замкнутой подгруппы.

Гипотеза (Katz+Morris+Nickolas) (опровергнута)

Если свободная абелева топологическая группа $A(Y)$ вкладывается в качестве топологической подгруппы в свободную абелеву топологическую группу $A(X)$, то размерность пространства Y не превосходит размерности X.

Теорема (Лейдерман+Morris+Пестов)

$L([0,1]^n)$ вкладывается в $L([0,1])$ в качестве замкнутого топологического векторного подпространства.

Следствие (Лейдерман+Morris+Пестов)

$A([0,1]^n)$ вкладывается в $A([0,1])$ в качестве замкнутой подгруппы для любого $n \in \mathbb{N}$.

ФАКТЫ

1. X вкладывается в $C_p(C_p(X))$ с помощью отображения вычисления значения функции в точке. Порождённое им подпространство $L_p(X)$ — это $L(X)$ со слабой топологией.
2. (Flood, В.В. Успенский) Если X — компакт, то $L(X)$ — векторное подпространство пространства $C_k(C_k(X))$.
3. (Архангельский) Если X и Y — компакты и $f\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ — непрерывное линейное отображение, то f непрерывно и относительно компактно-открытых топологий на $C_k(X)$ и $C_k(Y)$.
4. (Лейдерман+Morris+Пестов) Если X и Y — компакты и $h\colon L_p(X) \to L_p(Y)$ — изоморфное вложение, то h остаётся изоморфным вложением и относительно топологий свободных KDG $L(X)$ и $L(Y)$.
5. (Ткаченко $\to$ В.В. Успенский) $A(X)$ является замкнутой подгруппой аддитивной группы свободного ЛВП $L(X)$.

Определение

Набор непрерывных функций $\psi_1, \dots, \psi_m$ из X в $[0,1]$ называется базисным, если любую непрерывную функцию $f : X \to \mathbb{R}$ можно представить как

$$f = \sum_{i=1}^{m} g_i \circ \psi_i,$$

где $g_i \in C[0,1]$ для $i \leqslant m$.

Теорема Колмогорова о суперпозиции (Арнольд+Колмогоров)

Для любого конечномерного куба $[0,1]^n$ существует конечный базисный набор функций.

Более того, каждую функцию ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j \leqslant n} \varphi_{ij}(x_j),$$

где все φ_{ij} — непрерывные функции $[0,1] \to [0,1]$.

Доказательство, что $A([0,1]^n) \subset A([0,1])$

Пусть $\psi_1, \dots, \psi_m$ — базисный набор для $[0,1]^n$, и пусть I_i — копии отрезка $[0,1]$. Считаем, что каждая функция ψ_i принимает значения в своей копии I_i. Положим $X = I_1 \oplus \dots \oplus I_m$ и будем трактовать ψ_i как (непрерывные) функции $[0,1]^n \to X$.

В силу предложения 2 каждая функция ψ_i продолжается до непрерывной линейной функции $\hat{\psi}_i \colon L_p([0,1]^n) \to L_p(X)$. Положим $\Psi = \sum \hat{\psi}_i$ (сложение поточечное). Это непрерывное линейное отображение $L_p([0,1]^n) \to L_p(X)$.

Лемма

Для любой непрерывной функции $f \colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ существует непрерывный линейный функционал $\tilde{f} \colon \Psi(L_p([0,1]^n)) \to \mathbb{R}$ такой, что $\tilde{f} \circ \Psi|_{[0,1]^n} = f$.

Доказательство. Имеем $f(x) = \sum g_i \circ \psi_i$ для некоторых $g_i \in C([0,1])$. Для $y \in I_i$ положим $G(y) = g_i(y)$. Получили непрерывную функцию $G \colon X \to \mathbb{R}$ (все I_i открыто-замкнуты в $X = \bigoplus I_i$). Продолжим G до непрерывного линейного функционала $\hat{G} \colon L_p(X) \to \mathbb{R}$. Положим $\tilde{f} = \hat{G}|_{\Psi(L_p([0,1]^n))}$. Для $x \in [0,1]^n$ имеем

$$(\tilde{f} \circ \Psi)(x) = \hat{G}(\Psi(x)) = \hat{G}(\sum \psi_i(x)) = \sum G(\psi_i(x)) = \sum g_i \circ \psi_i(x) = f(x). \qquad \square$$

Покажем, что Ψ изоморфно отображает $L_p([0,1]^n)$ на $\Psi(L_p([0,1]^n))$. Надо проверить, что образ $\Psi([0,1]^n)$ базиса — линейно независимое множество (и тогда это базис в $\Psi(L_p([0,1]^n))$). Пусть $x_1,\ldots,x_k \in [0,1]^n$ — попарно различные точки и $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Возьмём непрерывную функцию $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ такую, что $f(x_i) = \frac{1}{\lambda_i}$ для $i \leqslant k$. Лемма $\implies$ $\exists$ непрерывный линейный функционал $\tilde f$ на $\Psi(L_p([0,1]^n))$ такой, что $\tilde f(\Psi(x_i)) = f(x_i) = \frac{1}{\lambda_i}$ для $i \leqslant k$. Имеем $\tilde f(\lambda_1(\Psi(x_1)) + \ldots + \lambda_1(\Psi(x_k))) = \lambda_1 \tilde f(\Psi(x_1)) + \ldots + \lambda_k \tilde f(\Psi(x_k)) = k \neq 0$. Значит, никакая нетривиальная линейная комбинация элементов вида $\Psi(x_i)$ с разными x_i не равна нулю.

Итак, $\Psi\colon L_p([0,1]^n) \to \Psi(L_p([0,1]^n))$ — изоморфизм, и он непрерывен, т.е. топология пространства $\Psi(L_p([0,1]^n))$ не сильнее топологии пространства $L_p(\Psi([0,1]^n))$ (которое совпадает с ним как векторное пространство без топологии). По предложению 1 чтобы показать, что она и не слабее, надо проверить, что любая непрерывная функция $\varphi\colon \Psi([0,1]^n) \to \mathbb{R}$ продолжается до непрерывного линейного функционала $\hat\varphi\colon \Psi(L_p([0,1]^n)) \to \mathbb{R}$. Положим $f = \varphi \circ \Psi|_{[0,1]^n}$. Нужный функционал $\hat\varphi$ — это непрерывный функционал $\tilde f\colon \Psi(L_p([0,1]^n)) \to \mathbb{R}$, для которого $\tilde f \circ \Psi|_{[0,1]^n} = f$ и который существует в силу леммы.

Мы топологически изоморфно вложили $L_p([0,1]^n)$ в $L_p(X)$. Пространство $X = \bigoplus_{i\leqslant m} I_i$ гомеоморфно вкладывается в $[0,1]$. Предложение 2 $\implies$ вложение $X \hookrightarrow [0,1]$ продолжается до непрерывного линейного отображения $\Phi\colon L_p(X) \to$ $\to L_p([0,1])$, причём Φ — изоморфизм, так как базис переходит в часть базиса. Любая непрерывная функция $f\colon \Phi(X) \to \mathbb{R}$ продолжается на $[0,1]$ (так как $\Phi(X)$ — компакт), и её продолжение продолжается до непрерывного линейного функционала $L_p([0,1]) \to \mathbb{R}$. Сужение этого функционала на $\Phi(L_p(X))$ — непрерывное линейное продолжение функции f. Значит, линейное подпространство $\Phi(L_p([0,1])$ пространства $L_p([0,1])$ топологически изоморфно пространству $L_p(X)$.

Итак, $L_p([0,1]^n)$ изоморфно вкладывается в $L_p([0,1])$. Факт 4 $\implies$ $L([0,1]^n)$ изоморфно вкладывается в $L([0,1])$. Факт 5 $\implies$ $A([0,1]^n)$ изоморфно вкладывается в $A([0,1])$. $\square$

Теорема (Лейдерман+Morris+Пестов)

Для тихоновского пространства X следующие условия равносильны:

1. $A(X)$ *вкладывается в* $A([0,1])$ *как топологическая подгруппа;*
2. $F(X)$ *вкладывается в* $F([0,1])$ *как топологическая подгруппа;*
3. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, *где все* K_n *— конечномерные метризуемые компакты и* $U \subset X$ *открыто* $\iff$ $U \cap K_n$ *открыто в* K_n *для каждого* $n \in \mathbb{N}$.

Булевы группы

Пусть $\mathscr{U}$ — рамсеевский ультрафильтр на ω (это фильтр специального вида, который существует в предположении справедливости континуум-гипотезы CH). Положим $X_* = \omega \cup \{p\}$, все точки $x \in \omega$ изолированы, окрестности точки p — множества вида $U \cup \{p\}$, где $U \in \mathscr{U}$.

Теорема (Sirota+Thuemel)

Свободная булева топологическая группа $B(X_*)$ пространства X_* экстремально несвязна, т.е. замыкание всякого открытого множества в ней открыто.

Предложение

Пространство $X_* \times X_*$ не вкладывается в $B(X_*)$.

Доказательство. $X_* \times X_*$ счётно и не экстремально несвязно: $h\colon X_* \times X_* \to X_* \times X_*$, $(x, y) \mapsto (y, x)$, — автогомеоморфизм. Множество его неподвижных точек — $\Delta = \{(x, x) : x \in X_*\}$.

Frolík: 1. *Множество неподвижных точек любого автогомеоморфизма экстремально несвязного пространства открыто.*

2. *Экстремальная несвязность наследуется счётными подпространствами.* $\square$

Предложение

Если сумма $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ *P-вложена в* X*, то* σ*-произведение* $\sigma_{\alpha\in A} X^\alpha$ *вложено в* $B(X)$*.*

В частности, если сумма $\underbrace{X \oplus \ldots \oplus X}_{n \text{ раз}}$ *P-вложена в* X*, то произведение* X^n *вложено в* $B(X)$*.*

Доказательство. $B(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} B(X_\alpha)$ (несложное упражнение). □

Следствие

$[0,1]^n$ *вложено в* $B([0,1])$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$*.*

Теорема

Свободная булева топологическая группа $B((0,1))$ *вкладывается в* $B([0,1])$ *в качестве замкнутой подгруппы.*

Проблема

Существует ли в ZFC пример пространства X, квадрат которого не вкладывается (замкнуто) в $B(X)$? некоторая конечная степень не вкладывается (замкнуто) в $B(X)$?

Проблема

Верно ли, что свободная булева топологическая группа $B([0,1]^2)$ топологически изоморфна (замкнутой) подгруппе группы $B([0,1])$?