Максимальные и неразложимые пространства

Определение 1 (Hewitt 1943)**.** Топологическое пространство *максимально*, если оно плотно в себе (т.е. не содержит изолированных точек) и при любом усилении его топологии изолированные точки появляются. T_i-пространство X является *максимальным* T_i-пространством, если оно плотно в себе и X с любой строго более сильной T_i-топологией содержит изолированные точки.

Теорема 1 (van Dowen)**.**
- *Максимальные хаусдорфовы пространства максимальны.*
  (потому что любая более сильная топология хаусдорфова)
- *Каждое максимальное пространство является T_1-пространством.*
  (иначе можно добавить к топологии все пересечения открытых множеств с дополнениями до конечных и получится более сильная топология без изолированных точек)
- *Существует счётное хаусдорфово максимальное пространство.*
  (можно взять пространство рациональных чисел, рассмотреть семейство всех топологий без изолированных точек на множестве рациональных чисел, содержащих обычную топологию, упорядочить эти топологии по включению и применить лемму Цорна)
- *Существует счётное максимальное T_3 пространство.*
- *Существует регулярное счётное максимальное пространство.*

Определение 2. Топологическое пространство
- *экстремально несвязно*, если для любых открытых U и V
  $$U \cap V = \varnothing \implies \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing,$$
  или (эквивалентное условие) U открыто $\implies$ $\overline{U}$ открыто;
- *ультранесвязно*, если оно плотно в себе и для любых плотных в себе A и B $A \cap B = \varnothing \implies \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$;
- *совершенно несвязно*, если для любых A и B
  $$A \cap B = \varnothing \implies A' \cap B' = \varnothing$$
  ($'$ — предельные точки), или (эквивалентное условие) любое плотное в себе множество открыто.

Определение 3. Пространство
- *неразложимо*, если в нём нет непересекающихся всюду плотных подмножеств;
- *nodec*, если любое нигде не плотное множество замкнуто.

Плотное в себе (= без изолированных точек) пространство максимально $\iff$ $\iff$ совершенно несвязно $\iff$ ультранесвязно + nodec $\iff$ экстремально несвязно + nodec + любое открытое неразложимо.

Если $X = D \cup \{*\}$, где D дискретно, то X экстремально несвязно $\iff$ $\{A \subset D : x \in \overline{A}\}$ — ультрафильтр на D.

Теорема 2 (van Douwen)**.** *Следующие условия равносильны:*
- *X совершенно несвязно;*
- $\forall x \in X \quad \{A \subset X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$ *— ультрафильтр на X;*
- $\forall A \subset X \ \forall x \in A \quad x \in \overline{A \setminus \{x\}} \implies x \in \operatorname{Int} A$.

Детали и доказательства можно найти в статье ван Дауэна. О связи максимальности и неразложимости с проблемой Катетова написано в статье Малыхина.