Максимальные и неразложимые пространства

Определение 1 (Hewitt 1943)**.** Топологическое пространство *максимально*, если оно плотно в себе (т.е. не содержит изолированных точек) и при любом усилении его топологии изолированные точки появляются. T_i-пространство X является *максимальным* T_i-пространством, если оно плотно в себе и X с любой строго более сильной T_i-топологией содержит изолированные точки.

Теорема 1 (van Dowen)**.**
- *Максимальные хаусдорфовы пространства максимальны.*
  (потому что любая более сильная топология хаусдорфова)
- *Каждое максимальное пространство является T_1-пространством.*
  (иначе можно добавить к топологии все пересечения открытых множеств с дополнениями до конечных и получится более сильная топология без изолированных точек)
- *Существует счётное хаусдорфово максимальное пространство.*
  (можно взять пространство рациональных чисел, рассмотреть семейство всех топологий без изолированных точек на множестве рациональных чисел, содержащих обычную топологию, упорядочить эти топологии по включению и применить лемму Цорна)
- *Существует счётное максимальное T_3 пространство.*
- *Существует регулярное счётное максимальное пространство.*

Определение 2. Топологическое пространство
- *экстремально несвязно*, если для любых открытых U и V
  $$U \cap V = \varnothing \implies \overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing,$$
  или (эквивалентное условие) U открыто $\implies$ $\overline{U}$ открыто;
- *ультранесвязно*, если оно плотно в себе и для любых плотных в себе A и B $A \cap B = \varnothing \implies \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$;
- *совершенно несвязно*, если для любых A и B
  $$A \cap B = \varnothing \implies A' \cap B' = \varnothing$$
  ($'$ — предельные точки), или (эквивалентное условие) любое плотное в себе множество открыто.

Определение 3. Пространство
- *неразложимо*, если в нём нет непересекающихся всюду плотных подмножеств;
- *nodec*, если любое нигде не плотное множество замкнуто.

Плотное в себе (= без изолированных точек) пространство максимально $\iff$ $\iff$ совершенно несвязно $\iff$ ультранесвязно + nodec $\iff$ экстремально несвязно + nodec + любое открытое неразложимо.

Если $X = D \cup \{*\}$, где D дискретно, то X экстремально несвязно $\iff$ $\{A \subset D : x \in \overline{A}\}$ — ультрафильтр на D.

Теорема 2 (van Douwen)**.** *Следующие условия равносильны:*
- *X совершенно несвязно;*
- $\forall x \in X \ \ \{A \subset X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$ *— ультрафильтр на X;*
- $\forall A \subset X \ \forall x \in A \quad x \in \overline{A \setminus \{x\}} \implies x \in \operatorname{Int} A$.

Детали и доказательства можно найти в статье ван Дауэна.

Теорема 3 (Frolìk)**.** *Множество неподвижных точек любого автогомеоморфизма $f\colon X \to X$ любого регулярного экстремально несвязного пространства X открыто.*

Теорема 4 (Елькин)**.** *Пространство X неразложимо $\iff$ на X существует ультрафильтр с базой, состоящей из открытых множеств.*

Топологические группы

Определение 4. Группа G с топологией $\mathscr{T}$ называется *топологической группой*, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента ${}^{-1}\colon G \to G$ непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G{\times}G$. При этом $\mathscr{T}$ называется *групповой* топологией, или *топологией, согласованной с групповыми операциями.*

Все топологические группы предполагаются T_0 ($\implies$ тихоновскими)

Определение 5. Группа G *булева*, если $\forall x \in G \ \ x \cdot x = 1$.

- Любая булева группа абелева (операция $+$, нейтральный элемент 0)
- Любая булева группа — векторное пространство над $\mathbb{F}_2 \implies$ есть базис
- Булева группа с базисом X — это $[X]^{<\omega}$ (все конечные подмножества X) с $0 = \varnothing$ и операцией

$$A + B = A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Теорема 5 (первая теорема Малыхина)**.** *Любая экстремально несвязная группа содержит открытую ($\implies$ экстремально несвязную) булеву подгруппу.*

Доказательство. Группа G экстремально несвязна $\implies$ множество U неподвижных точек гомеоморфизма $g \mapsto g^{-1}$ открыто. При этом $g \in U \iff g \cdot g = 1$.

U — окрестность 1, $1{\cdot}1 = 1$, умножение непрерывно $\implies$ у 1 есть окрестность V такая, что $V \cdot V \subset U$.

Для любых $u, v \in V \ \ uv = vu$: $uv = (uv)^{-1}$ (потому что $uv \in U$) $\implies$ $uv = v^{-1}u^{-1} = vu$ (потому что $u, v \in U$).

$\langle V \rangle$ — открытая булева подгруппа: $v_1 \dots v_n v_1 \dots v_n = v_1 v_1 \dots v_n v_n = 1$. □

Simon Sirota, 1969: Первый пример недискретной экстремально несвязной группы (в CH)

Для фильтра $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$ пусть $\mathbb{N}_{\mathscr{F}} = \omega \cup \{0\}$; точки $\mathbb{N}$ изолированы, окрестности 0 имеют вид $\{0\} \cup A$, где $A \in \mathscr{F}$.

$\mathbb{N}_{\mathscr{F}} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ($n \mapsto \{n\}$, $0 \mapsto \varnothing$). Окрестности 0: $\langle A \rangle$, $A \in \mathscr{F}$.

Если $\mathscr{F}$ — селективный (рамсеевский) ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то группа $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ с этой топологией экстремально несвязна.

Теорема 6 (вторая теорема Малыхина)**.** *В любой максимальной группе имеется счётная окрестность единицы.*

Доказательство (которое надо знать) содержится в статье Малыхина (теорема 2). В статье в формулировке теоремы опечатка: вместо «отделимых э.н.» следует читать «максимальных». Дисперсионный характер — это наименьшая мощность непустого открытого множества.

Следствие 1. *Если не существует быстрых ультрафильтров, то не существует и максимальных топологических групп.*

Действительно, из несуществования быстрых ультрафильтров следует несуществование недискретных счётных экстремально несвязных групп. Всякая максимальная группа экстремально несвязна (и недискретна). Групповая оболочка счётной окрестности единицы счётна, открыта (а значит, недискретна) и экстремально несвязна (так как экстремальная несвязность наследуется открытыми множествами).