

## Максимальные и неразложимые пространства

**Определение 1** (Hewitt 1943). Топологическое пространство *максимально*, если оно плотно в себе (т.е. не содержит изолированных точек) и при любом усилении его топологии изолированные точки появляются.  $T_i$ -пространство  $X$  является *максимальным  $T_i$ -пространством*, если оно плотно в себе и  $X$  с любой строго более сильной  $T_i$ -топологией содержит изолированные точки.

**Теорема 1** (van Dowen). • *Максимальные хаусдорфовы пространства максимальны.*

(потому что любая более сильная топология хаусдорфова)

- *Каждое максимальное пространство является  $T_1$ -пространством.*  
(иначе можно добавить к топологии все пересечения открытых множеств с дополнениями до конечных и получится более сильная топология без изолированных точек)
- *Существует счётное хаусдорфово максимальное пространство.*  
(можно взять пространство рациональных чисел, рассмотреть семейство всех топологий без изолированных точек на множестве рациональных чисел, содержащих обычную топологию, упорядочить эти топологии по включению и применить лемму Цорна)
- *Существует счётное максимальное  $T_3$  пространство.*
- *Существует регулярное счётное максимальное пространство.*

**Определение 2.** Топологическое пространство

- *экстремально несвязно*, если для любых открытых  $U$  и  $V$

$$U \cap V = \emptyset \implies \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset,$$

или (эквивалентное условие)  $U$  открыто  $\implies \bar{U}$  открыто;

- *ультранесвязно*, если оно плотно в себе и для любых плотных в себе  $A$  и  $B$   $A \cap B = \emptyset \implies \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ;
- *совершенно несвязно*, если для любых  $A$  и  $B$

$$A \cap B = \emptyset \implies A' \cap B' = \emptyset$$

( $'$  — предельные точки), или (эквивалентное условие) любое плотное в себе множество открыто.

**Определение 3.** Пространство

- *неразложимо*, если в нём нет непересекающихся всюду плотных подмножеств;
- *podec*, если любое нигде не плотное множество замкнуто.

Плотное в себе (= без изолированных точек) пространство максимально  $\iff \implies$  совершенно несвязно  $\iff$  ультранесвязно + podec  $\iff$  экстремально несвязно + podec + любое открытое неразложимо.

Если  $X = D \cup \{*\}$ , где  $D$  дискретно, то  $X$  экстремально несвязно  $\iff \{A \subset D : x \in \bar{A}\}$  — ультрафильтр на  $D$ .

**Теорема 2** (van Douwen). *Следующие условия равносильны:*

- $X$  совершенно несвязно;
- $\forall x \in X \quad \{A \subset X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$  — ультрафильтр на  $X$ ;
- $\forall A \subset X \quad \forall x \in A \quad x \in \overline{A \setminus \{x\}} \implies x \in \text{Int } A$ .

**Теорема 3** (Frolík). *Множество неподвижных точек любого автогомеоморфизма  $f: X \rightarrow X$  любого регулярного экстремально несвязного пространства  $X$  открыто.*

**Теорема 4** (Елькин). *Пространство  $X$  неразложимо  $\iff$  на  $X$  существует ультрафильтр с базой, состоящей из открытых множеств.*

### Топологические группы

**Определение 4.** Группа  $G$  с топологией  $\mathcal{T}$  называется *топологической группой*, если групповая операция (умножение)  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  и операция взятия обратного элемента  $^{-1} : G \rightarrow G$  непрерывны относительно топологии  $\mathcal{T}$  на  $G$  и топологии декартова произведения на  $G \times G$ . При этом  $\mathcal{T}$  называется *групповой топологией*, или *топологией, согласованной с групповыми операциями*.

*Все топологические группы предполагаются  $T_0$  ( $\implies$  тихоновскими)*

**Определение 5.** Группа  $G$  *булева*, если  $\forall x \in G \quad x \cdot x = 1$ .

- Любая булева группа абелева (операция  $+$ , нейтральный элемент  $0$ )
- Любая булева группа — векторное пространство над  $\mathbb{F}_2 \implies$  есть базис
- Булева группа с базисом  $X$  — это  $[X]^{<\omega}$  (все конечные подмножества  $X$ ) с  $0 = \emptyset$  и операцией

$$A + B = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Теорема 5** (Малыхин). *Любая экстремально несвязная группа содержит открытую ( $\implies$  экстремально несвязную) булеву подгруппу.*

*Доказательство.* Группа  $G$  экстремально несвязна  $\implies$  множество  $U$  неподвижных точек гомеоморфизма  $g \mapsto g^{-1}$  открыто. При этом  $g \in U \iff g \cdot g = 1$ .

$U$  — окрестность  $1$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ , умножение непрерывно  $\implies$  у  $1$  есть окрестность  $V$  такая, что  $V \cdot V \subset U$ .

Для любых  $u, v \in V \quad uv = vu$ :  $uv = (uv)^{-1}$  (потому что  $uv \in U$ )  $\implies uv = v^{-1}u^{-1} = vu$  (потому что  $u, v \in U$ ).

$\langle V \rangle$  — открытая булева подгруппа:  $v_1 \dots v_n v_1 \dots v_n = v_1 v_1 \dots v_n v_n = 1$ .  $\square$

Simon Sirota, 1969: Первый пример недискретной экстремально несвязной группы (в СН)

Для фильтра  $\mathcal{F}$  на  $\mathbb{N}$  пусть  $\mathbb{N}_{\mathcal{F}} = \omega \cup \{0\}$ ; точки  $\mathbb{N}$  изолированы, окрестности  $0$  имеют вид  $\{0\} \cup A$ , где  $A \in \mathcal{F}$ .

$\mathbb{N}_{\mathcal{F}} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega}$  ( $n \mapsto \{n\}$ ,  $0 \mapsto \emptyset$ ). Окрестности  $0$ :  $\langle A \rangle$ ,  $A \in \mathcal{F}$ .

Если  $\mathcal{F}$  — селективный (рамсеевский) ультрафильтр на  $\mathbb{N}$ , то группа  $[\mathbb{N}]^{<\omega}$  с этой топологией экстремально несвязна.