Максимальные пространства

1.1 **Опр.** Топологическое пространство X <u>максимально</u>, если его топология максимальна среди всех плотных в себе топологий на X. Если T_i — аксиома отделимости и $X \in T_i$ и его топология максимальна среди всех плотных в себе T_i-топологий, то X — <u>максимальное T_i-пространство</u>.

1.2 **Т.** (a) Существует (счётное) максимальное регулярное пространство.
(b) Существует хаусдорфово максимальное пространство.
(c) Максимальные хаусдорфовы пространства максимальны.
(d) Пространство максимально $\Leftrightarrow$ оно максимально T_1.

□ (d) $\Rightarrow$: Если X максимально, то

$$\mathcal{T} = \{U \setminus F : U \text{ открыто в } X \text{ и } F \subset X \text{ конечно}\}$$

— плотная в себе T_1-топология на X, и топология $X \subset \mathcal{T}$; значит, топология X совпадает с $\mathcal{T}$.
(c) и (d), $\Leftarrow$: T_1 и T_2 сохраняются прообразами при уплотнениях.
(a) и (b): На ω имеется регулярная плотная в себе топология $\mathcal{T}$. Для $i = 2, 3$ пусть P_i — ч.у.м. (по включению) всех плотных в себе топологий на ω, содержащих $\mathcal{T}$.
■ К ним применима лемма Цорна.

1.3 **Опр.** Пространство X <u>совершенно несвязно</u>, если непересекающиеся множества имеют непересекающиеся замыкания, или, что равносильно, если $p \in \overline{A \setminus \{p\}}$, то $p \in \mathrm{Int}(A \cup \{p\})$.

В дальнейшем мы увидим, что максимальность = совершенная несвязность + плотность в себе.

1.4 **Опр.+Факт** Пространство X <u>ультранесвязно</u>, если оно плотно в себе и выполнено любое из равносильных условий:
(a) любые два непересекающихся плотных в себе множества имеют непересекающиеся замыкания;
(б) непустое собственное $A \subset X$ о.з. $\Leftrightarrow$ A и $X \setminus A$ плотны в себе.

□ (a) $\Rightarrow$ (б) ясно.
(б) $\Rightarrow$ (a): Пусть A и B — непересекающиеся плотные в себе подмножества X. Очевидно $\overline{A \cup B}$ и $X \setminus \overline{(A \cup B)}$ плотны в себе (второе потому что открыто). Значит, $\overline{A \cup B}$ открыто-замкнуто.

Положим
$$A^\# = \overline{A} \setminus B \text{ и } B^\# = \overline{B} \setminus A^\# = \overline{B} \setminus \overline{A} \cup B.$$
Ясно, что
$$A^\# \cap B^\# = \emptyset \text{ и } A \subset A^\# \subset \overline{A} \text{ и}$$
$$B \subset B^\# \subset \overline{B} \text{ и } A^\# \cup B^\# = \overline{A \cup B}.$$
Следовательно, $X \setminus A^\# = B^\# \cup \overline{A \cup B}$ и $A^\#$ и $B^\#$ плотны в себе. $X \setminus \overline{A \cup B}$ тоже плотно в себе (так как открыто) $\Rightarrow A^\#$ о-з
$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, так как $A \subset A^\#$ и $B \cap A^\# = \emptyset$. ▨

1.5 **Факт** Если X ультракесвязно, то
(a) любое замкнутое плотное в себе подмножество X открыто;
(b) X экстремально несвязно;
(c) любое плотное в себе подмножество X ультракесвязно.

□ (a) По определению ультракесвязное пространство плотно в себе $\Rightarrow$ у замкнутых подмножеств дополнения плотны в себе.
(b) $\Leftarrow$ (a)
(c) Тривиально. ▨

1.6 **Факт** Для $i = 1, 2, 3$ максимальные T_i-пространства ультракесвязны.

□ Пусть $A \subset X$, A и $X \setminus A$ плотны в себе. Тогда $A \oplus X \setminus A$ плотно в себе и T_i, значит, топология этой суммы содержит топологию X. ▨

1.7 **След.** Максимально регулярные пространства экстремально несвязны и, следовательно, нульмерны.

1.8 $\boxed{\text{Т.}}$ X максимальное регулярное $\Leftrightarrow$ X регулярно и ультракесвязно.

□ $\Rightarrow$ Вытекает из предыдущего факта.
$\Leftarrow$: Пусть $\mathcal{T}_X$ — топология X и $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_X$ — регулярная плотная в себе топология. Возьмем $O \in \mathcal{T}$ и покажем, что $O \in \mathcal{T}_X$. Пусть $x \in O$. $(X, \mathcal{T})$ регулярно $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ т., что $x \in U$ и $\overline{U}^{\mathcal{T}} \subset O$. $\mathcal{T}$ плотна в себе $\Rightarrow \overline{U}^{\mathcal{T}}$ и $X \setminus \overline{U}^{\mathcal{T}}$ плотны в себе относительно $\mathcal{T}$ а значит и относительно $\mathcal{T}_X$, так как $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}_X$. X ультракесвязно $\Rightarrow \overline{U}^{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}_X$. Значит,
$x \in \mathrm{Int}_{\mathcal{T}_X} O$. ▨

Существуют максимальные регулярные немаксимальные пространства.

Опр. 1.10 Пространство неразложимо, если оно плотно в себе и никакое плотное множество не имеет плотного дополнения.

1.11 Факт Ультрасвязные пространства наследственно (по плотным в себе множествам) неразложимы.

Пример 1.12 Существует плотное в себе пространство, все открытые подпространства которого неразложимы, но имеется разложимое плотное в себе подпространство.

1.13 Факт Для плотного в себе X следующие условия равносильны:
(a) X неразложимо и все его открытые подпространства неразложимы;
(b) $\forall A \subset X$ $\operatorname{Int} A = \varnothing \Rightarrow A$ нигде не плотно.

□ (a) ⇒ (b): Пусть $A \subset X$, $\operatorname{Int} A = \varnothing$, $\varnothing \neq U \subset X$ открыто. Поскольку $\operatorname{Int} A = \varnothing$, $U \setminus A$ плотно в U. Поскольку U неразложимо, A не плотно в U.
(b) ⇒ (a): Пусть $\varnothing \neq Y \subset X$ открыто и $A \subset Y$ плотно в Y. Тогда A не является нигде не плотным; значит, $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$. Поскольку $A \subset Y$, $Y \setminus A$ не плотно в Y. Значит, Y неразложимо. ■

1.14 Опр+Факт Пространство X называется nodec, если выполнено одно из равносильных условий:
(a) любое нигде не плотное подпространство замкнуто;
(b) любое нигде не плотное подпространство замкнуто и дискретно;
(c) любое множество, содержащее открытое всюду плотное подмножество, открыто.

1.15 Факт Ультрасвязное пространство nodec ⇔ любое дискретное подпространство в нём замкнуто.

□ ⇒: Ясно.
⇐: Пусть A нигде не плотно. Покажем, что в нём нет плотных в себе подмножеств. Пусть $B \subset A$. Тогда $X \setminus B$ плотно в X и, следовательно, плотно в себе. Значит, B не плотно в себе. Следовательно, множество изолированных точек подпространства A плотно в A. Оно замкнуто в X по предположению ⇒ A дискретно. ■

Совершенно несвязные плотные в себе пространства

2.1 **Т.** Для ~~плотного в себе~~ пространства X следующие условия равносильны:

(a) X совершенно несвязно;

(b) $\forall \overset{\text{неизолир.}}{x \in X}$ $\{A \subset X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$ — ультрафильтр на X;

(c) $\forall A \subset X$ $\forall x \in A$ $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in \operatorname{Int} A$.

□ (a) $\Rightarrow$ (b): Пусть $\overset{\text{неизолир.}}{x} \in X$. Положим

$$\mathcal{U} = \{A \subset X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}.$$

Надо показать, что $\mathcal{U}$ — ультрафильтр. Ясно, что $X \in \mathcal{U}$, и что $\mathcal{U}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Из совершенной несвязности следует также, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathcal{U}$, либо $X \setminus A \in \mathcal{U}$. (и $\varnothing \notin \mathcal{U}$).

(b) $\Rightarrow$ (a) очевидно.

(a) $\Rightarrow$ (c): пусть $A \subset X$ и $\overset{\text{неизолир. в } X}{x} \in A$. [Если $x \in \operatorname{Int} A$, то $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ (т.к. x не изолирована).] Если $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, то $x \notin \overline{(X \setminus A) \setminus \{x\}}$, т.к. X совершенно несвязно. Значит, $x \notin \overline{X \setminus A}$, поскольку $x \in A$, т.е. $x \in \operatorname{Int} A$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Пусть $A \subset X$ и $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Тогда $x \in \overline{(A \cup \{x\}) \setminus \{x\}}$. Применяя (c) к $A \cup \{x\}$, получаем, что $x \in \operatorname{Int}(A \cup \{x\})$. ■

2.2 **Т.** Для плотного в себе пространства X следующие условия равносильны:

(a) X совершенно несвязно;

(b) $A \subset X$ открыто $\Leftrightarrow$ A плотно в себе;

(c) X максимально;

(d) X ультранесвязно и nodec;

(e) X экстремально несвязно, все его открытые подпространства неразложимы и X nodec.

□ (a) $\Rightarrow$ (b): Пусть $A \subset X$. Если A плотно в себе, то оно открыто в силу импликации (a) $\Rightarrow$ (c) в теореме 2.1. Если A открыто, то оно плотно в себе, т.к. X плотно в себе.

(b) $\Rightarrow$ (c) очевидно.

(c) $\Rightarrow$ (d): X ультранесвязно в силу факта 16 и теоремы 12 (d). Покажем, что X nodec. Пусть $D \subset X$, $\overline{D} = X$. Ясно, что

$$\mathcal{T} = \{U \cup (V \cap D) : U, V \in \mathcal{T}_X\} \quad (\text{здесь } \mathcal{T}_X \text{ — топология } X)$$

— топология на X и $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. Покажем, что в ней нет изолированных точек. Пусть $x \in X$, $U, V \in \mathcal{T}_X$. Имеем $U \neq \{x\}$, т.к. X плотно в себе, и $V \setminus \{x\} \neq \varnothing$. По теореме 1.2 (d) $X \in T_1 \Rightarrow V \setminus \{x\}$ открыто. Значит, $(V \setminus \{x\}) \cap D \neq \varnothing$, так что $V \cap D \neq \{x\}$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Ультранесвязные пространства экстремально несвязны и все их открытые подмножества неразложимы в силу фактов 1.5 и 1.11.

(e) $\Rightarrow$ (a): Покажем, что X удовлетворяет условию (c) в теореме 2.1. Пусть $A \subset X$ и $x \in A$, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Сперва покажем, что $x \in \operatorname{Int} \overline{A}$. Ясно, что $\operatorname{Int}(A \setminus \operatorname{Int} A) = \emptyset$. Поскольку открытые подмножества X неразложимы, из факта 1.13 вытекает, что $A \setminus \operatorname{Int} A$ нигде не плотно. Значит, $x \notin \overline{(A \setminus \operatorname{Int} A) \setminus \{x\}}$, откуда $x \in \overline{\operatorname{Int} A \setminus \{x\}}$.

Поскольку X экстремально несвязно, $\overline{\operatorname{Int} A}$ открыто. Кроме того, $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} A) = \overline{\operatorname{Int} A} \setminus \operatorname{Int} A$ нигде не плотно, а значит, замкнуто и дискретно. Следовательно, $(\overline{\operatorname{Int} A} \setminus \operatorname{Int} A) \setminus \{x\}$ замкнуто. Поскольку $\overline{\operatorname{Int} A}$ открыто, множество

$$\operatorname{Int} A \cup \{x\} = \overline{\operatorname{Int} A} \setminus \left((\overline{\operatorname{Int} A} \setminus \operatorname{Int} A) \setminus \{x\} \right)$$

тоже открыто. Отсюда вытекает, что $x \in \operatorname{Int} A$, потому что $x \in A$.