Введение в топологию

Евгений Резниченко

16 ноября 2024 г.

Оглавление

Введение

Вводный курс в топологию, механико математический факультет, 2-ой курс.

Глава 1

Базовые понятия математики, теория множеств

1.1 Упорядоченные множества, ординалы, кардиналы, аксиома выбора

1.1.1 Упорядоченные множества

Пусть X множество и $<$ отношение на X. Множество с отношением также обозначается как $(X, <)$. Если выполняются условия

(O_1) (транзитивность) если $x < y$ и $y < z$, то $z < z$;

(O_2) (строгая антисимметричность) если $x < y$, то $y \nless x$.

то множество называется *частично упорядоченным* (ч.у.м). С отношением $<$ связана отношение $\leqslant$, $x \leqslant y$ если $x < y$ или $x = y$. Обозначим интервалы в X:

$$\begin{aligned}
(-\infty, b)_X &= \{x \in X \,:\, x < b\}, & (-\infty, b]_X &= \{x \in X \,:\, x \leqslant b\},\\
(a, +\infty)_X &= \{x \in X \,:\, a < x\}, & [a, +\infty)_X &= \{x \in X \,:\, a \leqslant x\},\\
(a, b)_X &= \{x \in X \,:\, a < x < b\}, & [a, b]_X &= \{x \in X \,:\, a \leqslant x \leqslant b\},\\
(a, b]_X &= \{x \in X \,:\, a < x \leqslant b\}, & [a, b)_X &= \{x \in X \,:\, a \leqslant x < b\}
\end{aligned}$$

для $a, b \in X$. Индекс X будем опускать, когда из контекста понятно какое линейно упорядоченное множество имеется в виду.

Отображение $f : X \to Y$ частично упорядоченных называется (строго) возрастающим, если из $x < y$ вытекает $f(x) \leqslant y$ ($f(x) < y$). Отображение f называется *порядковым изоморфизмом*, если f биекция и $x < y$ если и только если $f(x) < f(y)$ для $x, y \in X$. Биекция f является порядковым изоморфизмом если и только если отображения f и f^{-1} возрастающее.

Пусть $M \subset X$. На множестве M есть порядок $<_M$, наследуемый из X: для $x, y \in M$, $x <_M y$ если $x < y$. На множестве M будем предполагать этот порядок.

Элемент $a \in M$ называется *минимумом* множества M, записывается $a = \min M$, если $x \nless a$ для $x \in M$. Элемент $b \in M$ называется *максимумом* множества M, записывается $b = \max M$, если $b \nless x$ для $x \in M$.

Если дополнительно выполняется условие

(O_3) либо $x < y$, либо $y < x$, для различных x и y,

то множество называется *линейно упорядоченным* (л.у.м).

Отображение $f : X \to Y$ линейно упорядоченных множеств является порядковым изоморфизмом, если и только если f сюръекция и отображение f строго возрастающее. Цепь в частично упорядоченном множестве это линейно упорядоченное подмножество. Подмножество линейно упорядоченного множества линейно упорядоченно.

Пусть $M \subset X$. Элемент $a \in X$ называется *инфинумом* множества M, записывается $a = \inf M$, если $M \subset [a, +\infty)$ и $M \cap [a, x) \neq \varnothing$ для каждого $x \geqslant x$. Элемент $b \in X$ называется *супремумом* множества M, записывается $b = \sup M$, если $M \subset (-\infty, b]$ и $M \cap (x, b] \neq \varnothing$ для каждого $x \leqslant b$. Множество M *ограниченно сверху*, если существует $b \in X$, такое что $M \subset (-\infty, b]$. Множество M *ограниченно снизу*, если существует $a \in X$, такое что $M \subset [a, -\infty)$. Множество M *ограниченно*, если оно ограниченно сверху и снизу. Множество M называется *начальным интервалом* X, если из того что $x \in M$ и $y < x$ вытекает $y \in M$. Начальным интервал M назовем *собственным*, если $M \neq X$.

Если дополнительно выполняется условие

(O_4) существует минимум $\min M$ множества M для каждого непустого $M \subset X$

то множество называется *вполне упорядоченным* (в.у.м).

Пусть $M \subset X$. Тогда M вполне линейно упорядоченно и ограниченно снизу. Множество M ограниченно тогда и только тогда, когда M ограниченно сверху.

1.1.2 Ординалы

Множество λ назовем *ординалом*, если выполняются условия

(Ord_0) каждый элемент λ является множеством (λ — семейство множеств);

(Ord_1) если $\gamma \in \lambda$, то $\gamma \subset \lambda$;

(Ord_2) $(\lambda, <)$ вполне упорядоченное множество, где порядок $<$ на λ определен следующим образом: для $\alpha, \beta \in \lambda$, $\alpha < \beta$ если $\alpha \in \beta$.

Класс всех ординалов обозначим через Ord.

Утверждение 1.1. *Пусть $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и $\alpha \in \lambda$. Тогда $\alpha \in \mathsf{Ord}$ и $(-\infty, \alpha) = \alpha$, α как множество является собственным начальным интервалом в λ.*

Доказательство. По определению $(-\infty, \alpha) = \{\beta \in \gamma : \beta < \alpha\} = \{\beta \in \gamma : \beta \in \alpha\} = \alpha \cap \gamma$. Так как $\alpha \subset \lambda$, то $(-\infty, \alpha) = \alpha$. Условие (Ord_0) для $\alpha \subset \gamma$ выполняется. Пусть $\beta \in \alpha$. Тогда $\beta \in \gamma$ и $\beta = (-\infty, \beta) \subset (-\infty, \alpha) = \alpha$. Следовательно $\beta \subset \alpha$ и выполняется (Ord_1). Так как α является подмножеством в.у.м λ, то α является в.у.м. Следовательно, выполняется (Ord_2). □

Определим порядок $<$ на классе Ord: для ординалов $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \Leftrightarrow$ множество α собственный начальный интервал множества β. Тогда каждый ординал является собственным начальным интервалом класса Ord.

Утверждение 1.2. *Любые два ординала $\lambda, \gamma \in \mathsf{Ord}$ сравнимы, выполняется одна из трех возможностей: либо $\lambda = \gamma$, либо $\lambda < \gamma$, либо $\gamma < \lambda$.*

Доказательство. Пусть $\mu = \lambda \cap \gamma$. Тогда $\mu \in \mathsf{Ord}$. Если $\mu = \lambda$ и $\mu = \gamma$, то $\lambda = \gamma$. Если $\mu = \lambda$ и $\mu \subsetneq \gamma$, то $\lambda < \gamma$. Если $\mu \subsetneq \lambda$ и $\mu = \gamma$, то $\gamma < \lambda$. Покажем, что вариант $\mu \subsetneq \lambda$ и $\mu \subsetneq \gamma$ невозможен. Предположим противное. Тогда $\mu < \lambda$ и $\mu < \gamma$. Следовательно $\mu \in \lambda \cap \gamma = \mu$. Противоречие, так как $\mu \notin (-\infty, \mu) = \mu$. □

Следовательно, Ord линейно упорядоченный класс. Также класс Ord вполне упорядочен: если $M \subset \mathsf{Ord}$ непустое множество ординалов и $\alpha \in M$, то либо $\alpha = \min M$, либо $\min M = \min M \cap \alpha$.

Для $\lambda \in \mathsf{Ord}$ обозначим

$$\lambda + 1 = \lambda \cup \{\lambda\}.$$

Утверждение 1.3. $\lambda + 1 \in \mathsf{Ord}$ *и λ является максимальным элементом в $\lambda + 1$.*

Доказательство. Очевидно, для $\lambda+1$ выполняется (Ord_0). Пусть $\alpha \in \lambda+1$. Если $\alpha \in \lambda$, то $\alpha \subset \lambda \subset \lambda+1$. Если $\alpha = \lambda$, то $\alpha = \lambda \subset \lambda+1$. Следовательно, $\alpha \subset \lambda + 1$ и выполняется (Ord_1). Пусть $M \subset \lambda + 1$ непустое множество. Если $M = \{\lambda\}$, то $\lambda = \min M$, в противном случае, $\min M = \min M \cap \lambda$. Следовательно, выполняется (Ord_2). Пусть $\alpha \in \lambda+1$. Если $\alpha = \lambda$, то $\alpha \leqslant \lambda$, в противном случае $\alpha \in \lambda$ и $\alpha < \lambda$. Следовательно, λ является максимальным элементом в $\lambda + 1$. □

Утверждение 1.4. *Пусть $M \subset \mathsf{Ord}$ есть множество ординалов и $\mu = \bigcup M$. Тогда $\mu \in \mathsf{Ord}$, $M \subset \mu + 1$ и $\mu = \sup M$ в $\mu + 1$.*

Доказательство. Очевидно, для μ выполняется (Ord_0). Пусть $\alpha \in \mu$. Тогда $\alpha \in \lambda$ для некоторого $\lambda \in M$. Получаем $\alpha \subset \lambda \subset \mu$. Следовательно, выполняется (Ord_1). Пусть $A \subset \mu$ непусто множество. Тогда $A \cap \lambda \neq \varnothing$ для некоторого $\lambda \in \mu$ и $\min A = \min A \cap \lambda$. Следовательно, выполняется (Ord_2). Мы доказали $\mu \in \mathsf{Ord}$.

Докажем $\mu = \sup M$. Если в M есть максимальный элемент, то μ является этим максимумом, $M \subset \mu + 1$ и $\sup M = \max M = \mu$. Предположим, в M нет максимума. Тогда $M \subset \mu \subset \mu + 1$ и $\alpha < \mu$ для $\alpha \in M$. Пусть $\beta < \mu$. Тогда $\beta \in \mu$ и $\beta \in \lambda$ для некоторого $\lambda \in M$. Следовательно $\beta < \lambda$ и $\lambda \in (\beta, \mu] \cap M \neq \varnothing$. □

Для отображения $f : \lambda \to X$, определенного на ординале, обозначим

$$f[\gamma] = \{f(\alpha) \ : \ \alpha \in \gamma\}$$

для $\gamma \in \lambda + 1$ — образ множества $\gamma \subset \lambda$ при отображении f.

Предложение 1.5 (Главный технический результат)**.** *Пусть X множество, $\mathcal{M} = \{M \subset X \ : \ M \neq X\}$ и $\Phi : \mathcal{M} \to X$ есть отображение, для которого выполняется условие: $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$. Тогда существуют единственные ординал λ и биекция $\varphi : \lambda \to X$, такие что $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.*

Отметим, как можно интерпретировать заключение предложения. Биекция φ означает нумерацию множества X: $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$. Тогда $\varphi[\alpha] = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Формула $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ означает

$$x_\alpha = \Phi(\{x_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Доказательство предложения 1.5. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \{(\gamma, \psi, A) : \gamma \in \mathsf{Ord},\ & A \subset X, \\ & \psi : \gamma \to A \text{ биекция}, \\ & \psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha]) \text{ для } \alpha \in \gamma\}. \end{aligned}$$

Факт 1. *Пусть $(\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}$, $(\theta, \nu, B) \in \mathcal{Q}$ и $\gamma \leqslant \theta$. Тогда $\psi = \nu|_\gamma$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $Q = \min\{\alpha \in \gamma : \psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)\} \neq \varnothing$. Пусть $\alpha = \min Q$. Тогда $\psi|_\alpha = \nu|_\alpha$ и $\psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)$. Так как $\psi|_\alpha = \nu|_\alpha$, то $\psi[\alpha] = \nu[\alpha]$. Тогда из определения семейства $\mathcal{Q}$ вытекает $\psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha]) = \Phi(\nu[\alpha]) = \nu(\alpha)$. Противоречие с $\psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)$. □

Положим

$$\lambda = \bigcup\{\gamma : (\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}\} \in \mathsf{Ord}, \qquad Y = \bigcup\{A : (\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}\} \subset X.$$

Из факта 1 вытекает, что существует отображение $\varphi : \lambda \to Y$, такое что $\varphi|_\gamma = \psi$ для $(\gamma, \psi, A) \in \mathcal{Q}$. Отображение φ является биекцией и $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$. То есть $(\lambda, \varphi, Y) \in \mathcal{Q}$.

Докажем, что $Y = X$. Предположим противное: $Y \neq X$. Положим $y^+ = \Phi(Y)$ и $Y^+ = Y \cup \{y^+\}$. Определим отображение $\varphi^+ : \lambda+1 \to Y^+$. Положим $\varphi^+(\alpha) = \varphi(\alpha)$ для $\alpha < \lambda$ и $\varphi^+(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Тогда φ^+ биекция и $\varphi^+(\alpha) = \Phi(\varphi^+[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda + 1$. То есть $(\lambda + 1, \varphi^+, Y^+) \in \mathcal{Q}$. Противоречие, так как $Y^+ \nsubseteq Y$.

Ординал λ и отображение φ, удовлетворяющее условиям предложения, найдены. Докажем единственность λ и φ. Пусть $\gamma \in \mathsf{Ord}$ и $\psi : \gamma \to X$ биекция, для которой выполняется условие: $\psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha])$ для $\alpha \in \gamma$. Тогда $(\gamma, \psi, X) \in \mathcal{Q}$. Предположим, для определенности, $\gamma \leqslant \lambda$. Из факта 1 вытекает, что $\varphi = \psi|_\gamma$. Так как ψ биекция и $\psi[\gamma] = \varphi[\gamma] = X = \psi[\lambda]$, то $\gamma = \lambda$. Из $\varphi = \psi|_\gamma$ вытекает $\varphi = \psi$. □

Теорема 1.6. *Для любого в.у.м X существует единственный ординал λ, порядково изоморфный X.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$ и

$$\Phi : \mathcal{M} \to X,\ M \mapsto \min X \backslash M.$$

Для ординала λ, биекция $\varphi : \lambda \to X$ является порядковым изоморфизмом если и только если выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$. Из предложения 1.5 вытекает, что существуют единственные λ и φ, для которых выполняется это условие. □

Для в.у.м X обозначим через $\mathsf{Ord}(X)$ тот единственный ординал, который порядково изоморфный X.

Утверждение 1.7. *Пусть* $\lambda, \gamma \in \mathsf{Ord}$. *Если* λ *порядково изоморфно* γ, *то* $\lambda = \gamma$.

Доказательство. Так как λ порядково изоморфно γ, то $\mathsf{Ord}(\gamma) = \lambda$. Так как γ порядково изоморфно γ, то $\mathsf{Ord}(\gamma) = \gamma$. Следовательно, $\lambda = \gamma$. □

1.1.3 Натуральные числа, индукция и трансфинитная индукция

В теории множеств натуральны числа определяются как конечные ординалы:

$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing, \\
1 &= 0 + 1 = \{0\} = \{\varnothing\}, \\
2 &= 1 + 1 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\
3 &= 2 + 1 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \\
&\ \ ... \\
n + 1 &= \{0, 1, 2, ..., n\}.
\end{aligned}$$

Множество всех неотрицательных целых чисел обозначается как ω, это первый бесконечный ординал:

$$\omega = \{0, 1, 2, ...\}.$$

Пусть λ ординал (или даже $\lambda = \mathsf{Ord}$). Пусть $\mathcal{P}(\alpha)$ есть некоторое математическое высказывание (логическая формула) с параметром α.

Трансфинитная индукция, это рассуждения по следующей схеме[1]

> Докажем по (трансфинитной) индукции, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.
>
> 1) **База индукции.** Доказываем $\mathcal{P}(0)$.
>
> 2) **Шаг индукции.** Пусть $0 < \alpha < \lambda$. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для всех $\beta < \alpha$. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
>
> Мы доказали (по индукции), что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

Этот метод вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1.8. *Верны следующие два утверждения.*

1) **База индукции.** *Верно* $\mathcal{P}(0)$.

2) **Шаг индукции.** *Пусть* $0 < \alpha < \lambda$. *Предположим, что* $\mathcal{P}(\beta)$ *верно для всех* $\beta < \alpha$. *Тогда* $\mathcal{P}(\alpha)$ *верно.*

Тогда $\mathcal{P}(\alpha)$ *верно для всех* $\alpha < \lambda$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\alpha = \min\{\gamma < \lambda : \mathcal{P}(\gamma)$ не верно $\}$. Если $\alpha = 0$, то противоречие базе индукции. Если $\alpha > 0$, то противоречие шагу индукции. □

---

[1] Этот метод можно было бы назвать полной трансфинитной индукцией, по аналогии с классической ($\lambda = \omega$) полной математической индукции

Ординал α называется *последовательным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого $\beta \in \mathsf{Ord}$. Не нулевой ординал α называется *предельным*, если α не последовательный ординал.

То что не нулевой ординал α является предельным эквивалентно условиям: (1) $\beta + 1 < \alpha$ для $\beta < \alpha$; (2) $\alpha = \sup \alpha$.

Часто доказательство по трансфинитной индукции разбивается на три случая.

> Докажем по (трансфинитной) индукции, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.
>
> 1) **База индукции.** Доказываем $\mathcal{P}(0)$.
>
> 2) **Шаг индукции, α последовательный ординал.** Пусть $\alpha = \beta + 1 < \lambda$ последовательный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
>
> 3) **Шаг индукции, α предельный ординал.** Пусть $\alpha < \lambda$ предельный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для $\beta < \alpha$. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
>
> Мы доказали (по индукции), что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

Для обычной индукции ($\lambda = \omega$), случай 3) не бывает, так как конечные ординалы не предельные. Тогда получается стандартная математическая индукция.

1.1.4 Аксиома выбора

В этом разделе содержатся наиболее важные и полезные следствия аксиомы выбора.

Теорема 1.9 (Цермело)**.** *Любое множество может быть вполне упорядочено.*

Доказательство. Пусть X множество и $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$. Из аксиомы выбора вытекает, что существует отображение $\Phi : \mathcal{M} \to X$, такое что $\Phi(M) \in X \setminus M$ для $M \in \mathcal{M}$. Из предложения 1.5 вытекает, что существуют $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и биекция $\varphi : \lambda \to X$. Определим полный порядок на X: для $x, y \in X$, $x < y$ если $\varphi^{-1}(x) < \varphi^{-1}(y)$. □

Пусть P есть ч.у.м и $M \subset P$. Множество M называется *цепью*, если M есть линейно упорядоченное подмножество P. Элемент $u \in P$ называется *верхней гранью* M, если $x \leqslant u$ для любого $x \in M$.

На множестве всех подмножеств

$$\mathsf{Exp}(X) = \{M : M \subset X\}$$

множества X есть естественная структура ч.у.м, $A \leqslant B$ если $A \subset B$. Соответственно, для $\mathcal{R} \subset \mathsf{Exp}(X)$ определены понятия цепи и верхней грани.

Предложение 1.10. *Пусть X есть множество, $\mathcal{L} \subset \mathsf{Exp}(X)$, $\mathcal{L} \neq \varnothing$ и выполняются условия*

(1) *если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$;*

(2) *если* $M \in \mathcal{L}$ *и* $M \neq X$, *то* $M \cup \{x\} \in \mathcal{L}$ *для некоторого* $x \in X \backslash M$.

Тогда $X \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varnothing \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X \ : \ M \neq X\}$. Определим $\Phi : \mathcal{M} \to X$. Для $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \backslash M$ таким образом, что $M \cup \{\Phi(M)\} \in \mathcal{L}$. Для $M \in \mathcal{M} \backslash \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \backslash M$ произвольно. Тогда $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$.

Из предложения 1.5 вытекает, что существуют $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и $\varphi : \lambda \to X$, для которых выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.

Иными словами, $x_\alpha = \Phi(R_\alpha)$ для $\alpha < \lambda$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$ для $\alpha < \lambda$ и $R_\alpha = \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$ для $\alpha \leqslant \lambda$.

Тогда $R_0 = \varnothing$, $R_\lambda = X$, $R_\beta \subset R_{\beta+1} = R_\beta \cup \{\Phi(R_\beta)\} \in \mathcal{L}$ для $\beta < \lambda$ и $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ если $\alpha \leqslant \lambda$ предельный ординал. Последовательность множеств $(R_\alpha)_{\alpha \leqslant \lambda}$ возрастающая: если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \lambda$, то $R_\alpha \subset R_\beta$.

Трансфинитной индукцией по $\alpha < \lambda + 1$ докажем $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

База индукции. По условию $R_0 = \varnothing \in \mathcal{L}$.

Шаг индукции. Пусть $0 < \alpha < \lambda + 1$ и $P_\beta \in \mathcal{L}$ для $\beta < \alpha$.

Рассмотрим случай: $\alpha = \gamma + 1$ последовательный ординал. Тогда $R_\alpha = R_\gamma \cup \{\Phi(R_\gamma)\}$. Так как $R_\gamma \in \mathcal{L}$, то, по определению Φ, $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим случай: α предельный ординал. Тогда $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$. Так как семейство $\mathcal{R} = \{R_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$ является цепью и $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, то из условия (1) вытекает, что $R_\alpha = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$.

Итак, мы доказали R_α для всех $\alpha \leqslant \lambda$. Так как $R_\lambda = X$, то $X \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим общий случай, не обязательно $\varnothing \in \mathcal{L}$. Пусть $L \in \mathcal{L}$. Положим $\widetilde{X} = X \backslash L$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \{M \backslash L \ : \ L \subset M \in \mathcal{L}\}$. Тогда $\varnothing \in \widetilde{\mathcal{L}}$ и для $\widetilde{X}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ выполняются условия (1) и (2) предложения. Тогда из доказанного случая предложения вытекает $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Следовательно, $X \in \mathcal{L}$. □

Теорема 1.11 (Лемма Цорна)**.** *Если в частично упорядоченном множестве* X *для всякой цепи существует верхняя грань, то для каждого элемента* $a \in X$ *существует максимальный элемент множества* X, *больший или равный элементу* a.

Доказательство. Предположим противное. Положим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X : a \in L,\ L \text{ является цепью в } X\}.$$

Проверим условия предложения 1.10.

Проверим условие (1). Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь множеств и $R = \bigcup \mathcal{R}$. Ясно, $a \in R$. Так как каждый элемент $\mathcal{R}$ является цепью и $\mathcal{R}$ цепь множеств, то R цепь в X.

Проверим условие (2). Пусть $L \in \mathcal{L}$. Пусть m есть верхняя грань L. Так как $a \leqslant m$, то m не максимальный элемент X. Пусть $b > m$. Тогда b верхняя грань L и $b \notin L$. Так как L цепь и b верхняя грань L, то $L \cup \{b\}$ тоже цепь. Так как $b \notin L$, $L \cup \{b\}$ цепь и $a \in L \subset L \cup \{b\}$, то $L \cup \{b\} \in \mathcal{L}$.

Из предложения 1.10 вытекает $X \in \mathcal{L}$. Следовательно X цепь, X л.у.м. Пусть m есть верхняя грань X. Так как X л.у.м, то m является максимумом X и $a \leqslant m$. Противоречие. □

Цепь в ч.у.м X называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой цепи.

Теорема 1.12 (принцип максимума Хаусдорфа)**.** *Любая цепь ч.у.м содержится в максимальной цепи.*

Доказательство. Множество $\mathcal{C}$ цепей в ч.у.м X образуют ч.у.м относительно порядка включения множеств. Тогда максимальная цепь это максимальный элемент в $\mathcal{C}$. Так как объединение цепи цепей является цепью, то любая цепь $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}$ имеет верхнею грань $\bigcup \mathcal{Q}$. Тогда из леммы Цорна вытекает, что любая цепь X содержится в максимальной цепи. □

Лемма Цорна и принцип максимума Хаусдорфа несложно выводятся одно из другого. Лемма Цорна, принцип максимума Хаусдорфа, теорема Цермела эквивалентны аксиоме выбора. Сформулируем еще одно полезное эквивалентное аксиоме выбора утверждение.

Следствие 1.13 (следствие леммы Цорна)**.** *Пусть X есть множество, $\mathcal{L} \subset \mathsf{Exp}(X)$ и если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Тогда любое множество $L \in \mathcal{L}$ содержится в некотором максимальном множестве $M \in \mathcal{L}$.*

Доказательство. Для любой цепи $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ объединение $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$ является верхней гранью. Теперь следствие вытекает из леммы Цорна. □

1.1.5 Мощность множества и кардиналы

Пусть X и Y множества. Множества X и Y называется равномощными, если существует биекция между X и Y. В этом случае пишем $|X| = |Y|$. Отношение равномощности является отношением эквивалентности.

Определение 1.14 (1-ый вариант, Кантор)**.** *Мощностью* $|X|$ называется класс эквивалентности относительно отношения равномощности, который содержит X: $|X| = \{Y : |X| = |Y|\}$.

Введем отношение $\leqslant$ на мощностях множеств: $|X| \leqslant |Y|$ если существует иньективное отображение из X в Y.

Очевидно это отношение транзитивно: если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |Z|$, то $|X| \leqslant |Z|$.

Ординал τ назовем *кардиналом*, если для любого $\gamma \in \tau$ не существует биекции между γ и λ. Класс всех кардиналов обозначим Card. Для множества X обозначим

$$\mathsf{Card}(X) = \min\{\lambda \in \mathsf{Ord} : \lambda \text{ равномощно } X\}.$$

Очевидно, $\mathsf{Card}(X) \in \mathsf{Card}$.

Определение 1.15 (2-ой вариант, современный)**.** Определим *мощность* $|X| = \mathsf{Card}(X)$ для множества X.

По сути, это эквивалентные определения.

Из определения и свойств ординалов вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.16 (Кантора – Бернштейна)**.** *Пусть X и Y множества. Если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.*

Обозначим
$$\mathsf{Exp}(X) = \{M : M \subset X\}$$
множество всех подмножеств множества X. Множество
$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$
называется *симметрической разностью* множеств A и B. Очевидно, $A = B$ если и только если $A \triangle B = \varnothing$.

Теорема 1.17 (Кантора)**.** *Пусть X множество. Тогда $|X| < |\mathsf{Exp}(X)|$.*

Доказательство. Множество X иньективно вкладывается в $\mathsf{Exp}(X)$, $x \mapsto \{x\}$. Следовательно $|X| \leqslant |\mathsf{Exp}(X)|$. Докажем, что $|X| \neq |\mathsf{Exp}(X)|$. Предположим противное. Тогда существует биекция $f : X \to \mathsf{Exp}(X)$. Положим $M = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Тогда $M \notin f(X)$ так как $x \in M \triangle f(x) \neq \varnothing$ для $x \in X$. □

Отметим, что $\omega \subset \mathsf{Card}$ и $\omega \in \mathsf{Card}$. Теорема Кантора обеспечивает, что Card неограниченно в Ord. Обозначим через Card_* все бесконечные кардиналы, $\mathsf{Card}_* = \mathsf{Card} \backslash \omega$. Тогда Card_* порядково изоморфно Ord, класс Card_* можно занумеровать ординалами
$$\mathsf{Card}_* = \{\omega_\alpha : \alpha \in \mathsf{Ord}\}.$$
Тогда $\omega = \omega_0$. Также часто обозначают $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

1.2 Дополнение

1.2.1 Базовые математические конструкции

Неформально опишем некоторые базовые математические конструкции, которые используют математики в своих исследованиях.

Бинарное отношение. Отношение, которое связывает два объекта. Пусть R некоторое отношение. Объекты x и y либо находятся в отношении R, либо не находятся в отношении R. Часто для отношений используются специальные символы, такие как $<, >, \sim, \in$ и тому подобные. Отношение может записываться как $R(x, y)$, но часто записываются как xRy — x и y находятся в отношении R.

Отношение может задаваться с помощью логической формулы $\mathcal{R}$ с двумя переменными: xRy если выполняется $\mathcal{R}(x, y)$.

Множество (совокупность, класс). Множество (совокупность, класс и т.п.) это объект, который который состоит из элементов и однозначно ими определяется. Если M множество и x некоторый объект, то либо $x \in M$ (x принадлежит M, x элемент M), либо неверно что $x \in M$ ($x \notin M$, x не принадлежит M). Отношение $x \in M$ "x принадлежит M" является бинарным отношением. На всех множествах есть отношение равенства, совпадения множеств: $=$. Для множеств A и B, $A = B$ если для любого x условие $x \in A$ эквивалентно $x \in B$.

Часто множество задается с помощью логических формул с одной переменной: $M = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, $x \in M$ если и только если верно $\mathcal{P}(x)$.

Мощность множества. Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция между X и Y, записывается $|X| = |Y|$. На всех множествах отношение $|X| = |Y|$ является отношением эквивалентности. Назовем классы эквивалентности относительно этого отношения *мощностями*: $|X| = \{Y : |X| = |Y|\}$.

Упорядоченная пара, кортеж. Упорядоченная пара (a, b) это пара элементов a и b, в которой a является первым элементом, а b вторым. Две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) совпадают, если $a = c$ и $b = d$. Кортеж длины n или n-ка $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, это упорядоченный набор $x_1, x_2, ..., x_n$ из n элементов. Для n-ки $\bar{x}$ определен i-ый элемент x_i для $i = 1, 2, ..., n$. Две n-ки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ совпадают, если $x_i = y_i$ для $i = 1, 2, ..., n$.

Отображение (функция). Отображение f это соответствие, которое некоторым элементам x ставит в соответствие некоторый элемент $f(x)$. Для отображения определена область определения $\mathrm{Dom}\, f = \{x : \text{определено } f(x)\}$, образ $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) : x \in \mathrm{Dom}\, f\}$ и график $\mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}\, f\}$.

Некоторые функции задаются с помощью логической формулы $\mathcal{F}$ от двух переменных, для которой выполняется условие: если верно $\mathcal{F}(x, y)$ и верно $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Функция f определяется тем, что $y = f(x)$ если $\mathcal{F}(x, y)$. Тогда $\mathrm{Dom}\, f = \{x : \exists y\, \mathcal{F}(x, y)\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{y : \exists x\, \mathcal{F}(x, y)\}$, $\mathrm{Gr}\, f = \{(x, y) : \mathcal{F}(x, y)\}$.

Конечные произведения множеств. Пусть X и Y множества. Определим произведение множеств $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Отметим, что $\mathrm{Gr}\, f \subset \mathrm{Dom}\, f \times \mathrm{Im}\, f$ для функции f.

Пусть X_1, X_2, ... , X_n множества. Определим произведение множеств

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 \times ... \times X_n &= \prod_{i=1}^{n} X_i \\ &= \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}. \end{aligned}$$

Индексирумые множества, последовательности. Индексирумое множество это тоже самое, что и отображение. Отличия семантические, упор делается на образ отображения. Пусть f есть отображение, $A = \mathrm{Dom}\, f$. Отображение f можно записать как индексирумое множество $(x_\alpha : \alpha \in A)$ или $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha = f(\alpha)$ для $\alpha \in A$. Образ отображения $\mathrm{Im}\, f$ записывается как $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$. Множество A называется *индексным множеством.* Если понятно из контекста, какое индексное множество используется, то пишут (x_α) или $(x_\alpha)_\alpha$ вместо $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Индексируемые множества с индексным множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ называются *последовательностью.* Можно писать (x_n) вместо $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Индексирумые семейства множеств, последовательности множеств. Индексирумое семейство, это индексируемое множество $(M_\alpha : \alpha \in A)$, такое что M_α является множеством для каждого $\alpha \in A$. Последовательность множеств (M_n) это последовательность из множеств.

Логическая формула $\mathcal{P}$ с двумя переменными определяет индексирумое семейство $(M_\alpha : \alpha \in A)$, где $M_\alpha = \{x : \mathcal{P}(\alpha, x)\}$.

Семейства множеств. Семейство множеств это множество $\mathcal{M}$, элементы которого являются множествами. Из индексируемого семейства множеств $(M_\alpha : \alpha \in A)$ можно получить семейство множеств $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$. Любое семейство можно представить таким образом: $\mathcal{M} = \{S_M : M \in \mathcal{M}\}$, где $S_M = M$.

Произведение индексирумого семейства множеств. Определим произведение индексирумого семейства множеств $(X_\alpha : \alpha \in A)$ —

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha \in A} X_\alpha &= \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\} \\ &= \{f : f \text{ есть функция}, \operatorname{Dom} f = A, f(\alpha) \in X_\alpha \text{ для } \alpha \in A\} \\ &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha \text{ для } \alpha \in A\}.\end{aligned}$$

Если все X_α одинаковы, $X_\alpha = X$ для всех $\alpha \in A$, то произведение обозначается как

$$\begin{aligned}X^A &= \{f : f \text{ есть функция}, \operatorname{Dom} f = A, \operatorname{Im} f \subset X\} \\ &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X \text{ для } \alpha \in A\}\end{aligned}$$

и называется *степенью* множества X.

Объединение и пересечение (индексируемых) семейства множеств. Пусть $(X_\alpha : \alpha \in A)$ индексируемое семейство множеств и $\mathcal{M}$ семейство множеств. Определим объединение семейств:

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{M} &= \{x : x \in M \text{ для некоторого } M \in \mathcal{M}\}, \\ \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha &= \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x : x \in X_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in A\}.\end{aligned}$$

Определим пересечение семейств:

$$\begin{aligned}\bigcap \mathcal{M} &= \{x : x \in M \text{ для всех } M \in \mathcal{M}\}, \\ \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha &= \bigcap\{X_\alpha : \alpha \in A\} = \{x : x \in X_\alpha \text{ для всех } \alpha \in A\}.\end{aligned}$$

1.2.2 Аксиомы теории множеств

Изложим аксиоматику Цермела–Френкеля теории множеств.

Изначально в аксиоматике теории множеств есть только множества, все объекты являются множествами. Потом определяются конструкции и понятия математики как множества специального вида.

Для множеств изначально есть два бинарных отношения: $=$ — равенство множеств, запись $a = b$ означает равенство, совпадение множеств a и b; $\in$ — принадлежность, запись $a \in b$ означает что a является элементом множества b.

Отношение $=$ является отношением эквивалентности, то есть: всегда верно $x = x$; из $x = y$ следует $y = x$; из $x = y$ и $y = z$ следует $x = z$.

1.2.3 Классы и класс-отображения

Пусть $\mathcal{P}$ есть логическая формула о множествах с одной переменной. Совокупность $A = \{x : \mathcal{P}(X)\}$ называется *классом*. Выражение $x \in A$ означает, что верно $\mathcal{P}(x)$. Для классов A и B, $A = B$ означает, что $x \in A$ если и только если $x \in B$. Для класса A и множества M, $A = M$ означает, что $x \in A$ если и только если $x \in M$.

Пусть $\mathcal{F}$ есть логическая формула о множествах с двумя переменными, для которой выполняется условие: если $\mathcal{F}(x, y)$ и $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Такая формула определяет *класс-отображение* f, для которой область определения является классом

$$\operatorname{Dom} f = \{x : \text{верно } \mathcal{F}(x, y) \text{ для некоторого множества } y\}.$$

Для $x \in \operatorname{Dom} f$, $f(x)$ определяется как то единственное y, для которого верно $\mathcal{F}(x, y)$. Для $A \subset \operatorname{Dom} f$, где A либо класс, либо множество, образ $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \mathcal{F}(x, y) \text{ для некоторого } x \in A\}$ является классом.

С точки зрения построения математической теории из некоторой аксиоматики, данные определения некорректны. Но удобны, в том числе для формулировки аксиом.

Любое рассуждение, к котором присутствуют классы и класс-функции, можно преобразовать в рассуждения без этих понятий. Для этого места в рассуждениях, в которых встречаются классы, нужно заменить логические формулы, с помощью которых эти классы определяются. Например, для класса A, выражение “$x \in A$” заменяется на “выполняется $\mathcal{P}(x)$”.

Для класса $A = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, если существует множество M, для которого $A = M$ (“$A = M$”≡“для всех x, выполняется $\mathcal{P}(x)$ если и только если $x \in M$”), то тогда говорят, что класс A является множеством. Классы, которые не являются множествами, называются *собственными* классами.

Значительная часть аксиом теории множеств заключаются в том, что те или иные классы являются множествами.

1.2.4 Аксиомы теории множеств

Аксиома 1 (объемности). Пусть x и y множества. Тогда $x = y$ в том и только том случае, когда $z \in x$ эквивалентно $z \in y$ для любого множества z.

Эта аксиома означает, что если у двух множеств одинаковые элементы, то эти множества совпадают. Можно переформулировать аксиому: если $x \subset y$ и $y \subset x$, то $x = y$.

Аксиома эквивалентна и такому утверждению: если x, y множества, z класс, $x = z$ и $y = z$, то $x = y$.

Аксиома 2 (существования). Класс $\varnothing = \{x : x \neq x\}$ является множеством.

То есть существует пустое множество $\varnothing$.

Аксиома 3 (пары). Пусть x и y множества. Тогда класс $\{x, y\} = \{z : z = x \vee z = y\}$ является множеством.

Из этой аксиомы вытекает, что $\{x\} = \{x, x\}$ является множеством.

В теории множеств, элементами множеств являются тоже множествами, поэтому любое множество также является семейством множеств и определен класс $\bigcup x = \{z : z \in y$ для некоторого $y \in x\}$ для любого множества x.

Аксиома 4 (объеденения). Пусть x множество. Тогда класс $\bigcup x$ является множеством.

Из последних двух аксиом вытекает, что $x \cup y$ и $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ являются множествами. Из перечисленных аксиом вытекает, что из пустого множества можно строить (конечные) множества вида

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

Аксиома 5 (бесконечности). Существует множество x, такое что $\varnothing \in x$ и $y \cup \{y\} \in x$ для $y \in x$.

Множество x содержит $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ... и должно быть бесконечным. То есть, существуют бесконечные множества.

Аксиома 6 (множество подмножеств). Пусть x множество. Тогда класс

$$\mathsf{Exp}(x) = \{y : y \subset x\}$$

является множеством.

Множество $\mathsf{Exp}(x)$ называется множество подмножеств множества x.

Следующие две аксиомы показывают, как логические формулы, то есть классы и классы-отображения, используются для конструирования множеств.

Аксиома 7 (выделения). Пусть x множество и A есть класс. Тогда класс $x \cap A = \{y : y \in x \wedge y \in A\}$ является множеством.

Аксиома 8 (подстановки). Пусть f есть класс-отображение и $M \subset \mathrm{Dom}\, f$ есть множество. Тогда класс $f(M) = \{f(y) : y \in M\}$ является множеством.

Аксиома 9 (регулярности). Если $x \neq \varnothing$, то $x \cap y = \varnothing$ для некоторого $y \in x$.

Из этой аксиомы вытекает, что $x \notin x$ для любого множества x, для доказательства нужно применить аксиому регулярности к множеству $\{x\}$.

Аксиома 10 (выбора). Пусть x такое множество, что $y \neq \varnothing$ для $y \in x$ и $y \cap z = \varnothing$ для различных $y, z \in x$. Тогда существует множество c, такое что $c \cap y$ одноточечное множество для всех $y \in x$.

1.2.5 Базовые математические конструкции в теории множеств

Опишем некоторые базовые математические конструкции, которые определяются в теории множеств с аксиоматикой Цермела-Френкеля.

Бинарное отношение. Отношения на множестве X, подмножество $R \subset X \times X$ квадрата, $xRy \Leftarrow (x, y) \in R$. Отношение на классе задавается с помощью логической формулы $\mathcal{R}$ с двумя переменными: xRy если выполняется $\mathcal{R}(x, y)$.

Множество (совокупность, класс). Классы задается с помощью логических формул с одной переменной: $M = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, $x \in M$ если и только если верно $\mathcal{P}(x)$. Некоторые классы являются множествами. Множества аксиоматизируются в ZF.

Мощность множества. $|X| = \mathsf{Card} X$.

Упорядоченная пара, кортеж. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ — определение Куратовского, также используется определение $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$, для его использования нужна аксиома регулярности.

3-ка: $(x, y, z) = ((x, y), z)$

n-ка: $(x_1, ..., x_n) = ((x_1, ..., x_{n-1}), x_n)$.

Отображение (функция). Отображение множеств $f : X \to Y$ отождествляется со своим графиком: $f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Класс-отображения задаются с помощью логической формулы $\mathcal{F}$ от двух переменных, для которой выполняется условие: если верно $\mathcal{F}(x, y)$ и верно $\mathcal{F}(x, z)$, то $y = z$. Функция f определяется тем, что $y = f(x)$ если $\mathcal{F}(x, y)$. Тогда $\operatorname{Dom} f = \{x : \exists y\, \mathcal{F}(x, y)\}$, $\operatorname{Im} f = \{y : \exists x\, \mathcal{F}(x, y)\}$, $\operatorname{Gr} f = \{(x, y) : \mathcal{F}(x, y)\}$.

Конечные произведения множеств. Пусть X и Y множества (или классы). Определим произведение множеств $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Пусть X_1, X_2, ... , X_n множества. Определим произведение множеств

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 \times ... \times X_n &= \prod_{i=1}^{n} X_i \\ &= \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$.

1.2.6 Соглашения об обозначениях

Задание множества. Мы используем выражение $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ для обозначения множества (или класса), который состоит из элементов, для которых выполняется условие $\mathcal{P}(x)$. В литературе встречается также запись $\{x \,|\, \mathcal{P}(x)\}$. Например, в статье русской википедии о множествах встречаются обе нотации.

Произведения множеств. Если посмотреть на определение n-ки и конечных произведений в разделе 1.2.5, то $(a, b, c) = ((a, b), c)$ и $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. Но $(a, b, c) \neq (a, (b, c))$ и $A \times B \times C \neq A \times (B \times C)$. Определение конечных произведений множеств и произведение индексированного семейства множеств кардинально отличаются, поэтому, в соответствие с определениями из разделов 1.2.1 и 1.2.5,

$$\prod_{i=1}^{3} X_i = X_1 \times X_2 \times X_3 \neq \prod \{X_i : i = 1, 2, ..., n\} = \prod \{X_i : i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Но между указанными неравными множествами есть естественная биекция. Мы, как принято в математике, будем отождествлять такие множества.

Множества и индексированные множества, семейства множеств и индексированные семейства множеств. В соответствии с разделом 1.2.1, $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ означает множество (семейство множеств), а $(x_\alpha : \alpha \in A) = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ индексированное множество (семейство множеств).

В литературе запись $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ и, особенно, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, часто используется для обозначения индексированного множества (семейства) $(x_\alpha : \alpha \in A)$. Но значение такой записи зависит от контекста. Например, в выражении $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \cup Y \cap \{x_1, z_2\}$ подразумевается множество, а не индексированное множество.

Выражения вида $(x_\alpha : \alpha \in A) = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ используются для обозначения последовательностей, обыкновенных (A — натуральные числа) или трансфинитных (A — ординал) и также для обозначения произведения элементов произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Чтобы не далеко отходить от общепринятых обозначений, мы также будем использовать запись $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ для обозначения индексированного множества (семейства). Если важно, будем явно писать “индексированное множество (или семейство) $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$”.

В литературе иногда под “семейством” подразумевают индексированное семейство или множество, а семейство множеств называют системой множеств. Для нас семейство это семейство множеств — множество, элементами которого являются множества или даже другие семейства.

Счетные множества. В литературе под счетным множеством подразумевают либо множество A для которого $|A| \leqslant \omega$ либо множество A, для которого $|A| = \omega$. Мы счетными множествами будем называть множества с $|A| = \omega$, а множества с $|A| \leqslant \omega$ будем называть не более чем счетными.

Существуют устоявшиеся выражения типа “счетная база” или “счетное всюду плотное множество” в которых слово счетное используется в первом смысле, $|A| \leqslant \omega$. Возможно, мы тоже будем использовать такие вольности речи.

1.3 Задачи

1.3.1 Классы и аксиомы ZFC

Задача 1.1. Пусть X и Y классы. Показать, что $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \triangle Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$ — классы.

Задача 1.2. Пусть X вполне упорядоченный собственный класс, то он порядково изоморфен Ord и этот изоморфизм единственный.

1.3.2 Аксиомы ZFC

Задача 1.3. Придумать определение конечного ординала и конечного множества.

Задача 1.4. Показать, что $\omega = \{\lambda : \lambda$ конечный ординал $\}$ это множество. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.5. Показать, что $\omega_1 = \{\lambda \in \mathsf{Ord} : |\lambda| \leqslant \omega\}$ это множество. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.6. Пусть $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Доказать что $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.7. Пусть $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$. Доказать что $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$. Какие аксиомы ZFC используются?

Задача 1.8. Доказать, $X \times Y$ множество для множеств X и Y. Какие аксиомы ZFC используются?

1.3.3 Кардиналы и мощности

Задача 1.9. Доказать $\omega \subset \mathsf{Card}$.

Задача 1.10. Доказать $\omega \in \mathsf{Card}$.

Задача 1.11. Доказать что каждый бесконечный кардинал является предельным ординалом.

Задача 1.12. Доказать что если $\mathcal{A} \subset \mathsf{Card}$ является множеством, то $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \in \mathsf{Card}$.

Задача 1.13. Пусть λ предельный ординал. Показать, что $\lambda \times \lambda$ можно вполне упорядочить таким образом, что для каждого $(\alpha, \beta) \in \lambda \times \lambda$ существует $\gamma < \lambda$, такое что

$$\{(x, y) \in \lambda \times \lambda : (x, y) < (\alpha, \beta)\} \subset \gamma \times \gamma.$$

Задача 1.14. Пусть λ бесконечный кардинал. Показать, что $|\lambda \times \lambda| = \lambda$.

Другими словами, $|X \times X| = |X|$ для бесконечного X.

Задача 1.15. Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\omega} = \{M \subset X : |M| < \omega\}$ всех его конечных подмножеств.

Задача 1.16. Докажите теорему Кёнига: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha \in A$, X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$, то

$$\left|\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right| < \left|\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha\right|.$$

Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $|X| < |\mathsf{Exp}(X)|$.

1.3.4 Аксиома выбора и ее следствия

Задача 1.17 (базисе Гамеля)**.** Пусть V векторное пространство, $\mathcal{C}$ семейство линейно независимых подмножеств. Доказать: (1) любая цепь в $\mathcal{C}$ имеет верхнею грань; (2) множество $B \in \mathcal{C}$ максимально если и только если B базис в V; (3) любое линейно независимое подмножество $E \subset V$ содержится в некотором базисе.

Задача 1.18 (Теорема Шпильрайна)**.** Пусть X множество, $\mathcal{C} \subset \mathsf{Exp}(X \times X)$ множество частичных порядков на X. Доказать: (1) любая цепь в $\mathcal{C}$ имеет верхнею грань; (2) множество $L \in \mathcal{C}$ максимально если и только если L является линейным порядком; (3) любой частичный порядок на X продолжается до линейного порядка,

Глава 2

Топологические и метрические пространства

2.1 Топологические и метрические пространства, топологические свойства

2.1.1 Топологические пространства

Пусть X множество и $\mathcal{T}$ семейство подмножеств множества X. Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*, если выполняются условия

(Top_1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(Top_2) если $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{T}$;

(Top_3) если $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{I} \in \mathcal{T}$.

Класс всех топологических пространств обозначим через Top.

Отметим, условие (Top_3) можно заменить на условие: если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *топологией* пространства X. Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами.*

Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами. Для семейства $\mathcal{F} = \{X \backslash U : U \in \mathcal{T}\}$ всех замкнутых подмножеств пространства X выполняются следующие условия

(ClSets_1) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$;

(ClSets_2) если $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$, то $\bigcap \mathcal{Q} \in \mathcal{F}$;

(ClSets_3) если $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ конечное семейство, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{F}$.

Множества, которые одновременно открытые и замкнутые называются *открыто-замкнутыми* множествами.

Пусть $x \in X$. Множество $U \subset X$ называется *открытой окрестностью* точки x, если $x \in U$ и U открытое множество. Множество $S \subset X$ называется *окрестностью* точки x, если $x \in S$ и существует открытая окрестность U точки X, для которой $x \in U \subset S$.

> Часто множество X называют топологическим пространством, если из контекста ясно какая топология на X подразумевается. Тогда говорят "U открытое подмножество X" для того чтобы обозначить элемент топологии X. Если надо обозначить всю топологию X, то используют фразы подобные "Пусть $\mathcal{T}$ есть топология X".

Пусть $Y \subset X$. Семейство $\mathcal{R} = \{Y \cap U \;:\; U \in \mathcal{T}\}$ удовлетворяет условиям (Top_1)–(Top_3). Действительно, условие (Top_1) выполнено, так как $\varnothing = Y \cap \varnothing$ и $Y = Y \cap X$, а из равенств

$$\bigcup_{U \in \mathcal{M}} Y \cap U = Y \cap \bigcup \mathcal{M}, \qquad \bigcap_{U \in \mathcal{I}} Y \cap U = Y \cap \bigcap \mathcal{I}$$

для $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ и конечного $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$, вытекает ($\mathsf{Top}_2$) и ($\mathsf{Top}_3$). Пространство $(Y, \mathcal{R})$ называют *подпространством* пространства X, а топологию $\mathcal{R}$ называют *индуцированной топологией* или *топологией подпространства.*

2.1.2 Гомеоморфизмы, топологические свойства

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным отображением*, если $f^{-1}(U)$ открытое в X множество для любого открытого множества $U \subset Y$ пространства Y.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f биекция и отображения f и $f^{-1} : Y \to X$ непрерывны.

Предложение 2.1. *Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топологические пространства, $f : X \to Y$ биекция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *f является гомеоморфизмом;*

(2) *$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ для $U \in \mathcal{T}_Y$ и $f(V) \in \mathcal{T}_Y$ для $V \in \mathcal{T}_X$;*

(3) *отображение*
$$\tilde{f} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y,\ V \mapsto f(V)$$
является биекцией.

Доказательство. Условие (2) эквивалентно тому, что f и f^{-1} непрерывные отображения. Импликация (2) $\Leftrightarrow$ (3) очевидна. □

Из предложения 2.1 (1)$\Leftrightarrow$(3) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть X, Y и Z пространства. Тогда*

(1) *тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ является гомеоморфизмом;*

(2) *если $f : X \to Y$ гомеоморфизм, то обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ является гомеоморфизмом;*

(3) *если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ гомеоморфизмы, то композиция $g \circ f : X \to Z$ является гомеоморфизмом.*

Пространства X и Y называются *гомеоморфными пространствами*, если существует гомеоморфизм из X в Y. Из предложения 2.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Отношение "пространство X гомеоморфно пространству Y" является отношением эквивалентности на классе* Top *всех топологических пространств.*

Свойство $\mathcal{P}(X)$ пространства X называется *топологическим свойством*, если из того, что выполняется $\mathcal{P}(X)$ для пространства X и пространство X гомеоморфно пространству Y вытекает, что выполняется $\mathcal{P}(Y)$ для пространства Y.

Одно из главных направлений исследований в топологии, это изучение топологических свойств топологических пространств.

2.1.3 Базы, предбазы, первая и вторая аксиома счетности

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{B}$ называется *базой* пространства X, если выполняется условие:

(тв) для любого открытого множества $U \in \mathcal{T}$ существует семейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ элементов базы $\mathcal{B}$, такое что $\bigcup \mathcal{U} = U$.

Это условие можно также сформулировать: $U = \bigcup\{V \in \mathcal{B} : V \subset U\}$ для $U \in \mathcal{T}$. Также используются такая эквивалентная формулировка:

(тв*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует открытая окрестность $U \in \mathcal{B}$ из базы $\mathcal{B}$ точки x, такая что $x \in U \subset S$.

Семейство подмножеств γ множества X называется *покрытием множества* X, если $\bigcup \gamma = X$.

Для базы $\mathcal{B}$ выполняются условия:

(тв$_1$) $\mathcal{B}$ покрытие X;

(тв$_2$) если $x \in X$, $U, V \in \mathcal{B}$ и $x \in U \cap V$, то $x \in W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathcal{B}$.

Если для пространства X существует не более чем счетная база топологического пространства X, то говорят, что *пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности* или *пространство X со счетной базой.*

При гомеоморфизме $f : X \to Y$ база $\mathcal{B}$ пространства X переходит в базу $\mathcal{D} = \{f(U) : U \in \mathcal{B}\}$ пространства Y. Если $|\mathcal{B}| \leqslant \omega$, то $|\mathcal{D}| \leqslant \omega$. Следовательно, вторая аксиома счетности является топологическим свойством.

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{P}$ называется *предбазой* пространства X, если выполняется условие:

(трв) всевозможные конечные пересечения $W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$, $W_i \in \mathcal{P}$ для $i = 1, 2, ..., n$ элементов $\mathcal{P}$ образуют базу пространства X.

Это условие эквивалентно: семейство $\{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P},\ |\mu| < \omega\}$ является базой пространства X. Еще одно эквивалентное условие:

(трв*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует конечное семейство $\mu \subset \mathcal{P}$, такое что $x \in \bigcap \mu \subset S$.

Для предбазы $\mathcal{P}$ выполняются условие:

($\mathsf{ТРВ}_1$) $\mathcal{P}$ покрытие X.

Пусть $x \in X$. Семейство открытых окрестностей $\mathcal{B}_x$ точки x называется *базой в точке* x, если для любой окрестности W точки x существует $U \in \mathcal{B}_x$, такое что $x \in U \subset W$.

Если для пространства X и точки $x \in X$ существует не более чем счетная база в точке x топологического пространства X, то говорят, что *пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в точке x*. Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в в каждой точке $x \in X$, то говорят, что *пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

При гомеоморфизме $f : X \to Y$ база $\mathcal{B}_x$ пространства X в точке x переходит в базу $\mathcal{D}_{f(x)} = \{f(U) : U \in \mathcal{B}_x\}$ пространства Y. Если $|\mathcal{B}_x| \leqslant \omega$, то $|\mathcal{D}_{f(x)}| \leqslant \omega$. Следовательно, первая аксиома счетности является топологическим свойством.

> Часто, когда говорят о не более чем счетных множествах и семействах, говорят “счетный” вместо “не более чем счетный”. Особенно если говорят о счетных базах, обычно подразумевают не более чем счетные базы.

2.1.4 Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, I

Пусть X есть топологическое пространство.

Подмножество $M \subset X$ называется *дискретным*, если подпространство M дискретно. Подмножество M дискретно, если только если для любого $x \in M$ существует окрестность U точки x, для которой $U \cap M = \{x\}$. Подмножество M дискретно и замкнуто в X, если только если для любого $x \in X$ существует окрестность U точки x, для которой $|U \cap M| \leqslant 1$.

Множество $D \subset X$ называется *всюду плотным в X множеством*, если $D \cap U \neq \varnothing$ для любого непустого открытого множества $U \subset X$.

Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует всюду плотное не более чем счетное подмножество.

Предложение 2.4. *Пусть X пространство со счетной базой и $Y \subset X$. Тогда подпространство Y со счетной базой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Тогда $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ является счетной базой Y. □

Предложение 2.5. *Пусть X дискретное пространство со счетной базой. Тогда $|X| \leqslant \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Так как $\{x\}$ открыто для $x \in X$, то $x \in U \subset \{x\}$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Тогда $\{=\}U \in \mathcal{B}$. Следовательно, $|X| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \omega$. □

Из предложений 2.4 и 2.5 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.6. *Пусть X пространство со счетной базой и $M \subset X$ дискретное подмножество. Тогда $|M| \leqslant \omega$.*

Предложение 2.7. *Пусть X пространство со счетной базой. Тогда X сепарабельное пространство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ есть счетная база X состоящая из непустых множеств. Для каждого $V \in \mathcal{B}$ зафиксируем $x_V \in U$. Положим $D = \{x_V : V \in \mathcal{B}\}$. Тогда $|D| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \omega$. Покажем, что D всюду плотно в X. Пусть U открытое непустое подмножество X. Так как $\mathcal{B}$ база, то $V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{B}$. Тогда $x_V \in D \cap U \neq \varnothing$. □

2.1.5 Метрические и метризуемые пространства, I

Метрическое пространство есть пара (X, ρ), состоящая из множества X и функции ρ, определенной на множестве $X \times X$, удовлетворяющей следующим условиям:

(Metr_0) если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$;

(Metr_1) $\rho(x, x) = 0$;

(Metr_2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(Metr_3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Функция d называется *метрикой*. Метрика неотрицательна, так как $0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y)$.

Обозначим

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X \,:\, \rho(x, y) < r\}$$

открытый шар радиуса r в точке x. Определим топологию $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X: $U \in \mathcal{T}_\rho$ если

(MT) для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$.

Утверждение 2.8. *Семейство $\mathcal{T}_\rho$ является топологией.*

Доказательство. Проверим (Top_1). Для $\varnothing$ выполняется (MT). Если $x \in X$, то $B_\rho(x, 1) \subset X$. Следовательно для X выполняется (MT).

Проверим (Top_2). Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_\rho$ и $U = \bigcup \mathcal{M}$. Если $x \in U$, то $x \in V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{M}$ и существует $\varepsilon > 0$, для которого $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset V \subset U$. Следовательно для U выполняется (MT).

Проверим (Top_3). Пусть $\mathcal{I} = \{V_1, V_2, ..., V_n\} \subset \mathcal{T}_\rho$ конечное семейство и $U = \bigcap \mathcal{I}$. Если $x \in U$, то для каждого $i = 1, 2, ..., n$ существует $\varepsilon_i > 0$, такое что $B_\rho(x, \varepsilon_i) \subset V_i$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для $\varepsilon = \min \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$. Следовательно для U выполняется (MT). □

Топология $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X называется *топологией, индуцированной метрикой ρ* или *топологией метрического пространства* (X, ρ).

> Мы будем говорить о метрическом пространстве (X, ρ) также как о топологическом пространстве, подразумевая топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_\rho)$. Некоторые топологические свойства формулируются также в терминах метрического пространства. Тогда эквивалентность метрических и топологических определений надо доказывать.

Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *метризуемым пространством*, если существует метрика ρ на X, для которой топология $\mathcal{T}_\rho$, индуцированная метрикой ρ, совпадают с топологией $\mathcal{T}$.

Две метрики ρ и η на множестве X называются *эквивалентными метриками*, если индуцированные метриками топологии $\mathcal{T}_\rho$ и $\mathcal{T}_\eta$ совпадают.

Утверждение 2.9. *Открытый шар $B_\rho(x, \varepsilon)$ является открытой окрестностью точки $x \in X$ для $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Из (Metr_1) вытекает $x \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Докажем $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Тогда $\rho(x, y) < \varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon - \rho(x, y)$. Из ($\mathsf{Metr}_2$) и ($\mathsf{Metr}_3$) вытекает $B_\delta(y, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$. □

Из утверждения 2.9 и определения топологии метрического пространства вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.10. *Семейство $\{B_\rho(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ является базой метрического пространства (X, ρ).*

Утверждение 2.11. *Пусть $x \in X$ и $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Тогда семейство $\{B_\rho(x, \varepsilon_n) : n \in \omega\}$ является базой в точке x.*

Доказательство. Пусть $x \in U \in \mathcal{T}_\rho$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Так как $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ сходится к 0, то $\varepsilon_n < \varepsilon$ для некоторого $n \in \omega$. Следовательно $x \in B_\rho(x, \varepsilon_n) \subset U$. □

Из утверждения 2.11 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.12. *Метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.*

Пусть $Y \subset X$ и $\eta = \rho|_{Y \times Y}$ есть ограничение функции ρ на $Y \times Y$. Тогда η является метрикой на Y, которая называется *ограничением метрики ρ на Y*. Метрическое пространство (Y, η) называется *метрическим подпространством.*

Предложение 2.13. *Пусть (X, ρ) метрическое пространство, $Y \subset X$ и η есть ограничение метрики ρ на Y. Пусть $(Y, \mathcal{Q})$ есть топологическое подпространство топологического пространства $(X, \mathcal{T}_\rho)$. Тогда $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_\eta$, то есть топология на $Y \subset X$ подпространства X с топологией метрического пространства совпадает с топологией метрического пространства на Y с метрикой на Y, которая является ограничением метрики X на Y.*

Доказательство. По определению $\mathcal{Q} = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_\rho\}$.

Докажем $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{Q}$. Пусть $V \in \mathcal{T}_\eta$. Для каждого $x \in V$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое что $B_\eta(x, \varepsilon_x) \subset V$. Положим $U = \bigcup_{x \in V : B_\rho(x, \varepsilon_x)}$. Так $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$ для $x \in X$ (утверждения 2.9), то $U \in \mathcal{T}_\rho$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$ для $x \in Y$, то $V = Y \cap U \in \mathcal{Q}$.

Докажем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{T}_\eta$. Пусть $V \in \mathcal{Q}$. Тогда $V = Y \cap U$ для некоторого $U \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $x \in V$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$, то $B_\eta(x, \varepsilon) \subset V$ и для V выполняется ($\mathsf{мт}$). □

Теорема 2.14. *Пусть X метризуемое пространство. Тогда подпространство $Y \subset X$ метризуемо.*

Доказательство. Пусть ρ есть метрика на X, которая индуцирует топологию X. Пусть η есть ограничение метрики ρ на Y. Из предложения 2.15 вытекает, что топология на Y, индуцированная метрикой η, совпадает с топологией подпространства. Следовательно, пространство Y метризуемо. $\square$

Пусть $\varepsilon > 0$. Подмножество $M \subset X$ называется *ε-сетью*, если для любого $x \in X$ существует $y \in M$, такое что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Предложение 2.15. *Пусть (X, ρ) метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Существует ε-сеть $M \subset X$, для которой выполняется условие: если $x, y \in M$ и $x \neq y$, то $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$. ε-Сеть M является дискретным замкнутым подмножеством X.*

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X \,:\, \text{если } x, y \in L \text{ и } x \neq y, \text{ то } \rho(x, y) \geqslant \varepsilon\}.$$

Покажем, что если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ есть цепь, то $R = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Пусть $x, y \in R$ и $x \neq y$. Существуют $A, B \in \mathcal{R}$, такие что $x \in A$ и $y \in B$. Пусть $C = A \cup B$. Так как $\mathcal{R}$ цепь, то либо $C = A$ либо $C = B$, в любом случае $C \in \mathcal{R}$. Тогда $x, y \in C \in \mathcal{L}$ и $x \neq y$. Следовательно $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$.

Из следствия леммы Цорна (следствие 1.13) вытекает, что существует максимальный элемент $M \in \mathcal{L}$. Покажем, что M является ε-сетью. Предположим противное. Тогда существует $p \in X$, такой что $\rho(p, x) \geqslant \varepsilon$ для всех $x \in M$. Тогда $M^+ = M \cup \{p\} \in \mathcal{L}$. Противоречие с максимальностью M в $\mathcal{L}$.

Так как $B_\rho(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$ для $x \in M$, то M дискретное подмножество X. Покажем, что M замкнуто в X. Множество M замкнуто, если множество $W = X \backslash M$ открыто в X. Пусть $p \in W$. Так как M ε-сеть и $p \notin M$, то $0 < \rho(p, x) < \varepsilon$ для некоторого $x \in M$. Тогда $B_\rho(p, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$ и $x \notin B_\rho(p, \delta)$, где $\delta = \min(\rho(p, x), \varepsilon - \rho(p, x))$. Так как $B_\rho(p, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$, то $B_\rho(p, \delta) \cap M = \varnothing$ и $B_\rho(p, \delta) \subset W$. $\square$

Предложение 2.16. *Пусть (X, ρ) метрическое пространство, множество M всюду плотно в X и $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Тогда семейство множеств*

$$\mathcal{B} = \{B_\rho(x, \varepsilon_n) \,:\, x \in M, n \in \omega\}$$

является базой пространства X.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и U окрестность точки x. Существует $\varepsilon > 0$, для которого $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Так как $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ сходится к 0, то $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$ для некоторого $n \in \omega$. Так как M всюду плотно в X, то существует $y \in M \cap B_\rho(x, \varepsilon_n)$. Тогда $x \in B_\rho(y, \varepsilon_n) \in \mathcal{B}$ и $B_\rho(y, \varepsilon_n) \subset B_\rho(x, 2\varepsilon_n) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. $\square$

Теорема 2.17. *Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X удовлетворяет второй аксиоме счетности;*

(2) *X сепарабельно;*

(3) *любое дискретное замкнутое подмножество X не более чем счетно.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) вытекает из предложения 2.7. Импликация (1)⇒(3) вытекает из предложения 2.6.

Докажем (2)⇒(1). Пусть $M = \{x_m : m \in \omega\} \subset X$ не более чем счетное плотное подмножество X. Положим $\mathcal{B} = \{B_\rho(x_m, \frac{1}{2^n}) : m, n \in \omega\}$. Тогда $|\mathcal{B}| \leqslant \omega$ и, в силу предложения 2.15, $\mathcal{B}$ является базой X.

Докажем (3)⇒(2). Пусть $n \in \omega$. В силу предложения 2.12, существует дискретная и замкнутая $\frac{1}{2^n}$-сеть $M_n \subset X$. Из (3) вытекает $|M_n| \leqslant \omega$. Положим $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$. Тогда $|M| \leqslant \omega$. Покажем, что M всюду плотно в X. Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $x \in U$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $n \in \omega$, такое что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Существует $y \in M_n$, такое что $\rho(x, y) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $y \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap M \subset U \cap M \neq \varnothing$. □

2.1.6 Методы введения топологий, I

Пусть X — произвольное множество; под введением тополотопологии на X мы понимаем выбор семейства $\mathcal{T}$ подмножеств X, удовлетворяющих условиям (Top_1)–(Top_3), т. е. такого семейства $\mathcal{T}$, что пара $(X, \mathcal{T})$ есть топологическое пространство. Часто бывает удобнее давать косвенное описание семейства открытых множеств. Мы приведем несколько методов введения топологий, которые заключаются в том, что определяется предбаза, или определяется база, или система окрестностей.

Иногда топологию $\mathcal{T}$ можно задать в явном виде.

Пространство X называется *дискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \mathsf{Exp}(X)$. Дискретные пространства характеризуются тем, что каждая точка[1] $\{x\} \subset X$ является открытым множеством.

Пространство X называется *антидискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.

Пример 2.18 (связное двоеточие)**.** Пусть $D = \{0, 1\}$ и $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Для семейство $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) на D. Пространство $(D, \mathcal{T})$ называется *связным двоеточием* или *пространством Серпинского.*

Еще бывают *дискретное двоеточие* — двоеточие с дискретной топологией и *антидискретное двоеточие* — двоеточие с антидискретной топологией. Любое пространство из двух точек гомеоморфно одному из этих трех двоеточий.

Пример 2.19 (связная стрелка)**.** Пусть $\mathcal{B} = \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$. Для семейство $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) на $\mathbb{R}$. Пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *связной стрелкой.* Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии связной стрелки.

Любое двухточечное подпространство связной стрелки гомеоморфно связному двоеточию.

[1] Точнее, каждое одноточечное подмножество.

Пример 2.20 (натуральные числа с кофинитной топологией)**.** Пусть $\mathcal{B} = \{U \subset \mathbb{N} : |\mathbb{N} \backslash U| < \omega\}$ и $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \mathcal{B}$. Для семейство $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) на $\mathbb{R}$. Топология $\mathcal{T}$ называется *кофинитной топологией.* Пространство $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ называется *натуральными числами с кофинитной топологией.* Семейство $\mathcal{B}$ является базой.

Пусть $\mathcal{B}$ есть семейство подмножеств X, для которой выполняются условия (TB_1) и (TB_2).

Утверждение 2.21. *Для семейства $\mathcal{T}_\mathcal{B} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}\}$ выполняются условия* (Top_1)–(Top_3) *и $\mathcal{B}$ является базой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_\mathcal{B})$.*

Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X, для которых выполняется условия (TB_1) и (TB_2) называется *базой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ называется *топология, порожденная базой $\mathcal{B}$*.

> Мы ввели два понятия, которые различны, но названия звучат похоже. Первое: база топологического пространства (некоторого конкретного пространства), база топологии (некоторой топологии конкретного топологического пространства). Второе: база топологии (на некотором множестве).

Пусть $\mathcal{P}$ есть семейство подмножеств X, для которой выполняются условия (TPB_1), то есть $\mathcal{P}$ покрытие X.

Утверждение 2.22. *Для семейства $\mathcal{B}_\mathcal{P} = \{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P},\ |\mu| < \omega\}$ выполняются условия* (TB_1) *и* (TB_2). *Для семейства $\mathcal{T}_\mathcal{P} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}_\mathcal{P}\}$ выполняются условия* (Top_1)–(Top_3), *$\mathcal{P}$ является предбазой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ и $\mathcal{B}_\mathcal{P}$ является базой $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$.*

Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств X, для которых выполняется условия (TPB_1) (то есть $\mathcal{P}$ покрытие X) называется *предбазой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ называется *топология, порожденная предбазой $\mathcal{P}$*.

> Мы ввели два понятия, которые различны, но названия звучат похоже. Первое: предбаза топологического пространства (некоторого конкретного пространства), предбаза топологии (некоторой топологии конкретного топологического пространства). Второе: предбаза топологии (на некотором множестве).

Пример 2.23 (прямая Зоргенфрея)**.** Пусть $\mathcal{P}_r = \{[x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{P}_l = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l \cup \mathcal{P}_r$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пораженная предбазой $\mathcal{P}$. Пространство $\mathsf{S} = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *прямой Зоргенфрея.* Семейство $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ является базой прямой Зоргенфрея S.

Пример 2.24 (плоскостью Немыцкого)**.** Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ есть верхняя полуплоскость. Обозначим $B(x_0, y_0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R\}$ открытый круг радиуса R с центром в точке (x_0, y_0). Положим $\mathcal{B}_1 = \{B(x_0, y_0, R) : (x_0, y_0) \in P, R > 0, R \leqslant y_0\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{(x_0, 0)\} \cup B(x_0, R, R) : x_0 \in \mathbb{R}, R > 0\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пораженная базой $\mathcal{B}$. Пространство $(P, \mathcal{T})$ называется *плоскостью Немыцкого.*

2.1.7 Линейно упорядоченные пространства, I

Пусть $(X,<)$ линейно упорядоченное множество. Положим

$$\mathcal{P}_{\text{л.у.м}} = \{X\} \cup \{(x,+\infty)_X, (-\infty,y)_X \;:\; x,y \in X\}.$$

Топология $\mathcal{T}$, порожденная предбазой топологии $\mathcal{P}$, называется *топологией линейно упорядоченного пространства* или *порядковой топологией* и пространство $(X,\mathcal{T})$ *линейно упорядоченным пространством.* Базу топологий $\mathcal{T}$ образует семейство

$$\mathcal{B}_{\text{л.у.м}} = \{X\} \cup \{(x,+\infty)_X, (-\infty,y)_X, (x,y)_X \;:\; x,y \in X\}.$$

Топология линейно упорядоченного пространства на $\mathbb{R}$ совпадает со стандартной топологией на $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\mathcal{B}_{\text{в.у.м}} = \{(-\infty,y]_X, (x,y]_X \;:\; x,y \in X, x<y\}.$$

Утверждение 2.25. *Если X есть в.у.м с порядковой топологией, то $\mathcal{B}_{в.у.м}$ является базой для X.*

Доказательство. Достаточно показать, что множества вида $(-\infty,x]_X$ открыты в X. Если x максимальный элемент в X, то $(-\infty,x]_X = X$. Для не максимального элемента $x \in X$ обозначим $x^+ = \min(x,+\infty)_X$. Тогда $(-\infty,x]_X = (-\infty,x^+)_X$ открыто в X. □

Обозначим $\widetilde{X} = \{-\infty\} \cup X \cup \{+\infty\}$ и на $\widetilde{X}$ рассмотрим порядок, продолжающий порядок X и в котором $-\infty$ минимальный элемент и $+\infty$ максимальный элемент. Тогда

$$\mathcal{B}_{\text{л.у.м}} = \{(x,y)_X \;:\; x,y \in \widetilde{X},\ x<y\},$$
$$\mathcal{B}_{\text{в.у.м}} = \{(x,y]_X \;:\; x,y \in \widetilde{X},\ x<y<+\infty\}.$$

На ординалах рассматривается порядковая топология.

Пусть $(X,<)$ и линейно упорядоченные пространства.

Определим л.у.м $X +_{\triangleleft} Y$ — *сумма двух л.у.м.* Если X и Y не пересекаются, то $X +_{\triangleleft} Y = X \cup Y$, если же пересекаются, то возьмем непрекращающиеся копии X' и Y' (например, $X' = \{0\} \times X$ и $Y' = \{1\} \times Y$) и положим $X +_{\triangleleft} Y = X' \cup Y'$. Порядок на $X +_{\triangleleft} Y$ продолжает порядки X и Y, и $x < y$ для $x \in X$ и $y \in Y$. Аналогично определяется сумма нескольких л.у.м.

Определим л.у.м $X \times_{\triangleleft} Y$ — *лексикографическое произведение двух л.у.м.* Как множество, $X \times_{\triangleleft} Y = X \times Y$. Определим порядок: $(x_1,y_1) < (x_2,y_2)$ тогда и только тогда если $x_1 < x_2$ для $x_1 \neq x_2$ и $y_1 < y_2$ для $x_1 = x_2$. Порядок на $X \times_{\triangleleft} Y$ называется *лексикографическим порядком.*

Пример 2.26 (две стрелки)**.** $[0,1] \times_{\triangleleft} \{0,1\}$ — л.у.м и топологической пространство *две стрелки.*

Несложно доказывается

Предложение 2.27. *Лексикографическое произведение двух в.у.м является в.у.м.*

На ординалах Ord рассматриваются операции: $\lambda + \gamma = \mathsf{Ord}(\lambda +_{\triangleleft} \gamma)$ и $\lambda\gamma = \lambda \cdot \gamma = \mathsf{Ord}(\lambda \times_{\triangleleft} \gamma)$.

Если X л.у.м и $Y \subset X$, то Y наследует порядок из X и Y наследует топологию из X с порядковой топологией. Но не обязательно порядковая топология на Y совпадает с топологией Y, наследуемой из X.

Пусть $X = \mathbb{R}$ и $Y = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Тогда Y порядково изоморфно X, но Y не гомеоморфно X.

2.2 Дополнение

2.2.1 Системы окрестностей

Пусть $(X, \mathcal{T})$ есть топологическое пространство. Пусть для каждого $x \in X$ задана база $\mathcal{B}_x$ в точке x. Индексируемое семейство $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ называется *системой окрестности топологического пространства* X.

Для системы окрестностей $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ выполняются условия:

(NS_0) если $x \in X$ и $U \in \mathcal{B}_x$, то $U \subset X$;

(NS_1) $\mathcal{B}_x \neq \varnothing$ для любого $x \in X$ и $x \in U$ для $U \in \mathcal{B}_x$;

(NS_2) если $U, V \in \mathcal{B}_x$, то $W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathcal{B}_x$;

(NS_3) если $x \in U \in \mathcal{B}_y$, то $x \in W \subset U$ для некоторого $W \in \mathcal{B}_x$.

Семейство $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ является базой пространства X.

2.2.2 Методы введения топологий, II

Пусть X множество.

Если для индексированного семейства $\mathfrak{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ выполняется условия (NS_0)-(NS_3), то семейство $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ называется *системой окрестностей топологии.*

Утверждение 2.28. *Для семейства $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ выполняются условия (TB_1) и (TB_2), то есть $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}}$ является базой топологии. Тогда для $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}} = \{\bigcup \mu : \mu \subset \mathcal{B}_{\mathfrak{B}}\}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) и $\mathcal{B}_{\mathfrak{B}}$ является базой топологического пространства $(X, \mathcal{T}_{\mathfrak{B}})$.*

Топология $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ называется *топология, порожденная системой окрестностей топологии* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$.

Введение топологии с помощью системы окрестностей топологии более наглядно, чем с помощью базы топологии.

Прямая Зоргенфрея. Положим $\mathcal{B}^{\mathsf{S}}_x = \{[x, y) : x < y\}$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\{\mathcal{B}^{\mathsf{S}}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ является системой окрестностей для прямой Зоргенфрея.

Плоскость Немыцкого. Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ есть верхняя полуплоскость, d — евклидова метрика на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если $y = 0$, то положим

$$\mathcal{B}^{PN}_{(x,0)} = \{\{(x, 0)\} \cup B_d((x, z), z) : z > 0\}.$$

Если $y > 0$, то положим

$$\mathcal{B}^{PN}_{(x,y)} = \{B_d((x, y), r) : 0 < r < y\}.$$

Тогда $\{\mathcal{B}^{PN}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ является системой окрестностей для плоскости Немыцкого.

2.2.3 Кардинальные инварианты, I

Кардинальным инвариантом называют функцию

$$\Phi : \mathsf{Top} \to \mathsf{Card},$$

для которой выполняется условие: если пространства X и Y гомеоморфны, то $\Phi(X) = \Phi(X)$.

Определим ряд кардинальных инвариантов. Удобнее, когда кардинальные инварианты принимают бесконечные значения. Для удобства определения кардинальных инвариантов введем обозначение:

$$\min\nolimits_* \mathcal{M} = \min(\{\omega\} \cup \mathcal{M}), \qquad \sup\nolimits_* \mathcal{M} = \sup(\{\omega\} \cup \mathcal{M})$$

для $\mathcal{M} \subset \mathsf{Card}$. Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство и $x \in X$. Положим

$w(X) = \min_*\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ база $X\}$ — *вес*;

$d(X) = \min_*\{|M| : M \subset X$ всюду плотно в $X\}$ — *плотность*;

$e(X) = \sup_*\{|M| : M \subset X$ дискретно и замкнуто в $X\}$ — *экстенд*;

$s(X) = \sup_*\{|M| : M \subset X$ дискретно в $X\}$ — *спред*;

$c(X) = \min_*\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ дюзьюнктное семейство непустых открытых множеств в $X\}$ — *число Суслина*;

$l(X) = \min_*\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ открытое покрытие $X\}$ — *число Линделефа*;

$hd(X) = \sup_*\{d(Y) : Y \subset X\}$ — *наследственная плотность*;

$hl(X) = \sup_*\{l(Y) : Y \subset X\}$ — *наследственное число Линделефа*;

$\chi(x, X) = \min_*\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ база в $x\}$ — *характер в точке* x,
$\chi(X) = \sup_*\{\chi(x, X) : x \in X\}$ — *характер*.

Наиболее интересный случай, когда кардинальные инварианты счетны. Часто пространства со счетным кардинальным инвариантом имеет специальное название.

$w(X) \leqslant \omega$ — счетная база, вторая аксиома счетности;

$d(X) \leqslant \omega$ — сепарабельность;

$e(X) \leqslant \omega$ — *счетный экстенд*;

$s(X) \leqslant \omega$ — *счетный спред*;

$c(X) \leqslant \omega$ — *свойство Суслина*;

$l(X) \leqslant \omega$ — *финальная компактность*;

$hd(X) \leqslant \omega$ — *наследственная сепарабельность*;

$hl(X) \leqslant \omega$ — *наследственная финальная компактность*;

$\chi(x, X) \leqslant \omega$ — *счетный характер в точке* x, *счетная база в точке, первая аксиома в точке*

$\chi(X) \leqslant \omega$ — *счетный характер, первая аксиома.*

Отметим некоторые простые неравенства.

Предложение 2.29. *Пусть* X *топологическое пространство. Тогда*

$d(X) \leqslant hd(X) \leqslant w(X)$, $l(X) \leqslant hl(X) \leqslant w(X)$;

$e(X) \leqslant l(X)$, $e(X) \leqslant s(X)$, $s(X) \leqslant hd(X)$, $s(X) \leqslant hl(X)$;

$c(X) \leqslant d(X)$, $c(X) \leqslant s(X)$.

2.2.4 Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, II

Из предложения 2.30, в дополнению к результатам из раздела 2.1.4, вытекает

Предложение 2.30. *Пусть* X *пространство со счетной базой. Тогда* X

(наследственно) сепарабельно, (наследственно) линделефово,

имеет счетный спред, свойство Суслина.

2.3 Задачи

2.3.1 Метрические и метризуемые пространства

Задача 2.1. Пусть X метризуемое пространство. Доказать, что следующие свойства эквивалентны для X: счетная база; сепарабельность; свойство Суслина; линделефовость.

Задача 2.2. Пусть X метризуемое пространство. Доказать, что $w(X) = d(X) = c(X) = l(X) = e(X) = s(X) = hd(X) = hl(X)$.

Задача 2.3. Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

Задача 2.4. Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

2.3.2 Линейно упорядоченные пространства

Задача 2.5. Привести пример несепарабельного линейно упорядоченное пространство.

Задача 2.6. Доказать, что в две стрелки (пример 2.26) типологически вкладывается прямая Зонгенфрея (пример 2.23).

Задача 2.7. Доказать, что две стрелки раскладывается в сумму двух подпространств, каждое из которых гомеоморфно прямой Зонгенфрея.

Задача 2.8. Привести пример сепарабельного неметризуемого линейно упорядоченное пространство.

Задача 2.9. Пусть X линейно упорядоченное пространство. Доказать, что $\chi(X) \leqslant d(X) = hd(X) \leqslant hl(X) = s(X) = c(X)$.

2.3.3 Базы пространств

Задача 2.10. Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X со второй аксиомой счетности. Доказать, что существует $\mathcal{B}_* \subset \mathcal{B}$, такое что $|\mathcal{B}_*| \leqslant \omega$ и $\mathcal{B}_*$ база X.

Задача 2.11. Пусть $\mathcal{B}$ есть база пространства X. Доказать, что существует $\mathcal{B}_* \subset \mathcal{B}$, такое что $|\mathcal{B}_*| \leqslant w(X)$ и $\mathcal{B}_*$ база X.

2.3.4 Свойства примеров

Задача 2.12. Доказать что у связной стрелки (пример 2.19) есть счетная база, но она не метризуема.

Задача 2.13. Доказать что у натуральных чисел с кофинитной топологией (пример 2.20) есть счетная база, но они не метризуемы.

Задача 2.14. Доказать что у прямой Зонгенфрея S (пример 2.23) нет счетной базы.

Задача 2.15. Доказать что $w(\mathsf{S}) = 2^\omega$.

Задача 2.16. Доказать что прямая Зонгенфрея сепарабельна.

Задача 2.17. Доказать что в прямой Зонгенфрея любое дискретное подмножество не более чем счетно.

Задача 2.18. Доказать что прямая Зонгенфрея финально компактна.

Задача 2.19. Доказать что прямая Зонгенфрея наследственно финально компактна.

Задача 2.20. Доказать что прямая Зонгенфрея наследственно сепарабельна.

Задача 2.21. Опишите индуцированную из плоскости Немыцкого P (пример 2.24) топологию на нижней прямой $y = 0$ и верхней полуплоскости $y > 0$

Докажите, что плоскость Немыцкого сепарабельна и содержит дискретное замкнутое подмножество мощности 2^ω.

Докажите, что плоскость Немыцкого без счетной базы и неметризуема.

Глава 3

Предельные точки, пределы, непрерывные отображения

3.1 Типы точек, замыкание и внутренность, сходящиеся последовательности, непрерывность

3.1.1 Типы точек

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство и $\mathcal{F} = \{X \backslash U : U \in \mathcal{T}\}$ семейство замкнутых подмножеств пространства X.

Пусть $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется

- *точкой прикосновения* множества M, если $U \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *предельной точкой* множества M, если $(U \backslash \{x\}) \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *граничной точкой* множества M, если $U \cap M \neq \varnothing$ и $U \backslash M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *внутренней точкой* множества M, если $U \subset M$ для некоторой окрестности U точки x.

В этих определениях можно заменить "окрестности" на "открытой окрестности". Если $\mathcal{B}_x$ база в точке x, то в определениях можно заменить "окрестности" на "элемента базы $\mathcal{B}_x$".

Множество $\mathring{U} \subset X$ называется *проколотой окрестностью* точки x, если $\mathring{U} = U \backslash \{x\}$ для некоторой окрестности U точки x. Точка x является предельной точкой множества M если и только если $\mathring{U} \cap M \neq \varnothing$ для любой проколотой окрестности $\mathring{U}$ точки x.

Точка x является предельной точкой множества M если и только если x является точкой прикосновения множества $M \backslash \{x\}$. Любая предельная точка является точкой прикосновения.

Точка x называется *изолированной* точкой пространства X, если $\{x\}$ открытое множество, то есть множество $\{x\}$ является окрестностью точки x. Точка $x \in M$ называется изолированной точкой множества X, если x изолированная точка подпространства M, то есть $\{x\} = M \cap U$ для некоторой окрестности U точки x в пространстве X.

Утверждение 3.1. (1) *Если $x \in M$, то x точка прикосновения множества M.*

(2) *Если $x \notin M$, то x точка прикосновения множества M тогда и только тогда когда x предельная точка M.*

(3) *Если x изолированная точка M, то x не предельная точка M.*

(4) *Если x точка прикосновения не предельная точка M, то x изолированная точка M;*

(5) *Точка x является граничной точкой множества M если и только если x точка прикосновения множеств M и $X \backslash M$.*

Доказательство. Докажем (1). Если U окрестность x, то $x \in U \cap M \neq \varnothing$.

Докажем (2). Если U окрестность x, то $U \cap M = (U \backslash \{x\}) \cap M$.

Докажем (3). Пусть U есть окрестность x, для которой $U \cap M = \{x\}$. Тогда $(U \backslash \{x\}) \cap M = \varnothing$.

Докажем (4). Так как x не предельная точка M, то $(U \backslash \{x\}) \cap M = \varnothing$ для некоторой окрестности U точки x. Так как x точка прикосновения M, то $U \cap M \neq \varnothing$. Следовательно, $U \cap M = \{x\}$ и x изолированная точка M.

Докажем (5). Определение граничной точки эквивалентно тому, что $U \cap M \neq \varnothing$ и $U \cap (X \backslash M) = U \backslash M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x. Это утверждение эквивалентно тому, что $U \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x ($\equiv x$ точка прикосновения множества M) и что $U \cap (X \backslash M) \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x ($\equiv x$ точка прикосновения множества $X \backslash M$). □

Положим

$$
\begin{aligned}
\overline{M} &= \{x \in X : x \text{ точка прикосновения } M\} && \text{— замыкание множества } M, \\
\operatorname{Fr} X &= \{x \in X : x \text{ граничная точка } M\} && \text{— граница множества } M, \\
\operatorname{Int} M &= \{x \in X : x \text{ внутренния точка } M\} && \text{— внутренность множества } M.
\end{aligned}
$$

Утверждение 3.2. (1) *Замыкание $\overline{M}$ множества M замкнуто,*

$$M \subset \overline{M} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : M \subset F\}$$

и $\overline{M}$ характеризуется тем, что $\overline{M}$ есть наименьшее замкнутое множество, которое содержит M.

(2) *Внутренность $\operatorname{Int} M$ множества M открыта,*

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset M\} \subset M$$

и $\operatorname{Int} M$ характеризуется тем, что $\operatorname{Int} M$ есть наибольшее открытое множество, которое содержится в M.

Доказательство. Докажем (1). Обозначим $\widetilde{F} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : M \subset F\}$. Как пересечение замкнутых множеств, множество $\widetilde{F}$ замкнуто и является наименьшим замкнутым множеством, содержащая множество M. Нам надо доказать $\widetilde{F} = \overline{M}$.

Докажем $\overline{M} \subset \widetilde{F}$. Пусть $x \in \overline{M}$. Так как $U = X \backslash \widetilde{F}$ не пересекается с $\widetilde{F}$, то U не является окрестностью точки x, то есть $x \notin U$. Следовательно, $x \in \widetilde{F}$.

Докажем $\widetilde{F} \subset \overline{M}$. Пусть $x \in \widetilde{F}$. Возьмем произвольную открытую окрестность U точки x. Тогда $M \not\subset \widetilde{F} \backslash U$, так как $\widetilde{F} \backslash U \subsetneq \widetilde{F}$ и $\widetilde{F}$ является наименьшим замкнутым множеством, содержащая множество M. Следовательно $M \cap U \neq \varnothing$ для любой открытой окрестности точки x, то есть $x \in \overline{M}$.

Докажем (2). Обозначим $\widetilde{U} = \bigcup\{U \in \mathcal{T} \ : \ M \subset U\}$. Как объединение открытых множеств, множество $\widetilde{U}$ открыто и является наибольшим открытым множеством, лежащие в множестве M. Нам надо доказать $\widetilde{U} = \operatorname{Int} M$.

Докажем $\operatorname{Int} M \subset \widetilde{U}$. Пусть $x \in \operatorname{Int} M$. Тогда $U \subset M$ для некоторой открытой окрестности точки x. Так как множество U открыто и $U \subset M$, то $U \subset \operatorname{Int} M$ и, следовательно, $x \in \operatorname{Int} M$.

Докажем $\widetilde{U} \subset \operatorname{Int} M$. Пусть $x \in \widetilde{U}$. Тогда $\widetilde{U}$ открытая окрестность точки x и $\widetilde{U} \subset M$. Следовательно $x \in \operatorname{Int} M$. □

Утверждение 3.3.

$$\operatorname{Int} M = X \backslash \overline{X \backslash M},$$
$$\overline{M} = X \backslash \operatorname{Int}(X \backslash M).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Так как $X \backslash \overline{X \backslash M}$ открыто и лежит в M, то $X \backslash \overline{X \backslash M} \subset \operatorname{Int} M$. Так как $\operatorname{Int} M$ открыто и $\operatorname{Int} M \subset M$, то $\operatorname{Int} M \cap (X \backslash M) = \varnothing$ и, следовательно, $\operatorname{Int} M \cap \overline{X \backslash M} = \varnothing$. Тогда $\operatorname{Int} M \subset X \backslash \overline{X \backslash M}$.

Докажем второе равенство. Положим $L = X \backslash M$. Из первого равенства вытекает $\operatorname{Int} L = X \backslash \overline{X \backslash L}$ и, следовательно, $\overline{X \backslash L} = X \backslash \operatorname{Int} L$. Заменяя L на $X \backslash M$ и $X \backslash L$ на M, получаем второе равенство. □

Теорема 3.4. *Пусть X топологическое пространство и $A, B \subset X$. Тогда*

(1)(co_1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

(co_2) $A \subset \overline{A}$;

(co_3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(co_3^*) *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(co_4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(2) (io_1) $\operatorname{Int} X = X$;

(io_2) $\operatorname{Int} A \subset A$;

(io_3) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;

(io_3^*) *если* $A \subset B$, *то* $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;

(io_4) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство. Докажем (1). Пункты (co_1), (co_2), (co_3^*) и (co_4) вытекает из утверждения 3.2.

Докажем (co_3). Включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ вытекает из того, что множество $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cup B}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащие $A \cup B$.

Включение $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ вытекает из того, что $A, B \subset A \cup B$ и, следовательно, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ и $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Пункт (2) вытекает из (1) и формулы $\operatorname{Int} M = X \backslash \overline{X \backslash M}$ (утверждение 3.3). $\square$

Утверждение 3.5. *Граница* $\operatorname{Fr} M$ *замкнута в* X *и*

$$\begin{aligned}\operatorname{Fr} M &= \overline{M} \cap \overline{X \backslash M} \\ &= \overline{M} \backslash \operatorname{Int} M \\ &= \operatorname{Fr}(X \backslash M).\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $x \in X$. Точка x граничная если и только если x точка прикосновения для множеств M и $X \backslash M$ (утверждение 3.1(5)), то есть $x \in \overline{M} \cap \overline{X \backslash M}$. Следовательно, первое равенство верно и $\operatorname{Fr} X$ замкнуто в X как пересечение двух замкнутых множеств.

Докажем второе равенство.

$$\operatorname{Fr} X = \overline{M} \cap \overline{X \backslash M} = \overline{M} \cap (X \backslash \operatorname{Int} M) = \overline{M} \backslash \operatorname{Int} M.$$

Докажем третье равенство.

$$\operatorname{Fr}(X \backslash M) = \overline{X \backslash M} \cap \overline{X \backslash (X \backslash M)} =$$
$$\overline{X \backslash M} \cap \overline{M} = \operatorname{Fr} X.$$

$\square$

3.1.2 Всюду плотные и нигде не плотные множества

Множество M *всюду плотно* в X если $M \cap U \neq \varnothing$ для любого непустого открытого $U \subset X$.

Множество M *нигде не плотно* в X если для любого непустого открытого $V \subset X$ существует непустое открытое $U \subset V$, для которого $M \cap U = \varnothing$.

Утверждение 3.6. (1) *Множество* M *всюду плотно в* X *если и только если* $\overline{M} = X$.

(2) *Множество* M *нигде не плотно в* X *если и только если* $X \backslash \overline{M}$ *всюду плотно в* X.

Доказательство. Докажем (1). ($\Rightarrow$). Пусть $x \in X$. Тогда $U \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности точки x, то есть x есть точка прикосновения множества M и $x \in \overline{M}$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Пусть $x \in U$. Так как $x \in \overline{M}$ и U есть окрестность x, то $U \cap M \neq \varnothing$.

Докажем (2). ($\Rightarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как M нигде не плотно в X, то существует непустое открытое $V \subset U$, для которого $V \cap M = \varnothing$. Тогда $V \subset X \backslash \overline{M}$ и, следовательно, $U \cap (X \backslash \overline{M}) \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как $X \backslash \overline{M}$ всюду плотно в X, то $V = U \cap (X \backslash \overline{M}) \neq \varnothing$. Непусто множество V открыто и $V \subset U$. $\square$

Из утверждения 3.6(2) вытекает

Утверждение 3.7. *Если M нигде не плотно в X, то $\overline{M}$ нигде не плотно в X.*

Утверждение 3.8. *Если M замкнуто или открыто в X, то граница $\operatorname{Fr} M$ нигде не плотна в X.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Fr} M = \operatorname{Fr}(X \backslash M)$ (утверждение 3.5), то достаточно доказать утверждение для замкнутого M. Из утверждения 3.5 вытекает, что $\operatorname{Fr} M = \overline{M} \backslash \operatorname{Int} M = M \backslash \operatorname{Int} M$. Пусть $U \subset X$ открытое непустое множество. Если $U \backslash M \neq \varnothing$, то $V = U \backslash M \subset U$ непусто открытое множество и $V \cap M = \varnothing$. Если $U \backslash M = \varnothing$, то $U \subset M$ и, следовательно, $U \subset \operatorname{Int} M$. Так как $\operatorname{Fr} M = M \backslash \operatorname{Int} M$, то $U \cap \operatorname{Fr} M = \varnothing$. □

3.1.3 Непрерывные отображения, I

Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{R})$ топологические пространства и $x \in X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если для любой окрестности W точки $f(x)$ существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$.

Отображение f называется *непрерывным*, если $f^{-1}(W)$ открыто для любого открытого $W \subset Y$.

Утверждение 3.9. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Отображение f непрерывно.*

(2) *Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть W открытая окрестность точки $f(x)$. Тогда $U = f^{-1}(W)$ открыто, $x \in U$ и $f(U) = W$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $W \subset Y$ открыто. Для каждого $x \in f^{-1}(W)$ существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$. То есть $x \in U \subset f^{-1}(W)$. Следовательно $f^{-1}(W)$ открыто. □

Пусть $\mathcal{B}_x$ база в точке x, $\mathcal{B}_y$ база в точке $y = f(x)$, $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y.

Утверждение 3.10. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Отображение f непрерывно в точке x.*

(2) $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности W точки y.*

(3) *Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $y \in \overline{f(M)}$.*

Доказательство. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть W окрестность y. Из (2) вытекает, что $x \in U = \operatorname{Int} f^{-1}(W)$. Тогда $f(U) \subset W$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть W окрестность y. Из (1) вытекает, что существует открытая окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$. Тогда $x \in U \subset f^{-1}(W)$. Так как U открыто, то $U \subset \operatorname{Int} f^{-1}(W)$. Следовательно $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Предположим противное, то есть $y \notin \overline{f(M)}$. Положим $W = Y \backslash \overline{f(M)}$. Тогда W является окрестностью точки y. Из (1) вытекает, что существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$. Так

$x \in \overline{M}$ и U окрестность x, то $U \cap M \neq \varnothing$. Следовательно $f(U) \cap f(M) \neq \varnothing$ и $f(M) \cap W \neq \varnothing$. Противоречие с $W = Y \backslash \overline{f(M)}$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть W есть открытая окрестность точки y. Положим $M = X \backslash f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \backslash W)$.

Покажем, что $x \notin \overline{M}$. Предположим противное, то есть $x \in \overline{M}$. Из (3) вытекает, что $y \in \overline{f(M)} = \overline{Y \backslash W} = Y \backslash W$. Противоречие с тем, что $y \in W$.

Положим $U = X \backslash \overline{M}$. Тогда U открытая окрестность x и

$$f(U) \subset f(X \backslash M) = f(f^{-1}(W)) = W.$$

□

Утверждение 3.11. (1) *Следующие условия эквивалентны.*

(a) *Отображение f непрерывно в точке x.*

(b) *Для любого $W \in \mathcal{B}_y$ существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.*

(c) *Для любого окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.*

(2) *Следующие условия эквивалентны.*

(a) $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности W точки y.*

(b) $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любого $W \in \mathcal{B}_y$.*

(c) $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y.*

Доказательство. Докажем (1). Импликации $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$ очевидны.

Докажем $(c) \Rightarrow (a)$. Пусть W окрестность y. Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существуют $W_1, W_2, ..., W_n \in \mathcal{P}$, для которых $y \in \bigcap_{i=1}^n W_i \subset W$. Из (c) вытекает, что для $i = 1, 2, ..., n$, существуют $U_i \in \mathcal{B}_x$, для которых $f(U_i) \subset W_i$. Тогда $f(U) \subset W$ для $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Докажем (2). Импликации $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$ очевидны.

Докажем $(c) \Rightarrow (a)$. Пусть W окрестность y. Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существуют $W_1, W_2, ..., W_n \in \mathcal{P}$, для которых $y \in \bigcap_{i=1}^n W_i \subset W$. Из (c) вытекает, что $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W_i)$ для $i = 1, 2, ..., n$. Тогда

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int} f^{-1}(W_i) = \operatorname{Int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(W_i)\right) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(W).$$

□

Предложение 3.12. *Пусть X и Y топологические пространства и $f : X \to Y$ отображение. Пусть $\mathcal{B}$ база Y и $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Отображение f непрерывно.*

(2) $f^{-1}(U)$ *открыто для каждого $U \in \mathcal{B}$.*

(3) $f^{-1}(U)$ *открыто для каждого $U \in \mathcal{P}$.*

(4) *Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

(5) *$f^{-1}(F)$ замкнуто в X для каждого замкнутого $F \subset Y$.*

(6) *Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{M}$.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть U открыто в Y. Так как $\mathcal{B}$ база, то $U = \bigcup \gamma$ для некоторого $\gamma \subset \mathcal{B}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} f^{-1}(V)$ и так как $f^{-1}(V)$ открыто для $V \in \mathcal{B}$, то U открыто в X.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Положим $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{B}}$ база X. Пусть $U \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда $U = \bigcap \mu$ для некоторого конечного $\mu \subset \mathcal{P}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcap_{V \in \mu} f^{-1}(V)$ открыто в X. Так как $f^{-1}(U)$ открыто в X для U из базы $\widetilde{\mathcal{B}}$, то из (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает (1).

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (4) это утверждение 3.9.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (5) вытекает из того, что $f^{-1}(F) = X \backslash f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(U) = X \backslash f^{-1}(F)$ для открытого $U \subset Y$ и замкнутого $F = Y \backslash U$.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (6) вытекает из (1) $\Leftrightarrow$ (4) и утверждения 3.13. □

3.1.4 Сходящиеся последовательности, I

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $x \in X$ и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ последовательность точек.

Последовательность $(x_n)_n$ *сходится к точке* x, если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.

Последовательность $(x_n)_n$ *касается точки* x, если для любой окрестности U точки x множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ бесконечно. Также говорят, что точка x является *предельной точкой* для последовательности $(x_n)_n$.

Очевидно, если последовательность сходится к точке x, то тогда она касается точки x.

Пусть $\mathcal{B}_x$ есть база в точке x и $\mathcal{P}$ есть предбаза пространства X.

Утверждение 3.13. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x.*

(2) *Для любого $U \in \mathcal{B}_x$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.*

(3) *Для любого $U \in \mathcal{P}$, такого что $x \in U$, существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть S есть окрестность толчки x. Так как $\mathcal{B}_x$ база в точке x, то $x \in U \subset S$ для некоторого $U \in \mathcal{B}_x$. Из (2) вытекает, что существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$. Тогда $x_n \in S$ для $n > N$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть S есть окрестность толчки x. Так как $\mathcal{P}$ предбаза X, то существуют $W_1, W_2, ..., W_m \in \mathcal{P}$, для которых $x \in \bigcap_{i=1}^m W_i \subset S$. Из (3) вытекает, что для $i = 1, 2, ..., m$ существует $N_i \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in W_i$ для $n > N_i$. Положим $N = \max N_1, N_2, ..., N_m$. Тогда $x_n \in S$ для $n > N$. □

Утверждение 3.14. *Если $M \subset X$, $(x_n)_n \subset M$ и $(x_n)_n$ сходится к точке x, то $x \in \overline{M}$.*

Доказательство. Пусть U окрестность точки x. Тогда $U \cap M \supset U \cap (x_n)_n \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \overline{M}$. □

Предложение 3.15. *Пусть X топологическое пространство $x \in X$ точка с первой аксиомой счетности. Тогда*

(FU_p) *для $M \subset X$, $x \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x.*

Доказательство. Импликация ($\Leftarrow$) вытекает из утверждения 3.14.

Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $(U_n)_n$ счетная база в x, для которой $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Так как $x \in \overline{M}$, то $U_n \cap M \neq \varnothing$. Возьмем $x_n \in U_n \cap M$. Тогда $(x_n)_n \subset M$. Покажем, что последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x. Пусть U окрестность точки x. Существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $U_N \subset U$. Тогда $x_n \in U$ для $n > N$. □

Из этого утверждения вытекает следующее предложение.

Предложение 3.16. *Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда*

(FU) *для любого $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x.*

Из этого утверждения и утверждения 3.14 вытекает следующее предложение.

Предложение 3.17. *Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда*

(SEQ) *множество $F \subset X$ замкнуто X если и только если предел любой сходящейся последовательности $(x_n)_n \subset F$ принадлежит F.*

Предложение 3.18. *Пусть X топологическое пространство, $x \in X$, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Если отображение f непрерывно в точке x и последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x, то образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.*

Доказательство. Пусть W окрестность точки $y = f(x)$. Так как отображение f непрерывно в точке x, то $f(U) \subset W$ для некоторой окрестности точки x. Так как $(x_n)_n$ сходится к точке x, то существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$. Тогда $f(x_n) \in f(U) \subset W$ для $n > N$. □

Теорема 3.19. *Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности в точке $x \in X$, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в точке x если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к точке x, образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.*

Доказательство. Импликация ($\Rightarrow$) вытекает из предложения 3.18.

Докажем ($\Leftarrow$). В силу предложения 3.13, для доказательства непрерывности отображения f в точке x достаточно проверить, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Из предложения 3.15 вытекает, что существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x. Тогда образ последовательности $(f(x_n))_n \subset f(M)$ сходится к точке $f(x)$. Из утверждения 3.14 вытекает, что $f(x) \in \overline{f(M)}$. □

Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.20. *Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к некоторой точке $x \in X$, образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.*

3.2 Дополнение

3.3 Задачи

3.3.1 Типы точек

Задача 3.1. Доказать:

(1) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$;

(2) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$;

(3) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$;

(4) $X \setminus \operatorname{Fr} A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

(5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A \subset A$;

(6) A открыто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A \cap A = \varnothing$;

(7) $A^d \setminus A = \operatorname{Fr} A \setminus A$, где A^d – предельные точки A;

(8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

Задача 3.2. Проверить справедливость следующих соотношений:

(1) если $A \subset B$, то $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ $(\overline{A} \subset \overline{B})$;

(2) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} A$, $(\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{A}$, $\operatorname{Fr}(A \cap B) = \operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B)$;

(3) $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} A$, $(\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{A}$, $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B)$;

(4) $\overline{A} = \overline{(\overline{A})}$, $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\operatorname{Int} A)$;

(5) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;

(6) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr} A$, $\operatorname{Fr}(\overline{A}) \subset \operatorname{Fr} A$, $\operatorname{Fr}(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Fr} A$;

(7) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3.3.2 Канонически открытые и канонически замкнутые множества

Множество $U \subset X$ называется *канонически открытым*, если $U = \operatorname{Int} F$ для некоторого замкнутого F. Множество $F \subset X$ называется *канонически замкнутым*, если $F = \overline{U}$ для некоторого открытого U.

Задача 3.3. Доказать, что множество U канонически открытое если и только если $U = \operatorname{Int} \overline{U}$. Доказать, что множество F канонически замкнутое если и только если $F = \overline{\operatorname{Int} F}$.

Задача 3.4. Доказать, что множество U канонически открытое если и только если множество $X \backslash U$ канонически замкнутое.

Задача 3.5. Доказать, что пересечение конечного числа канонически открытых множеств является канонически открытым множеством. Верно ли, что объединение конечного числа канонически открытых множеств является канонически открытым множеством?

Задача 3.6. Доказать, что объединение конечного числа канонически замкнутых множеств является канонически замкнутым множеством. Верно ли, что пересечение конечного числа канонически замкнутых множеств является канонически замкнутым множеством?

Задача 3.7. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции $\overline{\cdot}$ и Int.

Задача 3.8. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

3.3.3 (Всюду) плотное и нигде не плотное подмножество

Задача 3.9. Подмножество пространства l_2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \leqslant x_k \leqslant 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом*. Доказать, что гильбертов куб – замкнутое подмножество l_2; внутренность гильбертова куба в l_2 – пустое множество.

Расстояние в l_2 определяется формулой:

$$\rho((x_n)_n, (y_n)_n) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

$l_2 = \{(x_n)_n : \rho(\bar{0}, (x_n)_n) < \infty\}$, где $\bar{0}$ нулевая последовательность.

Задача 3.10. Доказать, что замкнутое всюду плотное подмножество пространства X совпадает с X.

Задача 3.11. Найдите (опишите все) топологии на множестве X, для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

Задача 3.12. Будет ли пересечение всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?

Задача 3.13. Докажите, что в любом всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

Задача 3.14. Является ли $\mathbb{Q}$ пересечением счетного числа открытых всюду плотных в $\mathbb{R}$ подмножеств?

Задача 3.15. Найти минимальную мощность всюду плотных подмножеств пространства l_2, прямой Зоргенфрея, пространства Бэра, "метризуемого ежа". Докажите, что любое бесконечное подмножество прямой в топологии Зарисского является всюду плотным.

Глава 4

Аксиомы отделимости

4.1 Аксиомы отделимости, хаусдорфовы, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства

4.1.1 Аксиомы отделимости

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство.
Определим для X аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4.

T_0: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $y \notin U$ или $x \notin V$.

T_1: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $y \notin U$ и $x \notin V$.

T_2: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $U \cap V = \varnothing$.

T_2-Пространства также называются *хаусдорфовыми* пространствами.

T_3: Пространство X является T_1-пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существуют открытые U и V, такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

T_3-Пространства также называются *регулярными* пространствами.

$T_{3\frac{1}{2}}$: Пространство X является T_1-пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$.

$T_{3\frac{1}{2}}$-Пространства также называются *вполне регулярными* или *тихоновскими* пространствами.

T_4: Пространство X является T_1-пространством, для замкнутых $P, F \subset X$, для которых $P \cap F = \varnothing$, существуют открытые U и V, такие что $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

T_4-Пространства также называются *нормальными* пространствами.

> В литературе, учебниках и статьях, также часто встречается вариант определений T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4, в которых не требуется выполнения аксиомы T_1. Так что при чтении литературы нужно быть внимательным.
>
> Практически всегда, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства определяются как здесь.

Естественно ожидать, что T_i влечет T_j для $i > j$, что мы и докажем с течением времени. Ясно, для $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, свойства T_i являются топологическими. $T_{3\frac{1}{2}}$ также является топологическим свойством, что мы покажем в разделе 4.1.6.

4.1.2 T_0, T_1 и T_2 пространства

Пусть X пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$, U окрестность x и V окрестность y. Рассмотрим условия на x, y, $U \ni x$, $V \ni y$:

(T_0) $y \notin U$ или $x \notin V$;

(T_1) $y \notin U$ и $x \notin V$;

(T_2) $U \cap V = \varnothing$.

Для $i \in \{0, 1, 2\}$, пространство X является T_i-пространством если и только если выполняется условие:

> для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых выполняется условие (T_i).

Так как (T_2) $\Rightarrow$ (T_1) $\Rightarrow$ (T_0), то верно следующее утверждение.

Предложение 4.1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Предложение 4.2. *Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X является T_i-пространством и $Y \subset X$. Тогда Y является T_i-пространством.*

Доказательство. Пусть $x, y \in Y$, $x \neq y$. Так как для X является T_i-пространством, то существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых выполняется условие (T_i). Положим $\widetilde{U} = U \cap Y$ и $\widetilde{V} = V \cap Y$. Тогда $\widetilde{U}$ является окрестностью x в Y, $\widetilde{V}$ является окрестностью y в Y и для x, y, $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ выполняется условие (T_i). Следовательно, Y является T_i-пространством. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X является T_i-пространством, пространство Y непрерывно и иньективно отображается в X. Тогда Y является T_i-пространством.*

Доказательство. Пусть $f : Y \to X$ есть непрерывное иньективное отображение. Пусть $x, y \in Y$, $x \neq y$. Так как для X является T_i-пространством, то существуют окрестность U точки $f(x)$ и окрестность V точки $f(y)$, для которых выполняется условие (T_i). Положим $\widetilde{U} = f^{-1}(U)$ и $\widetilde{V} = f^{-1}(V)$. Тогда $\widetilde{U}$ является окрестностью x в Y, $\widetilde{V}$ является окрестностью y в Y и для x, y, $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ выполняется условие (T_i). Следовательно, Y является T_i-пространством. $\square$

Предложение 4.4. *Антидискретное не одноточечное пространство не является T_0-пространством.*

Доказательство. Пусть X есть антидискретное пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$. Если U окрестность x и V окрестность y, то $U = V = X$ и условие (T_0) не выполняется. □

Пример 4.5 (существует не T_0 пространство)**.** Антидискретное двоеточие не является T_0-пространством.

Предложение 4.6. *Пространство X является T_0-пространством если и только если в X не вкладывается антидискретное двоеточие.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Предположим противное. Пусть $D \subset X$ есть антидискретное двоеточие. Из предложения 4.2 вытекает, что D T_0-пространство. Противоречие с предложением 4.4.

($\Leftarrow$). Предположим противное. Тогда X не T_0-пространство и существуют различные $x, y \in X$, так что $y \in U$ и $x \in V$ для любых окрестностей U и V точек x и y, соответственно. Тогда подпространство $D = \{x, y\}$ является антидискретным двоеточием. Противоречие. □

Предложение 4.7. *Пространство X является T_1-пространством если и только если в X любая точка замкнута, то есть $\{x\}$ замкнуто в X для любого $x \in X$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Пусть $y \in C = X \setminus \{x\}$. Из T_1 вытекает, что $x \notin V_y$ для некоторой окрестности V_y точки y. Тогда $y \in V_y \subset C$. Следовательно, y внутренняя точка C. Так как любая точка C является внутренней, то C открыто и, следовательно, $\{x\}$ замкнуто.

($\Leftarrow$). Пусть $x, y \in X$ различные точки. Положим $U = X \setminus \{y\}$ и $V = X \setminus \{x\}$. Тогда U и V окрестности x и y, соответветственно, и для x, y, U, V выполняется (T_1). □

Пример 4.8 ($T_0 \not\Rightarrow \mathrm{T}_1$). Связное двоеточие является T_0 не T_1 пространством.

Пример 4.9 ($T_1 \not\Rightarrow \mathrm{T}_2$). Пусть N есть натуральные числа с кофинитной топологией (пример 2.20). В N любая точка замкнута, поэтому N T_1-пространство. Так как в N любые два непустых открытых множества пересекаются, то N не T_2-пространство.

Теорема 4.10. *Пусть X хаусдорфово пространство, Y пространство, $f, g \colon Y \to X$ непрерывные отображения и*

$$E = \{y \in Y \;:\; f(y) = g(y)\}.$$

Тогда

(1) *E замкнуто в Y;*

(2) *если E всюду плотно в Y, то $f = g$.*

Доказательство. Докажем (1). Достаточно показать, что множество

$$W = Y \backslash E = \{y \in Y \ : \ f(y) \neq g(y)\}$$

открыто. Пусть $y \in W$. Тогда $f(y) \neq g(y)$. Так как X хаусдорфово пространство, то существуют открытые окрестности U и V точек $f(y)$ и $g(y)$, соответственно, для которых $UV = \varnothing$. Так как отображения f и g непрерывны, то множества $f^{-1}(U)$ и $g^{-1}(V)$ являются открытыми окрестностями точки y. Множество $W_y = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ является открытой окрестностью точки y. Тогда $f(W_y) \subset U$ и $g(W_y) \subset V$. Так как $U \cap V = \varnothing$, то $f(W_y) \cap g(W_y) = \varnothing$. Следовательно, $W_y \subset W$. Мы показали, что произвольная точка $y \in W$ является внутренней точкой множества W. Следовательно, W открыто.

Докажем (2). Множество E замкнуто и всюду плотно в Y. Следовательно, $E = Y$, что означает $f = g$. □

> Позднее мы покажем, что теорема 4.10 характеризует хаусдорфовы пространства. То есть если для пространства X выполняется теоремы 4.10 (достаточно пункта (2)), то X хаусдорфово пространство.

4.1.3 Сходящиеся последовательности, II

Предложение 4.11. *Пусть X хасдорфово пространство. Тогда у любой последовательности в X может быть не более одного предела.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к двум разным точкам x и y. Пусть U и V есть не пересекающиеся окрестности точек x и y, соответственно. Существует $N_x \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N_x$. Существует $N_y \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in V$ для $n > N_y$. Пусть $m > N_x$ и $m > N_y$. Тогда $x_m \in U \cap V$. Противоречие с $U \cap V = \varnothing$. □

Предложение 4.12. *Пусть X есть топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Пространство X хаусдорфово.*

(2) *У любой последовательности в X может быть не более одного предела.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 4.11. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное. Тогда существуют различные точки $x, y \in X$, такие что $U \cap V \neq \varnothing$ для любых окрестностей U и V точек x и y, соответственно. Пусть $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ есть базы окрестностей в точках x и y, такие что $U_{n+1} \subset U_n$ и $V_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x_n \in U_n \cap V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к двум различным точкам x и y. □

Предложение 4.13. *Пусть X есть топологическое пространство и у любой последовательности в X может быть не более одного предела. Тогда X является T_1-пространством.*

Доказательство. Предположим противное. В силу предложения 4.7, существует $x \in X$, для которого $\{x\}$ не замкнуто. Пусть $y \in \overline{\{x\}} \setminus \{x\}$. Положим $x_n = x$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x. Так как $x \in U$ для любой окрестности точки y, то последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке y. У последовательности $(x_n)_n$ два различных предела. Противоречие. □

Пусть M бесконечное множество и a_M некоторая точка, не принадлежащая M (например $\{M\}$). Положим $A(M) = M \cup \{a_M\}$. Определим топологию на $A(M)$. Положим

$$\mathcal{B}_M = \{\{x\} : x \in M\}, \qquad \mathcal{B}_a = \{\{a_M\} \cup (M \setminus L) : L \subset M, |L| < \omega\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_M \cup \mathcal{B}_a.$$

Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, определяемая базой $\mathcal{B}$. Далее $A(M)$ будем рассматривать с топологией $\mathcal{T}$. Точки из M являются изолированными точками пространства $A(M)$. Точка a_M является предельной точкой для множества M. Множество M всюду плотно в $A(M)$.

Последовательность $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $a_{\mathbb{N}}$ в пространстве $A(\mathbb{N})$. Пространство $A(\mathbb{N})$ гомеоморфно сходящейся последовательности с пределом $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Определим гомеоморфизм $f : A(\mathbb{N}) \to S$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Пространство $A(\mathbb{N})$ также будем называть сходящейся последовательностью.

Предложение 4.14. *Пусть X есть топологическое пространство. Последовательность*

$$f : \mathbb{N} \to X, \ n \mapsto x_n$$

сходится к точке $x \in X$, если и только если продолжение

$$\hat{f} : A(\mathbb{N}) \to X, \ a \mapsto \begin{cases} x_n, & \textit{если } a = n \in \mathbb{N}, \\ x, & \textit{если } a = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

отображения f является непрерывном отображением.

Доказательство. Докажем ($\Rightarrow$), то есть непрерывность $\hat{f}$. Пусть $U \subset X$ открытое множество. Если $x \in U$, то множество $L = A(\mathbb{N}) \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ является конечным подмножеством $\mathbb{N}$ и множество $f^{-1}(U) = A(\mathbb{N}) \setminus L$ является открытой окрестностью точки $a_{\mathbb{N}}$. Если $x \notin U$, то $\hat{f}^{-1}(U) \subset \mathbb{N}$ открыто в $A(\mathbb{N})$.

Докажем ($\Leftarrow$), то есть что последовательность $(x_n)_n$ сходится к x. Последовательность $(n)_n$ сходится к $a_{\mathbb{N}}$ в пространстве $A(\mathbb{N})$ и отображение $\hat{f}$ непрерывно. Из предложения 3.18 вытекает что образ последовательности $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $\hat{f}(a_{\mathbb{N}}) = x$. □

Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.15. *Пусть X есть топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Если $f, g : A(\mathbb{N}) \to X$ непрерывные отображения и $f|_{\mathbb{N}} = g|_{\mathbb{N}}$, то $f = g$.*

(2) *У любой последовательности в X может быть не более одного предела.*

Это предложение показывает, что предложение 4.11 является следствием теоремы 4.10.

4.1.4 T_3. Регулярные пространства

Предложение 4.16. *T_1-Пространство X является регулярным пространством если и только если выполняется условие:*

> *если $x \in X$ и W окрестность x, то $\overline{U} \subset W$ для некоторой окрестности U точки x.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Можно считать, что W открыто. Положим $F = X \backslash W$. Из условия T_3 вытекает, что существуют открытые U и V, такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Тогда $\overline{U} \subset W$.

($\Leftarrow$). Пусть $x \in X$ и замкнутое множество F не содержит x. Множество $W = X \backslash F$ является открытой окрестностью точки x. Тогда $\overline{U} \subset W$ для некоторой открытой окрестности U точки x. Множество $V = X \backslash \overline{U}$ открыто. Тогда $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. □

Предложение 4.17. $T_3 \Rightarrow T_2$.

Доказательство. Пусть X регулярное пространство, $x, y \in X$ различные точки. Так как X является T_1-пространством, то, в силу предложения 4.7, множество $F = \{y\}$ замкнуто в X. Из T_3 вытекает, что существуют открытые U и V, такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Осталось заметить, что условие $F \subset V$ эквивалентно $y \in V$. □

Предложение 4.18. *Если пространство X регулярно, то подпространство $Y \subset X$ регулярно.*

Доказательство. Так как X является T_1-пространством, то, в силу предложения 4.2, Y является T_1-пространством. Пусть $x \in Y$ и F есть замкнутое подмножество Y, не содержащие точку x. Тогда $F = \widetilde{F} \cap Y$ для некоторого замкнутого в X множества $\widetilde{F}$. Так как X регулярно, то существуют открытые $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$ в X, такие что $x \in \widetilde{U}$, $\widetilde{F} \subset \widetilde{V}$ и $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \varnothing$. Положим $U = Y \cap \widetilde{U}$ и $V = Y \cap \widetilde{V}$. Множества U и V открыты в Y, $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. □

Пример 4.19 ($T_2 \not\Rightarrow$T$_3$). Положим $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $W = \mathbb{R} \backslash F$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ — счетная база $\mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{U \cap W : U \in \mathcal{B}_R\}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, которая определяется этой базой. Пусть $X = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Пространство X хаусдорфово, со счетной базой, но не регулярно, так W является окрестностью 0, но $\overline{U} \not\subset W$ для любой окрестности U точки 0.

4.1.5 Непрерывные отображения, II

Предложение 4.20. *Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ непрерывные отображения топологических пространств, то композиция*

$$g \circ f\colon X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$$

отображений f и g непрерывна.

Доказательство. Пусть $U \subset Z$ открыто. Из непрерывности g вытекает, вытекает, что $g^{-1}(U) \subset Y$ открыто. Из непрерывности f вытекает, вытекает, что $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ открыто. Так как, $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$, то $(g \circ f)^{-1}(U)$ открыто. □

Предложение 4.21. *Если $f\colon X \to Y$ непрерывное отображение топологических пространств и $Z \subset X$, то ограничение*

$$f|_Z : Z \to Y,\ z \mapsto f(z)$$

отображения f на Z непрерывно.

Доказательство. Пусть $U \subset Y$ открыто. Из непрерывности f вытекает, вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в X. Тогда

$$\left(f|_Z\right)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Z$$

открыто в Z. □

4.1.6 $T_{3\frac{1}{2}}$. Вполне регулярные пространства

Предложение 4.22. $T_{3\frac{1}{2}}$ *является топологическим свойством.*

Доказательство. Надо доказать, что если X и Y гомеоморфные пространства и пространство X вполне регулярно, то Y вполне регулярно. Пусть $h\colon Y \to X$ гомеоморфизм, $y \in Y$, $P \subset Y$ замкнуто в Y и $y \notin P$. Докажем, что существует непрерывная функция $g\colon Y \to [0,1]$, такая что $g(y) = 0$ и $g(P) = \{1\}$.

Пусть $x = h(y)$ и $F = h(P)$. Так как h гомеоморфизм, то F замкнуто в X и $x \notin F$. Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Положим $g = f \circ h$. Как композиция непрерывных функций, функция g непрерывна. Кроме того, $g(y) = 0$ и $g(P) = \{1\}$. □

Предложение 4.23. $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

Доказательство. Пусть X есть вполне регулярное пространство. Тогда X T_1-пространство. Докажем, что X регулярное пространство. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X, не содержащие точку x. Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Множества $U = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{3}))$ и $V = f^{-1}((\frac{2}{3}, +\infty))$ открыты, $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. □

Предложение 4.24. *Подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть X есть вполне регулярное пространство и $Y \subset X$. Так как X T_1-пространство, то Y T_1-пространство. Пусть $x \in Y$, P замкнутое подмножество Y не содержащие точку x. Так как P замкнуто в Y, то существует замкнутое подмножество F пространства X, для которого $P = F \cap Y$. Тогда $x \notin F$. Так как X вполне регулярное пространство, то существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Положим $g = f|_Y$. Тогда функция g непрерывна, $g(x) = 0$ и $g(P) = \{1\}$. □

4.1.7 T_4. Нормальные пространства

Предложение 4.25. *T_1-Пространство X является нормальным пространством если и только если выполняется условие:*

> *если P замкнутое подмножество X $W \supset P$ открыто, то $\overline{U} \subset W$ для некоторого открытого $U \supset P$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Положим $F = X\backslash W$. Из условия T_4 вытекает, что существуют открытые U и V, такие что $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Тогда $\overline{U} \subset W$.

($\Leftarrow$). Пусть P и F замкнутые непересекающиеся множества в X. Множество $W = X\backslash F$ открыто и $P \subset W$. Тогда $\overline{U} \subset W$ для некоторой открытого U, содержащего P. Множество $V = X\backslash\overline{U}$ открыто. Тогда $p \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. □

Теорема 4.26 (Лемма Урысона)**.** *Пусть X нормальное пространство, множества $P, F \subset X$ замкнуты и не пересекаются. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, такая что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.*

Доказательство. Положим $D_0\{0,1\}$,

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 < k < 2^n,\ k \text{ нечетное целое число} \right\}$$

для $n > 0$, $D_n^* = \bigcup_{i=0}^n D_i$ для $n \in \omega$ и $D = \bigcup_{i=0}^\infty D_i$ — двоично рациональные числа на отрезке $[0,1]$. Ясно, $D_{n+1}^* = D_n^* \cup D_{n+1}$.

Индукцией по n, построим семейства $\{U_r : r \in D_n\}$ открытых множеств, такие что выполняются условия:

(I_0) $P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1 \subset X\backslash F$;

(I_n) если $p, q \in D_n^*$ и $p < q$, то $\overline{U_p} \subset U_q$.

База индукции. Положим $U_1 = X\backslash F$. Множество U_1 является открытой окрестностью множества P. В силу предложения 4.25, существует открытое U_0, такое что $P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Шаг индукции, $n > 0$. Для $r = \frac{s}{2^n} \in D_n$, где s нечетно и $0 < s < 2^n$, обозначим $r_- = \frac{s-1}{2^n}$ и $r_+ = \frac{s+1}{2^n}$. Тогда $r_-, r_+ \in D_{n-1}^*$ и $(r_-, r_+) \cap D_n^* = \{r\}$.

Пусть $r \in D_n$. По предположению индукции (I_{n-1}), $\overline{U_{r_-}} \subset U_{r_+}$. Из нормальности X вытекает, что существует открытое множество U_r, такое что

$$\overline{U_{r_-}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r_+}.$$

Проверим (I_n). Пусть $p, q \in D_n^*$ и $p < q$. Надо доказать, $\overline{U_p} \subset U_q$. Рассмотрим четыре случая.

(1) $p \notin D_n$, $q \notin D_n$. Тогда $\overline{U_p} \subset U_q$ вытекает из (I_{n-1}).

(2) $p \in D_n$, $q \notin D_n$. Тогда $p_+ \leqslant q$ и $\overline{U_p} \subset U_{p_+} \subset U_q$.

(3) $p \notin D_n$, $q \in D_n$. Тогда $p \leqslant q_-$ и $\overline{U_p} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q$.

(4) $p \in D_n$, $q \in D_n$. Тогда $p_+ \leqslant q_-$ и $\overline{U_p} \subset \overline{U_{p_+}} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q$.

Построение завершено. Выполняется условие

(I_∞) если $p, q \in D$ и $p < q$, то $\overline{U_p} \subset U_q$.

Определим функцию $f : X \to [0,1]$. Пусть $x \in X$. Положим $f(x) = 1$ если $x \notin U_1$. Положим

$$f(x) = \inf\{r \in D \,:\, x \in U_r\}$$

если $x \in U_1$. Из (I_0) вытекает, что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$. Для непрерывности f достаточно проверить, что прообразы элементов предбазы $[0,t)$ и $(t,1]$ открыты. Множество

$$f^{-1}([0,t)) = \bigcup\{U_r \,:\, r \in D, r < t\}$$

открыто. Проверим открытость множества $f^{-1}((t,1])$. Пусть $x \in f^{-1}((t,1])$. Тогда $f(x) > t$ и $x \notin U_q$ для некоторого $q \in D$, $q > t$. Пусть $p \in D \cap (x,q)$. Тогда $x \in W = X \backslash \overline{U_p}$. Для $y \in W$, $f(y) \geqslant p > t$. Следовательно, $x \in W \subset f^{-1}((t,1])$. □

Предложение 4.27. $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Пусть X есть нормальное пространство. Тогда X T_1-пространство. Докажем, что X вполне регулярное пространство. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X, не содержащие точку x. Положим $P = \{x\}$. Из леммы Урысона вытекает, что существует существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, такая что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$. Тогда $f(x) = 0$. □

Предложение 4.28. *Пусть X нормальное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Тогда Y нормальное пространство.*

Доказательство. Как подпространство T_1-пространства, пространство Y T_1-пространство. Пусть $P, F \subset Y$ замкнутые в Y непересекающиеся множества. Так как X нормальное пространства и P и F замкнуты в X, то у P и F есть открытые в X непересекающиеся окрестности U и V. Тогда $U \cap Y$ и $V \cap Y$ есть открытые в непересекающиеся окрестности множеств P и F. □

4.1.8 Метрические и метризуемые пространства, II

Пусть (X, ρ) метрическое пространство.
Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \,:\, x \in A, y \in B\}.$$

Положим $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$ для $x \in X$.

Утверждение 4.29. *Положим $f(x) = \rho(x, A)$. Тогда*

(1) $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y)$*;*

(2) *функция f непрерывна;*

(3) $\rho(x, A) = 0$ *если и только если* $x \in \overline{A}$*.*

Доказательство. Докажем (1). Достаточно доказать $f(x) - f(y) \leqslant \rho(x, y)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\rho(y*, y) \leqslant f(y) + \varepsilon$ для некоторого $y^* \in A$. Тогда

$$\rho(x, y) + f(y) + \varepsilon \geqslant \rho(x, y) + \rho(y*, y) \geqslant \rho(x, y^*) \geqslant f(x).$$

Тогда $f(x) \leqslant \rho(x, y) + f(y) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $f(x) \leqslant \rho(x, y) + f(y)$.

Докажем (2). Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Если $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, то $||f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Докажем (3). Если $\rho(x, A) = 0$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $x \in \overline{A}$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\rho(x, A) = 0$. □

Теорема 4.30. *Метризуемые пространства нормальны.*

Доказательство. Пусть X метризуемое пространство и ρ метрика, которая задает топологию пространства X.

Покажем, что X хаусдофово пространство. Пусть x и y различные точки X и $r = \rho(x, y)$. Тогда $B_\rho(x, \frac{r}{2})$ и $B_\rho(y, \frac{r}{2})$ есть непересекающиеся окрестности x и y.

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые в Y непересекающиеся множества. Положим

$$U = \bigcup \{B_\rho\left(x, \rho(x, F)/2\right) : x \in P\},$$
$$V = \bigcup \{B_\rho\left(y, \rho(y, P)/2\right) : y \in F\}.$$

Из утверждения 4.29 вытекает, что U и V являются открытыми окрестностями P и F. Покажем $U \cap V = \varnothing$. Предположим противное. Тогда

$$B_\rho\left(x, \rho(x, F)/2\right) \cap B_\rho\left(y, \rho(y, P)/2\right) \neq \varnothing$$

для некоторых $x \in P$ и $y \in F$. Следовательно,

$$\rho(x, y) < \rho(x, F)/2 + \rho(y, P)/2 \leqslant \rho(x, y)/2 + \rho(y, x)/2 = \rho(x, y).$$

Противоречие. □

Возможно простое доказательство леммы Урысона для метрических пространств: функция

$$f(x) = \frac{\rho(x, P)}{\rho(x, P) + \rho(x, F)}$$

непрерывна и разделяет замкнутые непересекающиеся множества P и F — $f(X) \subset [0, 1]$, $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

4.2 Дополнение

4.3 Задачи

4.3.1 Отображения

Задача 4.1. Пусть X хаусдорфово пространство и $f\colon X \to X$ непрерывное отображение. Доказать, что множество $\{x \in X : f(x) = x\}$ неподвижных точек в X замкнуто в X.

Задача 4.2. Пусть X регулярное пространство, Y пространство, D плотное подмножество Y и $f : Y \to X$ непрерывное отображение. Предположим, что отображение

$$f|_{D \cup \{y\}} : D \cup \{y\} \to X$$

непрерывно для каждого $y \in Y \backslash D$. Доказать, что отображение f непрерывно.

Подмножество F пространства X называется *нуль-множеством* или *функционально замкнутым*, если существует непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, такая что $F = f^{-1}(0)$. Дополнения до нуль-множеств называют *конуль-множествами* или *функционально открытыми* множествами.

Задача 4.3. Пусть P и F функционально замкнутые непересекающиеся множества пространства X. Доказать, что существует непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, такая что $P =$. Пусть X регулярное пространство, Y пространство, D плотное подмножество Y и $f : Y \to X$ непрерывное отображение. Предположим, что отолбражение

$$f|_{D \cup \{y\}} : D \cup \{y\} \to X$$

непрерывно для каждого $y \in Y \backslash D$. Доказать, что отображение f непрерывно.

Глава 5

Компактность

5.1 Топологические свойства типа компактности

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство подмножеств γ пространства X называется *открытым покрытием* пространства X, если γ состоит из открытых множеств (то есть $\gamma \subset \mathcal{T}$) и γ покрытие X (то есть $\bigcup \gamma = X$). Семейство μ подмножеств называется *подпокрытием* покрытия γ, если $\mu \subset \gamma$ и μ покрытие X ($\bigcup \mu = X$).

5.1.1 Компактные пространства

Пространство X называется *компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Другими словами, X компактное пространство, если для любого открытого покрытия γ ($\gamma \subset \mathcal{T}$ и $\bigcup \gamma = X$) пространства X существует конечное подпокрытие μ ($\mu \subset \gamma$, $|\mu| < \omega$ и $\bigcup \mu = X$).

Пространство X называется *локально компактным* пространством, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x, для которой замыкание $\overline{U}$ компактно.

Предложение 5.1. *Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть X компактное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y. Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X, для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \backslash Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием компактного пространства X. Так как X компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. □

Предложение 5.2. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть X компактное пространство, Y пространство и $f\colon X \to Y$ непрерывное сюрьективное отображение. Докажем, что Y компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y. Так как отображение f непрерывно и сюрьективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X. Так как X компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. □

Предложение 5.3. *Если пространство X является объединением конечного семейства компактных подпространств, то X компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{X_i : i = 1, 2, ..., n\}$ конечное покрытие X и X_i компактно для $i = 1, 2, ..., n$. Докажем, что X компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства X.

Пусть $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Семейство $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in A\}$ открытое покрытие компактного пространства X_i. Следовательно, существует конечное $B_i \subset A$, для которого $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in B_i\}$ покрытие X_i.

Положим $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Множество B конечно и семейство $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. □

Одноточечное пространство компактно, поэтому и предложения 5.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Конечное пространство компактно.*

Лемма 5.5. *Пусть X есть хаусдофовое пространство, $x \in X$, F компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.*

Доказательство. Для каждого $y \in F$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y. Так как $\{V_y \cap F : y \in F\}$ есть открытое покрытие F, то $F \subset \bigcup\{V_y : y \in M\}$ для некоторого конечного $M \subset F$. Положим $U = \bigcap\{U_y : y \in M\}$ и $V = \bigcup\{V_y : y \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности точки x и множества F. □

Предложение 5.6. *Компактное подмножество хаусдофового пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое пространство и F компактное подмножество X. Пусть $x \in X\backslash F$. Из леммы 5.5 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F. Тогда $V \subset X\backslash F$ есть открытая окрестность точки x. Получаем, $X\backslash F$ открыто и, следовательно, F замкнуто в X. □

Теорема 5.7. *Хаусдофовое компактное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое компактное пространство.

Докажем, что X регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Из предложения 5.1 вытекает, что F компактно. Из леммы 5.5 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.

Докажем, что X нормально. Пусть P и F есть замкнутое непересекающиеся подмножество. Для каждого $x \in P$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_x и V_x точки x и замкнутого множества F. Из предложения 5.1 вытекает, что P компактно. Так как $\{U_x \cap P : x \in P\}$ есть открытое покрытие P, то $P \subset \bigcup\{U_x : x \in P\}$ для некоторого конечного $M \subset P$. Положим $U = \bigcup\{U_x : x \in M\}$ и $V = \bigcap\{V_x : x \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности множеств P и F. □

Теорема 5.8. *Хаусдофовое локально компактное пространство вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое локально компактное пространство.

Докажем, что X вполне регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Так как X локально компактно, то существует окрестность W точки x, такая что $\overline{W}$ компактно. Пусть U есть такая открытая окрестность точки x, для которой $U \subset W \cap (X \backslash F)$. Так как $K = \overline{U}$ есть замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{W}$, то, в силу предложения 5.1, подпространство K компактно. Так как K компактное хаусдорфово пространство, то, в силу теоремы 5.8, пространство K нормально. Из предложения 4.27 вытекает, что X вполне регулярное пространство.

Определим непрерывное отображение $g\colon K \to [0,1]$. Если $S = K \backslash U = \varnothing$, то тогда пусть g есть тождественно нулевая функция на K. Если $S \neq \varnothing$, то, учитывая что X вполне регулярно, пусть g есть такая непрерывная функция в $[0,1]$, для которой $g(x) = 0$ и $g(S) = \{1\}$.

Продолжим функцию g до функции f на X. Положим

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in K \\ 1, & \text{если } x \in X \backslash K \end{cases}$$

для $x \in X$. Тогда $f(X) \subset [0,1]$, $f(x) = 0$ и $f(F) \subset f(X \backslash U) = \{1\}$. Нам осталось проверить непрерывность f. Достаточно проверить для элементов предбазы $[0,t)$, $(t,1]$, $t \in (0,1)$ отрезка $[0,1]$, что прообразы $f^{-1}([0,t))$ и $f^{-1}((t,1])$ открыты. Пусть $t \in (0,1)$.

Проверим открытость $V = f^{-1}([0,t))$. Так как $V = g^{-1}([0,t)) \subset U$, отображение g непрерывно, то V является открытым подмножеством U и, следовательно, открыто в X.

Проверим открытость $f^{-1}((t,1])$. Пусть $Q = f^{-1}([0,t])$. Так как $Q = g^{-1}([0,t]) \subset K$, отображение g непрерывно, то Q является замкнутым подмножеством K и, следовательно, замкнуто в X. Так как $f^{-1}((t,1]) = X \backslash Q$, то $f^{-1}((t,1])$ открыто в X. □

Пример 5.9. Связное двоеточие является T_0 не T_1 компактным пространством.

Пример 5.10. Пусть X есть натуральные числа $\mathbb{N}$ с кофинитной топологией (пример 2.20). Покажем, что X компактно. Пусть γ открытое покрытие X и $U \in \gamma$ не пусто. Тогда $X \backslash U$ конечно и $X \backslash U \subset \bigcup \mu'$ для некоторого конечного $\mu' \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{U\} \cup \mu'$ конечное подпокрытие γ.

Пространство X является компактным не T_2 T_1-пространством.

5.1.2 Счетно компактные и секвенциально компактные пространства

Пространство X называется *счетно компактным* пространством, если для любого не более чем счетного открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Другими словами, X счетно компактное пространство, если для любого не более чем счетного открытого покрытия γ ($\gamma \subset \mathcal{T}$, $|\gamma| \leqslant \omega$ и $\bigcup \gamma = X$) пространства X существует конечное подпокрытие μ ($\mu \subset \gamma$, $|\mu| < \omega$ и $\bigcup \mu = X$).

Пространство X называется *секвенциально компактным*, если для любой последовательности $(x_n)_n \subset X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к некоторой точке пространства X.

Из определений вытекает

Предложение 5.11. *Компактные пространства счетно компактны.*

Предложение 5.12. *Замкнутое подпространство счетно компактного пространства счетно компактно.*

Доказательство. Пусть X счетно компактное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y и $|A| \leqslant \omega$. Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X, для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \backslash Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым не более чем счетным покрытием счетно компактного пространства X. Так как X счетно компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. $\square$

Предложение 5.13. *Непрерывный образ счетно компактного пространства счетно компактен.*

Доказательство. Пусть X счетно компактное пространство, Y пространство и $f\colon X \to Y$ непрерывное сюрьективное отображение. Докажем, что Y счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y и $|A| \leqslant \omega$. Так как отображение f непрерывно и сюрьективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X. Так как X счетно компактно, то существует конечное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. $\square$

Предложение 5.14. *Если пространство X является объединением конечного семейства счетно компактных подпространств, то X счетно компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{X_i : i = 1, 2, ..., n\}$ конечное покрытие X и X_i счетно компактно для $i = 1, 2, ..., n$. Докажем, что X счетно компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства X и $|A| \leqslant \omega$.

Пусть $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Семейство $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in A\}$ открытое не более чем счетное покрытие счетно компактного пространства X_i. Следовательно, существует конечное $B_i \subset A$, для которого $\{U_\alpha \cap X_i : \alpha \in B_i\}$ покрытие X_i.

Положим $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Множество B конечно и семейство $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является конечным подпокрытием покрытия γ. □

Теорема 5.15. *Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X счетно компактное пространство;*

(2) *любая последовательность $(x_n)_n$ в X имеет предельную точку;*

(3) *если $F_1 \supset F_2 \supset ...$ убывающая последовательность непустых замкнутых множеств, то пересечение $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ непусто.*

Доказательство. Докажем (1) ⇒ (3). Предположим противное. Положим $U_n = X \backslash F_n$. Тогда $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ это счетное открытое покрытие, в котором нельзя выделить конечное подпокрытие. Противоречие.

Докажем (3) ⇒ (1). Пусть $\gamma = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ счетное открытое покрытие X. Положим $F_n = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $(F_n)_n$ убывающая последовательность замкнутых множеств и пересечение $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто. Следовательно, $F_n = \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{U_i : i = 1, 2, ..., n\}$ конечное подпокрытие γ.

Докажем (2) ⇒ (3). Возьмем $x_n \in F_n$. Пусть x предельная точка последовательности $(x_n)_n$. Тогда $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

Докажем (2) ⇒ (3). Положим $F_n = \overline{\{x_i : i > n\}}$. Тогда $(F_n)_n$ убывающая последовательность непустых замкнутых множеств. Любая точка из $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ является предельной для последовательности $(x_n)_n$. □

Предложение 5.16. *Если пространство секвенциально компактно, то оно счетно компактно.*

Доказательство. Пусть X счетно компактное пространство. Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X. В силу теоремы 5.15 достаточно показать, что у последовательности $(x_n)_n$ есть предельные точки. Так как X секвенциально компактно, то для последовательности $(x_n)_n \subset X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к некоторой точке x пространства X. Тогда x предельная точка для последовательности $(x_n)_n$. □

Лемма 5.17. *Пусть X пространство с первой аксиомой счетности, $(x_n)_n$ последовательность в X и x предельная точка последовательности $(x_n)_n$. Тогда существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к точке x.*

Доказательство. Пусть $(U_n)_n$ счетная убывающая база в точке x. Положим $N_k = \{n \in \mathbb{N} : {}_n \in U_k\}$. Так как x предельная точка для $(x_n)_n$, то множество N_k бесконечно. Возьмем строго возрастающую последовательность $(n_k)_k$ натуральных чисел, такую что $n_k \in N_k$. Тогда $x_{n_k} \in U_k$ и подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ сходится к точке x. $\square$

Теорема 5.18. *Пусть X пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X счетно компактное пространство;*

(2) *X секвенциально компактное пространство.*

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из предложения 5.16. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X. Из теоремы 5.15 вытекает, что последовательность $(x_n)_n$ касается некоторой точки $x \in X$. Из леммы 5.17 вытекает, что существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к точке x. $\square$

Предложение 5.19. *Пусть X счетно компактное пространство. Тогда*

(1) *любое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;*

(2) *любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть $M \subset X$ бесконечно. Пусть $(x_n)_n \subset M$ и $x_i \neq x_j$ для различных $i, j \in \mathbb{N}$. Из теоремы 5.15(2) вытекает, что последовательность $(x_n)_n$ касается некоторой точки x. Тогда x предельная точка для M.

Докажем (2). Дискретные и замкнутые множества не имеют предельных точек, поэтому из (1) вытекает (2). $\square$

Лемма 5.20. *Пусть X T_1-пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *x предельная точка множества M;*

(2) *множество $M \cap U$ бесконечно для любой окрестности точки x.*

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим противное. Тогда множество $K = M \cap U$ конечно для некоторой окрестности U точки x. Положим $F = K \backslash \{x\}$ и $V = U \backslash F$. Так как X T_1-пространство, то F замкнуто в X и V является окрестностью точки x. Так как $M \cap (V \backslash \{x\}) = \varnothing$, то противоречие с (1).

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1).[1] Пусть U окрестность точки x. Так как $M \cap U$ бесконечно, то $M \cap (U \backslash \{x\})$ бесконечно и, следовательно, не пусто. $\square$

Теорема 5.21. *Пусть X T_1-пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X счетно компактное пространство;*

(2) *любое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;*

[1] Отметим, что эта импликация верна для всех пространств, не только T_1.

(3) *любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно.*

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) и (1) ⇒ (3) вытекают из предложения 5.19.

Докажем (2) ⇒ (3). Дискретные и замкнутые множества не имеют предельных точек, поэтому из (2) вытекает (3).

Докажем (3) ⇒ (1). Пусть $(x_n)_n$ последовательность в X. В силу теоремы 5.15 достаточно показать, что у последовательности $(x_n)_n$ есть предельные точки. Если множество $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ конечно, то $|n \in \mathbb{N} : x = x_n| = \omega$ для некоторой точки x из M и x является предельной точкой для последовательности $(x_n)_n$. Если M бесконечно, то M не является дискретным и замкнутым множеством в X. Следовательно, некоторая точка $x \in X$ является предельной точкой для M. Из леммы 5.20 вытекает, что множество $M \cap U$ бесконечно для любой окрестности точки x. Тогда x является предельной точкой для последовательности $(x_n)_n$. □

Лемма 5.22. *Пусть X есть хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности, $x \in X$, F счетно компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.*

Доказательство. Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ счетная открытая база в x, $U_{n+1} \subset U_n$. Положим $F_n = \overline{U_n} \cap F$ для $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Предположим противное. Пусть $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Так как X хаусдорфово, то существуют непересекающиеся открытые окрестности O_x и O_y точек x и y. Так как (U_n) база в x, то $U_n \subset O_x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y \notin \overline{U_n}$ и $y \notin F_n$. Противоречие.

Положим $V_n = F \backslash F_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ является открытым счетным покрытием счетно компактного пространства F. Тогда $\{V_n : n \in N\}$ является покрытием X для некоторого конечного $N \subset \mathbb{N}$. Положим $n = \max N$. Тогда $V_n = F$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$. Положим $U = U_n$ и $V = X \backslash \overline{U_n}$. □

Предложение 5.23. *Счетно компактное подмножество хаусдофового пространства с первой аксиомой счетности замкнуто.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое пространство и F счетно компактное подмножество X. Пусть $x \in X \backslash F$. Из леммы 5.22 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F. Тогда $V \subset X \backslash F$ есть открытая окрестность точки x. Получаем, $X \backslash F$ открыто и, следовательно, F замкнуто в X. □

Теорема 5.24. *Хаусдофовое счетно компактное пространство с первой акиомой счетности регулярно.*

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое счетно компактное пространство. Докажем, что X регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Из предложения 5.12 вытекает, что F счетно компактно. Из леммы 5.22 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F. □

5.1.3 Финально компактные пространства

Пространство X называется *финально компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует не не более чем счетное подпокрытие.

Из определений вытекает

Предложение 5.25. *Компактные пространства финально компактны.*

Предложение 5.26. *Пространство компактно если и только если оно счетно компактно и финально компактно.*

Предложение 5.27. *Замкнутое подпространство финально компактного пространства финально компактно.*

Доказательство. Пусть X финально компактное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Докажем, что Y финально компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y. Для каждого $\alpha \in A$, существует открытое подмножество V_α пространства X, для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Положим $V = X \setminus Y$. Семейство $\gamma' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием финально компактного пространства X. Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{V\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ. □

Предложение 5.28. *Непрерывный образ финально компактного пространства финально компактен.*

Доказательство. Пусть X финально компактное пространство, Y пространство и $f : X \to Y$ непрерывное сюрьективное отображение. Докажем, что Y финально компактно.

Пусть $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ открытое покрытие пространства Y. Так как отображение f непрерывно и сюрьективно, то семейство $\gamma' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X. Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $B \subset A$, для которого $\mu' = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ'. Тогда $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in B\}$ является не более чем счетным подпокрытием покрытия γ. □

Предложение 5.29. *Если пространство X является объединением не более чем счетным семейства финально компактных подпространств, то X финально компактное пространство.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где X_n финально компактно. Пусть γ открытое покрытие X. Для $n \in \mathbb{N}$ возьмем не более чем счетное $\mu_n \subset \gamma$, для которого $X_n \subset \bigcup \mu_n$. Тогда $\mu = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n$ не более чем счетное покрытие X. □

Лемма 5.30. *Пусть X регулярное пространство, P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X, пространство P финально компактно. Тогда существует последовательность открытых множеств $(U_n)_n$, для которой $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ топология X. Положим $\gamma = \{U \in \mathcal{T} : \overline{U} \cap F = \varnothing\}$. Так как X регулярно, то $\bigcup \gamma = X \backslash F$. Так как P линделефово, то $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ для некоторого $(U_n)_n \subset \gamma$. □

Регулярное финально компактное пространство называется *линделефовым* пространство.

Теорема 5.31. *Линделефово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X регулярное финально компактное пространство. Пусть P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X. Тогда, в силу предложения 5.27, пространства P и F финально компактны. Из леммы 5.30 вытекает, что существуют последовательности $(U_n)_n$ и $(V_n)_n$ открытых множеств, для которых $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$, $\overline{V_n} \cap P = \varnothing$ для $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\widetilde{U}_n = U_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}, \qquad \widetilde{V}_n = V_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i},$$

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U}_n, \qquad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n.$$

Тогда $P \subset U$ и $F \subset V$. Так как $U_n \cap V_m = \varnothing$ для $n.m \in \mathbb{N}$, то $\cap V = \varnothing$. □

Предложение 5.32. *В финально компактном пространстве любое дискретное и замкнутое подмножество не более чем счетно.*

Доказательство. ... □

Предложение 5.33. *Если X пространство со второй аксиомой счетности, то X линделефово.*

Доказательство. ... □

Теорема 5.34. *Регулярное со второй аксиомой счетности пространство нормально.*

Доказательство. ... □

5.1.4 Метрические и метризуемые пространства, III

Теорема 5.35. *Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X удовлетворяет второй аксиоме счетности;*

(2) *X финально компактно.*

Доказательство. ... □

Теорема 5.36. *Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X компактно;*

(2) *X счетно компактно;*

(3) *X секвенциально компактно.*

Доказательство. ... □

Теорема 5.37. *Пусть X компактное метризуемое пространство. Тогда X удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. ... □

Теорема 5.38. *Пусть X счетно компактное пространство и f непрерывная функция на X. Тогда f достигает на X минимум и максимум.*

Доказательство. ... □

5.2 Дополнение

5.3 Задачи

5.3.1 Компактность и отделимость

Задача 5.1. Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если оно замкнуто в любом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.

Задача 5.2. Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если любое взаимно однозначное непрерывное отображение этого пространства на произвольное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

5.3.2 Точки полного накопления

Точка x топологического пространства X называется *точкой полного накопления* множества $Y \subset X$, если для любой её окрестности U имеет место равенство $|Y \cap U| = |Y|$.

Задача 5.3. Докажите, что топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество в X имеет точку полного накопления.

Задача 5.4. Докажите, что топологическое пространство X счетно компактно тогда и только тогда, когда каждое счетное множество в X имеет точку полного накопления.

5.3.3 Разреженные пространства и пространства без изолированных точек

Задача 5.5. Докажите, что счетнокомпактное регулярное пространство без изолированных точек имеет мощность не меньше 2^ω.

Пространство называется *разреженным*, если в любом непустом подпространстве есть изолированая точка.

Задача 5.6. Пусть X пространство и $U = \{x \in X :$ некоторая окрестность x разреженна $\}$. Тогда U разреженное пространство. Если $F = X \setminus U$ не пусто, то в F нет изолированных точек.

Задача 5.7. Докажите, что каждое разреженное сепарабельное метризуемое пространство не более чем счетно.

Задача 5.8. Докажите, что каждое несчетное сепарабельное метризуемое пространство содержит подпространство без изолированных точек.

Задача 5.9. Докажите, что каждое несчетное компактное метризуемое пространство имеет мощность не меньше 2^ω.

Задача 5.10. Докажите, что каждое несчетное замкнутое подмножество прямой имеет мощность 2^ω.

Задача 5.11. Пусть X разреженное компактное хаусдорфово пространство, Y хаусдорфово пространство и $f : X \to Y$ непрерывное отображение. Показать, что $f(X)$ разреженное компактное хаусдорфово пространство.

Задача 5.12. Докажите, что метризуемое компактное хаусдорфово пространство разреженно тогда и только тогда, когда его мощность не более чем счетная.

Задача 5.13. Докажите, что каждое разреженное компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности не более чем счетно.

Задача 5.14. Докажите, что каждое несчетное компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности имеет мощность не менее 2^ω.

Задача 5.15. Докажите, что каждое компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности имеет мощность не более 2^ω.

Задача 5.16. Докажите, что каждый последовательный ординал является разреженным компактом.

Задача 5.17. Докажите, что ω_1 счетнокомпактное не компактное нормальное пространство с первой аксиомой счетности.

5.3.4 Разное

Задача 5.18. Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

Задача 5.19. Докажите, что любое подмножество прямой Зоргенфрея финально компактно.

Задача 5.20. Докажите, что пространство "Две стрелки Александрова"компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Задача 5.21. Докажите, что любое подмножество пространства "Две стрелки Александрова"финально компактно.

Задача 5.22. Докажите, что любое подмножество сепарабельного линейно упорядоченного пространства финально компактно и сепарабельно.

Задача 5.23. Докажите, что если любая непрерывная функция на метризуемом пространстве ограничена, то пространство компактно

Задача 5.24. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве ограничена, то пространство компактно.

Глава 6

Фильтры и направленности

6.1 Фильтры и направленности

6.1.1 Фильтры и ультрафильтры

Определение фильтров и баз фильтров

Пусть X множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества X называют *фильтром* на множестве X, если выполняются условия:

(Filtr_1) $\varnothing \notin \mathcal{F} \neq \varnothing$;

(Filtr_2) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(Filtr_3) если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ и для каждого $A \in \mathcal{F}$ найдется $B \in \mathcal{B}$, для которого $B \subset A$. Для базы $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}$ выполняются условия:

(FB_1) $\varnothing \notin \mathcal{B} \neq \varnothing$;

(FB_2) если $A, B \in \mathcal{B}$, то $C \subset A \cap B$ для некоторого $C \in \mathcal{B}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* на множестве X, если для $\mathcal{B}$ выполняются условия (FB_1) и (FB_1).

> Тут схожие, но различные понятия: (1) база (некоторого конкретного) фильтра $\mathcal{F}$ и (2) база фильтра (без привязки к конкретному фильтру).
>
> Тут аналогия с понятием база топологии.

Фильтры можно охарактеризовать, как базы фильтров, для которых выполняется условие (Filtr_3).

Обозначим

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X = \{M \subset X \,:\, A \subset M \text{ для некоторого } A \in \mathcal{B}\}.$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Семейство $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ является фильтром и $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ единственный фильтр на X, для которого $\mathcal{B}$ является базой фильтра.*

Фильтр $\mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$ называется *фильтром, порожденный базой фильтра* $\mathcal{B}$.

Пусть $Y \subset X$ и $\mathcal{Q}$ фильтр на Y. Тогда $\mathcal{Q}$ является базой фильтра на множестве X. Фильтр $\mathcal{F}^X_{\mathcal{Q}}$ также называется *фильтром, продолжающий фильтр* $\mathcal{Q}$ *на* X.

Если $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $Y \in \mathcal{F}$, то семейство

$$\mathcal{F}|_Y = \{M \cap Y \,:\, M \in \mathcal{F}\}$$

совпадает с $\{M \subset Y \,:\, M \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$ и является фильтром на Y. Фильтр $\mathcal{F}|_Y$ называется *ограничением фильтра* $\mathcal{F}$ *на* Y. Отметим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^X_{\mathcal{F}|_Y}.$$

Зачастую, фильтры $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{F}^X_{\mathcal{Q}}$ отождествляются, то есть считается, что фильтр $\mathcal{Q}$ на $Y \subset X$ также является фильтром (как фильтр $\mathcal{F}^X_{\mathcal{Q}}$) на X.

Определение ультрафильтров, основные свойства

Все фильтры на множестве X частично упорядоченны порядком включения как семейства множеств на X. Минимальный фильтр на X, это семейство $\{X\}$. Максимальные элементы в ч.у.м всех фильтров на множестве X называются *ультрафильтрами* на множестве X. Другими словами, фильтр $\mathfrak{U}$ являются ультрафильтром, если из того, что $\mathcal{F}$ фильтр и $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$ вытекает $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$.

Теорема 6.2. *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ есть множество всех фильтров на множестве X. В силу следствия 1.13 леммы Цорна, для доказательства теоремы достаточно доказать, что если $\mathfrak{C}$ цепь в $\mathfrak{F}$, то $\mathcal{F} = \bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$.

Проверим (Filtr_1). Очевидно, $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Так как $\varnothing \notin \mathcal{P}$ для $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$, то $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr_2). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathcal{F}_A$ и $B \in \mathcal{F}_B$ для некоторых $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{C}$ цепь, то $\mathcal{P} = \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ совпадает либо с $\mathcal{F}_A$, либо с $\mathcal{F}_B$. Тогда $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$ и $A, B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $A \cap B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr_3). Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$. Тогда $A \in \mathcal{P}$ для некоторого $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Предложение 6.3. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *фильтр на множестве* X. *Следующие условия эквивалентны:*

(A) $\mathfrak{U}$ *является ультрафильтром;*

(B) *если* $A \subset X$, *то либо* $A \in \mathfrak{U}$, *либо* $X \backslash A \in \mathfrak{U}$.

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (B)$. Положим $\mathcal{B} = \{A \cap M \,:\, M \in \mathfrak{U}\}$.

Если $\varnothing \in \mathcal{B}$, то $A \cap M = \varnothing$ для некоторого $M \in \mathfrak{U}$. Тогда $M \subset X \backslash A$ и, следовательно, $X \backslash A \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим случай $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$ есть есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Так как $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{U}$ является ультрафильтром, то $\mathcal{U} = \mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. Так как $A = X \cap A \in \mathcal{B}$, то $A \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(B) \Rightarrow (A)$. Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Нужно доказать, что $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Так как в фильтре любые два элемента имеют непустое пересечение, то $X \backslash A \notin \mathcal{F}$ и, следовательно, $X \backslash A \notin \mathfrak{U}$. Из (B) вытекает $A \in \mathfrak{U}$. □

Предложение 6.4. *Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X. Следующие условия эквивалентны:*

(A) *$\mathfrak{U}$ является ультрафильтром;*

(U_1) *если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} = X$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$;*

(U_2) *если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (U_2)$. Предположим противное. Тогда существует конечное семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X, такое что $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$ и $M \notin \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Из предложения 6.3 вытекает, что $X \backslash M \in \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Положим $\mathcal{L} = \{X \backslash M : M \in \mathcal{M}\}$. Тогда $\mathcal{L} \subset \mathfrak{U}$. Так как $\mathcal{L}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{L} \in \mathfrak{U}$. Следовательно, $\bigcup \mathcal{M} = X \backslash \bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$. Противоречие.

Импликация $(U_2) \Rightarrow (U_1)$ вытекает из того, что $X \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(U_1) \Rightarrow (A)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. Положим $\mathcal{M} = \{A, X \backslash A\}$. Так как $X = \bigcup \mathcal{M}$, то из (U_1) вытекает, что либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. □

Предложение 6.5. *Пусть $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на множестве X. Если $\mathcal{L}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$, то $L \notin \mathfrak{U}$ для некоторого $L \in \mathcal{L}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{M} = \{X \backslash L : L \in \mathcal{L}\}$. Тогда $\bigcup \mathcal{M} = X \backslash \bigcap \mathcal{L}$. Так как $\bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$, то из предложения 6.3 вытекает $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$. Из предложения 6.4 вытекает, что $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$. Тогда $L = X \backslash M \notin \mathfrak{U}$ и $L \in \mathcal{L}$. □

Предложение 6.6. *Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X и $Y \in \mathfrak{U}$. Следующие условия эквивалентны:*

(A) *$\mathfrak{U}$ является ультрафильтром на X;*

(Y) *$\mathfrak{U}|_Y$ является ультрафильтром на Y.*

Доказательство. Докажем $(A) \Rightarrow (Y)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset Y$, то либо $A \in \mathfrak{U}|_Y$, либо $Y \backslash A \in \mathfrak{U}|_Y$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрафильтр, то из предложения 6.3 вытекает, что либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. Если $A \in \mathfrak{U}$, то, учитывая $A \subset Y$, получаем $A \in \mathfrak{U}|_Y$. Рассмотрим случай $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. Так как $Y \in \mathfrak{U}$, то $Y \backslash A = Y \cap (X \backslash A) \in \mathfrak{U}$ и, следовательно, $Y \backslash A \in \mathfrak{U}|_Y$.

Докажем $(Y) \Rightarrow (A)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. Положим $\widetilde{A} = A \cap Y$. Если $\widetilde{A} \in \mathfrak{U}|_Y$, то $A \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим случай $\widetilde{A} \notin \mathfrak{U}|_Y$. Так как $\mathfrak{U}|_Y$ ультрафильтр, то, в силу предложения 6.3, $Y \backslash \widetilde{A} \in \mathfrak{U}|_Y$ и, следовательно, $Y \backslash \widetilde{A} \in \mathfrak{U}$. Так как $Y \backslash \widetilde{A} \subset X \backslash A$, то $X \backslash A \in \mathfrak{U}$. □

Свободные и главные фильтры

Пусть X множество. Фильтр $\mathcal{F}$ на X называется *главным*, если $\mathcal{F} = \{M \subset X \;:\; x \in M\}$ для некоторого $x \in X$. Очевидно, главный фильтр является ультрафильтром. Главный фильтр F будем называть *главный ультрафильтр, порожденный точкой* x. Фильтр $\mathcal{F}$ на X называется *свободным*, если $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$.

Предложение 6.7. *Не главный ультрафильтр является свободным.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ не главный ультрафильтр на X. Предположим, что $\mathcal{F}$ не свободный ультрафильтр. Пусть $x \in \bigcap \mathcal{F}$ и $\mathfrak{U} = \{M \subset X \;:\; x \in M\}$ есть главный ультрафильтр, порожденный точкой x. Тогда $\mathcal{F} \subset \mathfrak{U}$. Так как $\mathcal{F}$ ультрафильтр, то $\mathcal{F} = \mathfrak{U}$ и $\mathcal{F}$ главный ультрафильтр. Противоречие. □

Отображение фильтров и баз фильтров

Пусть $f : X \to Y$ есть отображения множеств, $\mathcal{F}$ фильтр на X и $\mathcal{B}$ база фильтра на X. Обозначим

$$f(\mathcal{B}) = \{f(M) \;:\; M \in \mathcal{B}\}.$$

Утверждение 6.8. *$f(\mathcal{B})$ является базой фильтра на Y.*

Доказательство. Условие (FB_1) для $f(\mathcal{B})$ очевидно. Проверим (FB_2). Пусть $A, B \in f(\mathcal{B})$. Тогда $A = f(\widetilde{A})$ и $B = f(\widetilde{B})$ для некоторых $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathcal{B}$. Так как $\mathcal{B}$ база фильтра и для $\mathcal{B}$ выполняется (FB_2), то существует $\widetilde{C} \in \mathcal{B}$, такое что $\widetilde{C} \subset \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$. Положим $C = f(\widetilde{C})$. Тогда $C \in f(\mathcal{B})$ и $C \subset A \cap B$. □

Утверждение 6.9. *$f(\mathcal{F})$ является фильтром на $f(X)$.*

Доказательство. Из утверждения 6.8 вытекает, что $f(\mathcal{F})$ является базой фильтра. Проверим (Filtr_3). Пусть если $A \in f(\mathcal{F})$ и $A \subset B \subset f(X)$. Тогда $A = f(\widetilde{A})$ для некоторого $\widetilde{A} \in \mathcal{B}$. Положим $\widetilde{B} = f^{-1}(B)$. Тогда $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$. Так как $\mathcal{F}$ фильтр, то $\widetilde{B} \in \mathcal{F}$. Следовательно $B = f(\widetilde{B}) \in f(\mathcal{F})$. □

Фильтр $\mathcal{F}^{Y}_{f(\mathcal{F})}$, продолжающий фильтр $f(\mathcal{F})$ на Y, будем называть *образом фильтра $\mathcal{F}$ при отображении f* и будем обозначать как $f(\mathcal{F})$.

Утверждение 6.10. *Пусть $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр на X. Образ $f(\mathfrak{U})$ ультрафильтра $\mathfrak{U}$ при отображении f является ультрофильтром.*

Доказательство. В силу предложения 6.6, предложение достаточно доказать для случая $Y = f(X)$. В силу предложения 6.3, достаточно показать, что если если $A \subset Y$, то либо $A \in f(\mathfrak{U})$, либо $Y \backslash A \in f(\mathfrak{U})$. Положим $\widetilde{A} = f^{-1}(A)$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрофильтр, то, в силу предложения 6.3, либо $\widetilde{A} \in \mathfrak{U}$, либо $X \backslash \widetilde{A} \in \mathfrak{U}$. Так как $A = f(\widetilde{A})$ и $Y \backslash A = f(X \backslash \widetilde{A})$, то либо либо $A \in f(\mathfrak{U})$, либо $Y \backslash A \in f(\mathfrak{U})$. □

6.1.2 Фильтры и ультрафильтры в топологических пространствах

Пределы и предельные точки фильтров и баз фильтров

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $\mathcal{F}$ фильтр на X, $\mathcal{B}$ база фильтра и $x \in X$.

Точка x называется *пределом фильтра* $\mathcal{F}$, если каждая ее окрестность есть элемент $\mathcal{F}$. В этом случае говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ *сходится к точке* x, и пишут $x \in \lim \mathcal{F}$.

Точка x называется *пределом базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является пределом фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. В этом случае говорят, что база фильтра $\mathcal{B}$ сходится к x, и пишут $x \in \lim \mathcal{B}$. Очевидно, что $x \in \lim \mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая окрестность точки x содержит элемент $\mathcal{B}$.

Точка x называется *предельной точкой фильтра* $\mathcal{F}$, если она принадлежит замыканию каждого элемента из $\mathcal{F}$. Очевидно, что x — предельная точка фильтра $\mathcal{F}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{F}$.

Точка x называется *предельной точкой базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является предельной точкой фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. Очевидно, что x — предельная точка база фильтра $\mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{B}$.

Отметим, что

$$\bigcap_{M \in \mathcal{F}} \overline{M} \text{ — предельные точки для фильтра } \mathcal{F},$$
$$\bigcap_{M \in \mathcal{B}} \overline{M} \text{ — предельные точки для базы фильтра } \mathcal{B}.$$

Предложение 6.11. *Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на пространстве X, $x \in X$ и $\mathcal{P}$ предбаза X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *x предел фильтра $\mathcal{F}$;*

(2) *если $x \in W \in \mathcal{P}$, то $W \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Импликация (1) $\to$ (2) очевидна. Докажем (2) $\to$ (1). Пусть U окрестность x. Так как $\mathcal{P}$ предбаза, то существует конечное $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$, для которого $\bigcap \mathcal{W} \subset U$. Из (2) вытекает $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}$. Из ($\mathsf{Filtr}_2$) вытекает, что $\bigcap \mathcal{W} \in \mathcal{F}$. Из ($\mathsf{Filtr}_3$) вытекает, что $U \in \mathcal{F}$. □

Предложение 6.12. *Пусть $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр на пространстве X. Любая предельная точка $\mathfrak{U}$ является пределом для $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Пусть x есть предельная точка для $\mathfrak{U}$ и U есть окрестность x. Положим $\mathcal{B} = \{U \cap M \,:\, M \in \mathfrak{U}\}$. Так как x предельная точка для $\mathfrak{U}$, то $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Тогда $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрафильтр, то $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$. Так как $U = U \cap X \in \mathcal{B}$, то $U \in \mathfrak{U}$. □

Предложение 6.13. *Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $x \in \overline{M}$;

(2) *x является предельной точкой для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X, для которого $M \in \mathcal{F}$;*

(3) *x является пределом для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X, для которого $M \in \mathcal{F}$;*

(4) *x является пределом для некоторого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на X, для которого $M \in \mathfrak{U}$.*

Доказательство. Импликации (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Так как $M \in \mathcal{F}$ и x предельная точка для $\mathcal{F}$, то $x \in \overline{M}$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Положим $\mathcal{B} = \{U \cap M \;:\; U$ окрестность точки $x\}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра и сходится к x. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Тогда $M \in \mathcal{F}$ и фильтр $\mathcal{F}$ сходится к x.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, который содержит $\mathcal{F}$. Тогда $M \in \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ сходится к x. □

Аксиомы отделимости

Теорема 6.14. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

(1) *X хаусдорфово пространство;*

(2) *у любого фильтра на X не более одного предела;*

(3) *у любого ультрафильтра на X не более одного предела.*

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, то есть что X не хаусдорфово. Пусть $x, y \in X$ различные точки, у которых любые окрестности пересекаются. Положим

$$\mathcal{B} = \{U \cap V : U \text{ и } V \text{ окрестности точек } x \text{ и } y, \text{ соответственно}\}.$$

Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра, которая сходится к x и y. Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, который содержит $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^X \supset \mathcal{B}$. Тогда ультрафильтр $\mathfrak{U}$ сходится к различным точкам x и y. Противоречие.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть фильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке x. Пусть $y \in X \setminus \{x\}$. Так как X хаусдорфово, то существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y. Так как $\mathcal{F}$ сходится к x, то $U \in \mathcal{F}$. Тогда $V \subset X \setminus U \notin \mathcal{F}$. Следовательно, $V \notin \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ не сходится к y. □

В силу доказанной теоремы, множество пределов $\lim \mathcal{F}$ фильтра $\mathcal{F}$ на хаусдорфовом пространстве X состоит не более чем из одной точки. В этом случае часто пишут $x = \lim \mathcal{F}$ вместо $x \in \lim \mathcal{F}$.

Непрерывные отображения

Пусть X множество, $\mathcal{F}$ фильтр на X, Y топологическое пространство и $f\colon X \to Y$ отображение. Множество $\lim f(\mathcal{F})$ состоит из предельных точек фильтра $f(\mathcal{F})$, это множество также обозначается как $\lim\limits_{x\to\mathcal{F}} f(x)$. Если пространство Y хаусдорфово, то, в силу теоремы 6.14, в множестве $\lim f(\mathcal{F})$ не более одного элемента. В этом случае выражение $y = \lim\limits_{x\to\mathcal{F}} f(x)$ означает, что y есть единственный предел фильтра $f(\mathcal{F})$.

Теорема 6.15. *Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение f непрерывно в x;*

(2) *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;*

(3) *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;*

(4) *если $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на X и x является пределом для ультрафильтра $\mathfrak{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathfrak{U})$.*

Доказательство. Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $M \in \mathcal{F}$. Так как x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $x \in \overline{M}$. Из утверждения 3.13 вытекает, что $f(x) \in \overline{f(M)}$. Следовательно, $f(x)$ предельная точка для $f(\mathcal{F})$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). В силу предложения 3.13, достаточно показать, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Положим $\mathcal{F} = \{L \subset X : M \subset L\}$. Точка x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{M}$. Тогда $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$. Следовательно, $f(x) \in \overline{f(M)}$.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть U окрестность $f(x)$. Тогда $f(V) \subset U$ для некоторой окрестности V точки x. Так как $\mathcal{F}$ сходится к x, то $M \subset V$ для некоторого $V \in \mathcal{F}$. Тогда $f(M) \in f(\mathcal{F})$ и $f(M) \subset U$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть U окрестность $f(x)$. Пусть $\mathcal{F} = \{V \subset X : V$ окрестность точки $\}$. Фильтр окрестностей $\mathcal{F}$ сходится к x. Тогда $f(\mathcal{F})$ сходится к $f(x)$. Следовательно, $f(V) \subset U$ для некоторой окрестности $V \in \mathcal{F}$ точки x.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (1). В силу предложения 3.13, достаточно показать, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Из предложения 6.13 вытекает, что x является пределом для некоторого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на X, для которого $M \in \mathfrak{U}$. Тогда $f(\mathfrak{U})$ сходится к $f(x)$. Следовательно, $f(x) \in \overline{f(M)}$. □

Так как отображение непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке (утверждение 3.9), то из теоремы 6.15 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.16. *Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение f непрерывно;*

(2) *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;*

(3) *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;*

(4) *если $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на X и $x \in X$ является пределом для ультрафильтра $\mathfrak{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathfrak{U})$.*

Компактность

Предложение 6.17. *Пусть X компактное пространство и $\mathcal{B}$ база фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Тогда $F = \bigcap \mathcal{B} \neq \varnothing$ и для любой окрестности U множества F существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$.*

Доказательство. Предположим противное, $F = \bigcup \mathcal{B} = \varnothing$. Тогда $\gamma = \{X \backslash F : F \in \mathcal{B}\}$ открытое покрытие X. Так как X компактно, то существует конечное подпокрытие $\mu \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{X \backslash F : F \in \mathcal{M}\}$ для некоторого конечного $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$. Так как $\bigcup \mu = X$, то $\bigcap \mathcal{M} = \varnothing$. Противоречие с тем, что $\mathcal{B}$ база фильтра.

Докажем от противного, что существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$. Семейство $\mathcal{F} = \{V \backslash U : B \in \mathcal{B}\}$ является базой фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Из доказанного вытекает, что $Q = \bigcap \mathcal{F}$ не пусто. Ясно, $Q \subset F$. Противоречие с $F \subset U$ и $U \cap Q = \varnothing$. □

Теорема 6.18. *Пусть X топологической пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X компактное пространство;*

(2) *если $\mathcal{B}$ база фильтра, состоящая из замкнутых множеств, то $\bigcap \mathcal{B} \neq \varnothing$;*

(3) *у любого фильтра $\mathcal{F}$ на X есть предельные точки;*

(4) *любой ультрафильтр $\mathfrak{U}$ на X сходится к некоторой точке пространства X.*

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) вытекает из предложения 6.17.

Докажем (2) ⇒ (1). Предположим противное. Тогда существует открытое покрытие γ пространства X без конечных подподкрытий. Тогда $\mathcal{B} = \{X \backslash \bigcup \mu : \mu \subset \gamma, |\mu| < \omega\}$ является базой фильтра с пустым пересечением и состоящей из замкнутых множеств. Противоречие.

Докажем (2) ⇒ (3). Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на X. Тогда $\mathcal{B} = \{\overline{M} : M \in \mathcal{F}\}$ является базой фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Из (2) вытекает, что $\bigcap \mathcal{B} \neq \varnothing$. Множество $\bigcap \mathcal{B}$ является множеством предельных точек для фильтра $\mathcal{F}$.

Докажем (3) ⇒ (2). Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Из (3) вытекает, что у $\mathcal{F}$ есть предельная точка x. Тогда $x \in \bigcap \mathcal{B}$.

Докажем (3) ⇒ (4). Из (2) вытекает, у ультрафильтра $\mathfrak{U}$ есть некоторая предельная точка x. Из предложения 6.12 вытекает, что x есть предел $\mathfrak{U}$.

Докажем (4) ⇒ (3). Из теоремы 6.2 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$, который содержит $\mathcal{F}$. Из (2) вытекает, что $\mathfrak{U}$ сходится к некоторой точке $x \in X$. Тогда x предельная точка для $\mathcal{F}$. □

Теорема 6.19 (теорема Александера)**.** *Пусть X топологической пространство и $\mathcal{P}$ предбаза X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X компактное пространство;*

(2) *для любого открытого покрытия γ, состоящего из элементов $\mathcal{P}$ (т.е. $\gamma \subset \mathcal{P}$), существует конечное подпокрытие.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, то что X не компактно. Из теоремы 6.18 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$ на X, не сходящейся ни к какой точке X.

Покажем, что для каждой точки $x \in X$ существует $W_x \in \mathcal{P}$, такое что $W_x \notin \mathfrak{U}$. Так как x не предел $\mathfrak{U}$, то $U \notin \mathfrak{U}$ для некоторой окрестности U точки x. Так как $\mathcal{P}$ предбаза X, то $x \in \bigcap \mathcal{W} \subset U$ для некоторого конечного $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$. Тогда $\bigcap \mathcal{W} \notin \mathfrak{U}$. Из предложения 6.5 вытекает, что $W_x \notin \mathfrak{U}$ для некоторого $W_x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{P}$.

Семейство $\gamma = \{W_x \,:\, x \in X\} \subset \mathcal{P}$ является открытым покрытием X элементами $\mathcal{P}$ и $W \notin \mathfrak{U}$ для $W \in \gamma$. Из (2) вытекает, что существует конечное подподкрытие $\mu \subset \gamma$ покрытия γ. Так как $\bigcup \mu = X$, то из предложения 6.4 вытекает, что $W \in \mathfrak{U}$ для некоторого $W \in \mu$. Противоречие с тем, что $\mu \subset \gamma$ и $W \notin \mathfrak{U}$ для $W \in \gamma$. □

6.1.3 Направленности

Множество Σ с отношением $\leqslant$ называется *направленным множеством*, если выполняются условия

(Net_1) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

(Net_2) $x \leqslant x$;

(Net_3) для любых x и y существует z, такой что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$.

Пример направленного множества — натуральные числа $\mathbb{N}$.

Направленностью называется отображение направленного множества Σ в топологическое пространство X, которое обычно записывается как индексированное множество $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ или $(x_\sigma)_\sigma$.

Типичный пример направленности — последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *сходится к точке* x, если для любой окрестности U точки x существует $\sigma_0 \in \Sigma$, такой что $x_\sigma \in U$ для $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *касается точки* x, если для любой окрестности U точки x и любого $\sigma_0 \in \Sigma$ существует $\sigma \geqslant \sigma_0$, такой что $x_\sigma \in U$.

Обозначим

$$\Sigma_{\sigma_0}\{\sigma \in \Sigma \,:\, \sigma \geqslant \sigma_0\}.$$

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ касается точки x, если и только если

$$x \in \overline{\{x_\sigma \,:\, \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\}}$$

для $\sigma_0 \in \Sigma$.

На направленном множестве Σ есть *база фильтра порожденная порядком* $\leqslant$:

$$\mathcal{B}_\Sigma = \{\Sigma_{\sigma_0} \,:\, \sigma_0 \in \Sigma\}.$$

Образ база фильтра $\mathcal{B}_\Sigma$ при отображении $\sigma \mapsto x_\sigma$:

$$\mathcal{B}_{(x_\sigma)_\sigma} = \{\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\} : \sigma_0 \in \Sigma\}$$

назовем *базой фильтра порожденная направленностью* $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.

Соответствующие фильтры будем называть *фильтром порожденным порядком* $\leqslant$ и *фильтром порожденная направленностью* $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.

Утверждение 6.20. *Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр порожденный направленностью $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.*

(1) *$(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ сходится к x если и только если $\mathcal{F}$ сходится к x;*

(2) *$(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ касается x если и только если $\mathcal{F}$ касается x;*

(3) *если $f : X \to Y$ отображение, то фильтр порожденный направленностью $(f(x_\sigma))_{\sigma\in\Sigma}$ совпадает с фильтром $f(\mathcal{F})$.*

Доказательство. ... □

Утверждение 6.21. *Любой фильтр порождается некоторой направленностью.*

Доказательство. ... □

Из этих утверждений вытекают аналоги утверждений про фильтры.

Предложение 6.22. *Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$x \in \overline{M}$;*

(2) *x является предельной точкой для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$;*

(3) *x является пределом для для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$.*

Теорема 6.23. *Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

(1) *X хаусдорфово пространство;*

(2) *у любого направленности $(x_\sigma)_\sigma$ не более одного предела.*

Теорема 6.24. *Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение f непрерывно в x;*

(2) *если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ касается x, то $(f(x_\sigma))_\sigma$ касается $f(x)$;*

(3) *если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ сходится к x, то $(f(x_\sigma))_\sigma$ сходится к $f(x)$.*

Теорема 6.25. *Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение f непрерывно;*

(2) *для любого $x \in X$, если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ касается x, то $(f(x_\sigma))_\sigma$ касается $f(x)$;*

(3) *для любого $x \in X$, если направленность $(x_\sigma)_\sigma$ сходится к x, то $(f(x_\sigma))_\sigma$ сходится к $f(x)$.*

Теорема 6.26. *Пусть X топологической пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X компактное пространство;*

(2) *у любоой направленности $(x_\sigma)_\sigma$ есть предельные точки.*

6.2 Дополнение

6.2.1 Фильтры и направленности

Важную роль в анализе играет утверждение: если $(x_n)_n$ касается точки x (в $\mathbb{R}^n$, в метрическом пространстве), то некоторая подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ сходится к точке x. Это утверждение обобщается на пространства с первой аксиомой счетности (лемма 5.17), но в общем случае неверно.

Для фильтров и направленностей вводится аналогичные понятия.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ фильтры на множестве X. Фильтр $\mathcal{Q}$ *тоньше* фильтра $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q}$.

Для баз фильтров $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ понятие тоньше выглядит более привычно: база фильтра $\mathcal{C}$ *тоньше* $\mathcal{B}$, если для каждого $B \in \mathcal{B}$ существует $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \subset B$.

Пусть $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ и $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ направленности в множестве X. Направленность $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *тоньше* направленности $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, если существует отображение $f\colon \Lambda \to \Sigma$, для которого выполняются условия:

(FN_1) для любого $\sigma_0 \in \Sigma$ существует $\lambda_0 \in \Lambda$, такие что $f(\lambda) \geqslant \sigma_0$ для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$;

(FN_2) $x_{f(\lambda)} = y_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$.

Последовательность $(x_n)_n$ является направленностью, а подпоследовательность $(x_{n_k})_k$ как направленность тоньше последовательности $(x_n)_n$.

Если направленность $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, то фильтр порожденный направленностью $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, тоньше фильтра порожденного направленностью $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.

Предложение 6.27. *Пусть X топологическое пространство, фильтр $\mathcal{F}$ касается точки $x \in X$. Тогда существует фильтр $\mathcal{Q}$, тоньше фильтра $\mathcal{F}$, такой что $\mathcal{Q}$ сходится к x.*

Доказательство. Положим $\mathcal{Q} = \{U \cap M : U$ окрестность точки x и $M \in \mathcal{F}\}$. Тогда фильтр $\mathcal{Q}$ сходится к x и $\mathcal{Q}$ тоньше $\mathcal{F}$. □

Предложение 6.28. *Пусть X топологическое пространство, направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ касается точки $x \in X$. Тогда существует направленность $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, такая что $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к x.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_x$ есть некоторая база в точке x. Положим

$$\Lambda = \{(\sigma, U) \in \Sigma \times \mathcal{B}_x \,:\, x_\sigma \in U\}.$$

Определим порядок на Λ: $(\sigma_1, U_1) \leqslant (\sigma_2, U_2)$ если и только если $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ и $U_2 \subset U_1$, где $(\sigma_1, U_1), (\sigma_2, U_2) \in \Lambda$. Положим $f(\lambda) = \sigma$ и $y_\lambda = x_\sigma$ для $\lambda = (\sigma, U) \in \Lambda$. Тогда направленность $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ тоньше направленности $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ и направленность $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к точке x. □

6.3 Задачи

Пространство ультрафильтров

Пусть X множество. Обозначим через $\mathrm{Ult}(X)$ множество ультрафильтров на X. Для $x \in X$, обозначим $\xi_x = \{M \subset X \,:\, x \in M\}$ главный ультрафильтр, порожденный точкой x. Точки $x \in X$ множества X отождествим с главными ультрафильтрами ξ_x, будем считать, что X является подмножеством $\mathrm{Ult}(X)$. Множество $X^* = \mathrm{Ult}(X)\backslash X$ называется *наростом* и состоит из свободных ультрафильтров.

Для $M \subset X$ обозначим $W(M) = \{\xi \in \mathrm{Ult}(X) \,:\, M \in \xi\}$. Семейство $\mathcal{B}_X = \{W(M) \,:\, \varnothing \neq M \subset X\}$ является базой топологии. Будем рассматривать $\mathrm{Ult}(X)$ как топологической пространство с топологией, порожденной базой топологии $\mathcal{B}_X$.

Задача 6.1. Пространство ультрафильтров $\mathrm{Ult}(X)$ является компактным хаусдорфовым пространством, множество X состоит из изолированных точек пространства $\mathrm{Ult}(X)$ и плотно в $\mathrm{Ult}(X)$.

Пространство X называется *экстремально несвязным*, если $\overline{U}$ открыто для любого открытого $U \subset X$.

Задача 6.2. В экстремально несвязном регулярном пространстве нет нетривиальных (т.е. бесконечных) сходящихся последовательностей.

Задача 6.3. Пространство $\mathrm{Ult}(X)$ экстремально несвязно и, следовательно, в $\mathrm{Ult}(X)$ нетривиальных сходящихся последовательностей.

Задача 6.4. Пусть X компактное хаусдорфово пространство. Доказать, что отображение

$$f : \mathrm{Ult}(X) \to X,\ \xi \mapsto \lim_{x\to\xi} f(x)$$

непрерывно.

6.3.1 Компактные полугруппы

Множество S с умножением $\cdot$ называться *полугруппой*, если выполняется тождество $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Вместо $x \cdot y$ будем писать xy.

Множество $Q \subset S$ называется *подполугруппой*, если $xy \in Q$ для всех $x, y \in Q$.

Полугруппа S с топологией называется *право топологической* полугруппой, если каждый *правый сдвиг*

$$\rho_y : S \to S,\ x \mapsto xy$$

непрерывен для каждого $y \in S$.

Непустая подполугруппа $Q \subset S$ право топологической полугруппы S называется *минимальной замкнутой подполугруппой*, если любая непустая замкнутая подполугруппа $R \subset Q$ совпадает с Q.

Задача 6.5. Пусть S компактная хаусдорфова право топологическая полугруппа и $g \in S$. Тогда множества

$$Sg = \{xg \,:\, x \in S\},$$
$$Q = \{x \in S \,:\, xg = g\}$$

являются замкнутыми подполугруппами S, множество Sg не пусто, множество Q может быть пустым.

Задача 6.6. Пусть S компактная право топологическая полугруппа. Существует минимальная замкнутая подполугруппа $Q \subset S$.

Задача 6.7. Пусть S хаусдорфова компактная право топологическая полугруппа. Любая минимальная замкнутая подполугруппа $Q \subset S$ одноточечная.

Элемент $g \in S$ полугруппы S называется *идемпотентом*, если $g^2 = gg = g$.

Задача 6.8 (теорема Эллис–Нумакура)**.** Пусть S хаусдорфова компактная право топологическая полугруппа. Тогда в S существует идемпотент.

Задача 6.9. Привести пример T_1 компактной право топологической полугруппы, которая не содержит идемпотентов.

6.3.2 Полугруппа $\beta\,\omega$

Пространство $\mathrm{Ult}(\omega)$ также обозначается как $\beta\,\omega$. Тогда $\omega^* = \beta\,\omega \setminus \omega$ — нарост ω, пространство свободных ультрафильтров на ω. Продолжим операцию сложения с ω на $\beta\,\omega$. Для $\xi, \zeta \in \beta\,\omega$ положим

$$\xi + \zeta = \lim_{n \to \xi} \left(\lim_{m \to \zeta} (n + m) \right).$$

Задача 6.10. Доказать, что пространство $\beta\,\omega$ с операцией $+$ является компактной хаусдорфовой право топологической полугруппой и нарост ω^* является замкнутой подполугруппой полугруппы $\beta\,\omega$.

Задача 6.11. Пусть ξ есть идемпотент в полугруппе ω^* и $M \in \xi$. Доказать, что

(1) $a + B \subset M$ для некоторых $a \in M$ и $B \in \xi$;

(2) $a + b = c$ для некоторых $a, b, c \in M$.

Задача 6.12 (теорема Шура)**.** Доказать, что для любого разбиения $\omega = N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_k$ существует $i \leqslant k$ и числа $a, b, c \in N_i$, такие что $a + b = c$.

Теоремы о разбиениях естественным образом связаны с ультрафильтрами.

Задача 6.13. Пусть $\mathcal{L}$ семейство подмножеств чисел ω, для которого выполняется условия:

(1) если $A \in \mathcal{L}$ и $A \subset B \subset \omega$, то $B \in \mathcal{L}$;

(2) для любого разбиения $\omega = N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_k$ существует $i \leqslant k$, для которого $N_i \in \mathcal{L}$.

Доказать, что тогда $\xi \subset \mathcal{L}$ для некоторого $\xi \in \omega^*$.

Для теоремы Шуры, $\mathcal{L} = \{M \subset \omega : a + b = c$ для некоторых $a, b, c \in M\}$.

6.3.3 Теоремы о компактности и ультрафильтры

Для доказательства теоремы о компактности пространства X возможна следующая схема доказательства:

(1) для ультрафильтра $\xi \in \mathrm{Ult}(X)$ мы “вычисляем” предел $L(\xi) \in X$;

(2) далее доказываем, что $L(\xi)$ является пределом ξ.

Компактность отрезка

Задача 6.14. Пусть $\xi \in \mathrm{Ult}([0,1])$.

(1) Доказать что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $[a, b] \in \xi$, такое что $b - a < \varepsilon$.

(2) Доказать что существует убывающая последовательность отрезков $([a_n, b_n])_n \subset \xi$, такая что $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

Задача 6.15. Для $\xi \in \mathrm{Ult}([0,1])$ определим $x = L_{[0,1]}(\xi) \in [0,1]$ таким образом, что $\{x\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$, где $([a_n, b_n])_n \subset \xi$ из задачи 6.14(2).

(1) Доказать, что $L_{[0,1]}(\xi)$ является пределом ξ.

(2) Доказать компактность отрезка $[0,1]$.

Компактность линейно упорядоченного множества

Задача 6.16. Пусть X линейно упорядоченное пространство, для которого выполняется условие:

существуют $\inf M$ и $\sup M$ для каждого непустого $M \subset X$.

Для $\xi \in \mathrm{Ult}(X)$ положим

$$L_X(\xi) = \inf\{\sup M \, : \, M \in \xi\}.$$

(1) Доказать, что $L_X(\xi)$ является пределом ξ.

(2) Доказать компактность X.

Компактность экспоненты

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство всех непустых замкнутых подмножеств пространства X обозначим через $\mathrm{Exp}_F(X)$. Предбазу $\mathrm{Exp}_F(X)$ образуют множества

$$W_1(U) = \{F \in \mathrm{Exp}_F(X) \, : \, F \subset U\},$$
$$W_2(U) = \{F \in \mathrm{Exp}_F(X) \, : \, F \cap U \neq \varnothing\},$$

где $U \in \mathcal{T}$.

Для $x \in X$, $\{x\} \in \mathrm{Exp}_F(X)$. Отождествляя x с $\{x\}$, будем считать, что X подмножество $\mathrm{Exp}_F(X)$.

Задача 6.17. Пусть X пространство. Доказать, что X топологически вложено в $\mathrm{Exp}_F(X)$.

Задача 6.18. Пусть X компактное пространство. Для $\xi \in \mathrm{Ult}(\mathrm{Exp}_F(X))$ положим

$$L_{\mathrm{Exp}_F(X)}(\xi) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \xi} \overline{\bigcup \mathcal{F}}.$$

(1) Доказать, что $L_{\mathrm{Exp}_F(X)}(\xi)$ является пределом ξ.

(2) Доказать компактность $\mathrm{Exp}_F(X)$.

Компактность пространства мер

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества M называется *алгеброй множеств*, если выполняются условия:

(Alg_1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;

(Alg_2) $X \backslash A \in \mathcal{A}$ для $A \in cA$;

(Alg_3) $A \cup B \in \mathcal{A}$ для $A, B \in cA$.

Отметим, из этих условий вытекает еще одно:

(Alg_4) $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{A}$ и $\bigcap \mathcal{M} \in \mathcal{A}$, для конечного $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_X$ наименьшую алгебру множеств, которая содержит $\mathcal{T}$.

Функция $\mu : \mathcal{A}_X \to [0,1]$ называется *вероятностной мерой*, если выполняются условия:

(Prob_1) $\mu(\varnothing) = 0$ и $\mu(X) = 1$;

(Prob_2) $\mu(A) \geqslant 0$ для $A \in \mathcal{A}_X$;

(Prob_3) $\mu(X \backslash A) = 1 - \mu(A)$ для $A \in \mathcal{A}_X$;

(Prob_4) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для непересекающихся $A, B \in \mathcal{A}_X$.

Отметим, из этих условий вытекает еще одно:

(Prob_5) $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = 1$, если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}_X$ разбиение пространства X.

Пространство всех вероятных мер обозначим $P(X)$. Предбазу топологии $P(X)$ образуют множества

$$W(U, \varepsilon) = \{\mu \in P(X) \,:\, \mu(U) > \varepsilon\}$$

для $U \in \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$.

Для $x \in X$, обозначим через δ_x *меру Дирака*: положим

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

для $A \in \mathcal{A}_X$. Отождествляя x и δ_x, будем считать, что X вложено в $P(X)$.

Задача 6.19. Пространство X вложено в $P(X)$.

Задача 6.20. Пусть X пространство. Для $\xi \in \mathrm{Ult}(P(X))$ и $A \in \mathcal{A}_X$ положим

$$L_{P(X)}(\xi)(A) = \lim_{\mu \to \xi} \mu(A).$$

(1) Доказать, что $L_{P(X)}(\xi) \in P(X)$.

(2) Доказать, что $L_{P(X)}(\xi)$ является пределом ξ.

(3) Доказать компактность $P(X)$.

Компактность пространства функционалов

Пусть L линейное вещественное пространство и $B \subset L$. Положим

$$B^* = \{f \,:\, f \text{ функционал на } L, \text{ для которого } f(B) \subset [-1, 1]\}.$$

Семейство всевозможных

$$W(v, U) = \{f \in B^* \,:\, f(x) \in U\}$$

где $v \in L$ и $U \subset \mathbb{R}$ открытое множество, является предбазой топологии B^*.

Множество $B \subset L$ назовем *поглощающим*, если для любого ненулевого $v \in L$ существует ненулевое число λ, такое что $\lambda v \in B$.

Задача 6.21. Пусть L линейное вещественное пространство и $B \subset L$ поглощающее подмножество. Для $\xi \in \mathrm{Ult}(B^*)$ и $v \in L$ положим

$$L_{B*}(\xi)(v) = \lim_{f \to \xi} f(v).$$

(1) Доказать, что $L_{B*}(\xi)$ является функционалом на L.

(2) Доказать, что $L_{B*}(\xi) \in B^*$.

(3) Доказать, что $L_{B*}(\xi)$ является пределом ξ.

(4) Доказать компактность B^*.

Если L нормируемое пространство, B единичный шар, то B^* это единичный шар сопряженного пространства L^* (пространства функционалов на L, которые ограниченны на B) со слабой* топологий. Компактность B^* в этой ситуации — эта теорема Алаоглу.

6.3.4 Теоремы о компактности и теорема Александрера

Задача 6.22. Используя теорему Александера доказать компактность отрезка $[0, 1]$.

Задача 6.23. Используя теорему Александера доказать компактность линейно упорядоченного пространства X, для которого выполняется условие:

существуют $\inf M$ и $\sup M$ для каждого непустого $M \subset X$.

Задача 6.24. Используя теорему Александера доказать компактность $\mathrm{Exp}_F(X)$ для компактного X.

Глава 7

Операции над пространствами

7.1 Операции над топологическими пространствами

7.1.1 Сравнение топологий

Пусть X множество и $\mathfrak{T}$ семейство всех топологий на множестве X. Семейство $\mathfrak{T}$ является частично упорядоченным множеством относительно порядка включения.

Пусть $\mathcal{T}, \mathcal{O} \in \mathfrak{T}$. Топология $\mathcal{O}$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}$ и топология $\mathcal{T}$ *слабее* топологии , если $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$. Дискретная топология самая сильная, антидискретная топология самая слабая.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$.

Топология $\mathcal{T}_{\min} \in \mathfrak{M}$ называется *минимумом* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *слабейшей топологией* в $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\min} \subset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если минимум существует, он обозначается как $\min \mathfrak{M}$.

Топология $\mathcal{T}_{\max} \in \mathfrak{M}$ называется *максимум* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *сильнейшей* топологией из $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\max} \supset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если максимум существует, он обозначается как $\max \mathfrak{M}$.

Обозначим

$$\mathfrak{M}_- = \{\mathcal{T} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{O} \in \mathfrak{M}\} \quad \text{– множество нижних граней семейства топологий } \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M}_+ = \{\mathcal{O} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{T} \in \mathfrak{M}\} \quad \text{– множество верхних граней семейства топологий } \mathfrak{M}.$$

Семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, $\mathfrak{M}_-$ содержит антидискретную топологию и $\mathfrak{M}_+$ содержит дискретную топологию.

Утверждение 7.1. *Существуют* $\max \mathfrak{M}_-$ *и* $\min \mathfrak{M}_+$.

(1) $\max \mathfrak{M}_- = \bigcap \mathfrak{M}$.

(2) *Семейство* $\bigcup \mathfrak{M}$ *является предбазой топологии* $\min \mathfrak{M}_+$. *Если* $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ *есть предбаза топологии* $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, *то* $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ *является предбазой топологии* $\min \mathfrak{M}_+$.

Доказательство. Докажем (1). Семейство $\bigcap \mathfrak{M}$ является топологией. Так как $\bigcap \mathfrak{M} \subset \mathcal{O}$ для $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}$, то $\bigcap \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}_-$. Если $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_-$, то $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ для всех $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $\mathcal{T} \subset \bigcap \mathfrak{M}$. Следовательно, $\bigcap \mathfrak{M} = \max \mathfrak{M}_-$.

Докажем (2). Пусть $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_+$. Тогда $\mathcal{P} \subset \bigcup \mathfrak{M} \subset \mathcal{O}$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, порожденная предбазой $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ и $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_+$. Следовательно, $\mathcal{T} = \min \mathfrak{M}_+$. □

Положим

$\inf \mathfrak{M} = \max \mathfrak{M}_-$ – *точняя нижния грань* или *инфинум* семейства топологий $\mathfrak{M}$,

$\sup \mathfrak{M} = \min \mathfrak{M}_+$ – *точняя верхняя грань* или *супремум* семейства топологий $\mathfrak{M}$.

Из утверждения 7.1 и того, что семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, вытекает, что $\inf \mathfrak{M}$ и $\sup \mathfrak{M}$ определены корректно и существуют.

Из утверждения 7.1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.2. (1) $\inf \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M}$.

(2) *Семейство* $\bigcup \mathfrak{M}$ *является предбазой топологии* $\sup \mathfrak{M}$. *Если* $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ *есть предбаза топологии* $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, *то* $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\mathcal{T}$ *является предбазой топологии* $\sup \mathfrak{M}$.

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.3. (1) $\min \mathfrak{M}$ *существует если и только если* $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. *В этом случае* $\min \mathfrak{M} = \inf \mathfrak{M}$.

(2) $\max \mathfrak{M}$ *существует если и только если* $\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. *В этом случае* $\max \mathfrak{M} = \sup \mathfrak{M}$.

7.1.2 Инициальные и финальные топологии

Пусть X множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространств.

Инициальные топологии

Пусть $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_I$ на X, слабейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to X_\alpha$ непрерывны, называется *инициальной топологией* на X относительно семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ множества X в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_I$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to X_\alpha$ непрерывны. Тогда $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$. Для корректности определения надо показать, что что существует $\min \mathfrak{M}_I$. В силу утверждений 7.2 и 7.3, достаточно показать, что $\inf \mathfrak{M}_I = \bigcap \mathfrak{M}_I \in \mathfrak{M}_I$.

Пусть $\alpha \in A$ и U открытое подмножество X_α. Тогда $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Следовательно $f^{-1}(U) \in \bigcap \mathfrak{M}_I$. Получаем, каждое f_α непрерывно относительно топологии $\bigcap \mathfrak{M}_I$. Следовательно, $\bigcap \mathfrak{M}_I \in \mathfrak{M}_I$.

Инициальную топологию $\mathcal{T}_I$ называют также *топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Утверждение 7.4. *Если на пространстве X топология, порожденная семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$, то каждое отображение f_α непрерывно.*

Утверждение 7.5. *Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ есть предбаза пространства X_α для $\alpha \in A$. Тогда семейство $\mathcal{P} = \{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ является предбазой инициальной топологией $\mathcal{T}_I$.*

Доказательство. Так как каждое отображение f_α относительно топологии $\mathcal{T}_I$ на X непрерывно, то $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}_I$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, пораженная предбазой $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$. Так как $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ для $U \in \mathcal{P}_\alpha$, то отображение f_α непрерывно относительно топологии $\mathcal{T}$ для каждого $\alpha \in A$. Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Так как $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$ и $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$, то $\mathcal{T} = \mathcal{T}_I$. □

Утверждение 7.6. *Пусть $\mathcal{T}$ топология на X. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *$\mathcal{T}$ есть инициальная топология $\mathcal{T}_I$.*

(2) *Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \to (X, \mathcal{T})$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *отображение f непрерывно;*

   (b) *отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем $(a) \Rightarrow (b)$. Отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно как композиция непрерывных функций.

Докажем $(b) \Rightarrow (a)$. Пусть $\mathcal{T}_\alpha$ есть топология пространства X_α для $\alpha \in A$. В силу утверждения 7.5, семейство $\mathcal{P} = \bigcup\{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{T}_\alpha\}$ является предбазой инициальной топологией $\mathcal{T}_I$. Для доказательства непрерывности отображения f достаточно показать, что $f^{-1}(W)$ открыто для $W \in \mathcal{P}$. Тогда $W = f_\alpha^{-1}(U)$ для некоторых $\alpha \in A$ и $U \in \mathcal{T}_\alpha$. Так как отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно, то $f^{-1}(W) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(U)$ открыто.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $Y = (X, \mathcal{T}_I)$ и $f : (X, \mathcal{T}_I) \to (X, \mathcal{T})$ тождественное отображение. Тогда отображение $f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$. Из $(2)(b) \Rightarrow (a)$ вытекает, что отображение f непрерывно. Следовательно $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$.

Пусть $Y = (X, \mathcal{T})$ и $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ тождественное отображение. Тогда отображение f непрерывно. Из $(2)(a) \Rightarrow (b)$ вытекает, что отображение $f_\alpha = f_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$. Следовательно $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Так как $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$, то $\mathcal{T}_I \subset \mathcal{T}$.

Так как $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_I$ и $\mathcal{T}_I \subset \mathcal{T}$, то $\mathcal{T}_I = \mathcal{T}$. □

Пусть Y топологическое пространство, $Z \subset Y$, $f : Z \to Y$ тождественное вложение. Инициальные топологии на Z относительно семейства отображений $\{f\}$ совпадает с топологией на Z индуцируемой на Z из X.

Финальные топологии

Пусть $g_\alpha : X_\alpha \to X$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_F$ на X, сильнейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \to (X, \mathcal{T})$ непрерывны, называется *финальной топологией* на X относительно семейства отображений $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ в множество X из топологических пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_F$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \to (X, \mathcal{T})$ непрерывны. Для корректности определения надо показать, что что существует $\max \mathfrak{M}_F$.

Утверждение 7.7.

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \textit{ открыто в } X_\alpha \textit{ для всех } \alpha \in A\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}'$ есть семейство множеств в правой части равенства из условия. Надо доказать, что $\mathcal{T}'$ является финальной топологией. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{T}'$ является топологией и отображения $g_\alpha : X_\alpha \to (X, \mathcal{T}')$ непрерывны для $\alpha \in A$. Следовательно, $\mathcal{T}' \in \mathfrak{M}_F$. Если $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_F$ и $U \in \mathcal{T}$, то $f_\alpha^{-1}(U)$ открыто в X_α для всех $\alpha \in A$. Тогда $U \in \mathcal{T}'$ и, следовательно, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Следовательно, $\mathcal{T}' = \max \mathfrak{M}_F = \mathcal{T}_F$. □

Утверждение 7.8. *Пусть $\mathcal{T}$ топология на X. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *$\mathcal{T}$ есть финальная топология $\mathcal{T}_F$.*

(2) *Пусть Y топологическое пространство и $g : (X, \mathcal{T}) \to Y$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *отображение g непрерывно;*

   (b) *отображение $g \circ g_\alpha$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

7.1.3 Сумма пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и семейство множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ дизьюнктно. Положим $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Определим топологию $\mathcal{T}$ на X: $U \in \mathcal{T}$ если $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для $\alpha \in A$. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *суммой* пространств и обозначается $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, ..., n\}$, то сумма также обозначается как $X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$.

Если $i_\alpha : X_\alpha \to X$ тождественные отображения для $\alpha \in A$, то топология суммы на X является финальной топологией относительно семейства отображений $\{i_\alpha : \alpha \in A\}$, что вытекает из утверждения 7.7.

Каждое X_α открыто замкнуто в X и i_α является топологическим вложением X_α в X.

Из утверждения 7.8 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.9. *Пусть Y топологическое пространство. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно если и только если отображение $f|_{X_\alpha}$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

7.1.4 Произведение пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$. Пусть

$$\pi_\alpha \colon P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha,\ (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_\alpha$$

проекция произведения P на сомножитель X_α.

Топологией произведения $\mathcal{T}_P$ на произведении P называется инициальная топология на X относительно семейства отображений $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ произведения P в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Произведение пространств $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ будем рассматривать как топологическое пространство с топологией произведения.

Из утверждения 7.4 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.10. *Проекции π_α непрерывны на произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Из утверждения 7.5 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.11. *Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ есть предбаза пространства X_α для $\alpha \in A$. Тогда семейство $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ является предбазой топологии произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Из утверждения 7.11 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.12. *Пусть $\mathcal{B}_\alpha$ есть база пространства X_α и $X_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ для $\alpha \in A$. Тогда семейство*

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \text{ для } \alpha \in A \text{ и } |\{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \omega \right\}$$

является базой топологии произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Из утверждения 7.8 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.13. *Пусть $\mathcal{T}$ топология на $P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *$\mathcal{T}$ есть топология произведения.*

(2) *Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \to (P, \mathcal{T})$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *отображение f непрерывно;*

   (b) *отображение $\pi_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Из утверждения 7.13 вытекает следующие утверждение.

Утверждение 7.14. *Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отображение f непрерывно;*

(2) *отображение $\pi_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Пусть X множество и $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Обозначим

$$\mathop{\triangle}_{\alpha\in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha,\ x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}.$$

Отображение $\triangle_{\alpha\in A} f_\alpha$ называется *диагональным произведением* семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Утверждение 7.15. *Пусть X топологическое пространство и $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть непрерывные отображения для $\alpha \in A$. Пусть*

$$f = \mathop{\triangle}_{\alpha\in A} f_\alpha \colon X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

есть диагональное произведение. Тогда

(1) *$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для каждого $\alpha \in A$;*

(2) *f непрерывно.*

Утверждение 7.16. *Пусть X топологическое T_0-пространство и $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *f есть топологическое вложение X в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$;*

(2) *топология X порождается семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.*

7.1.5 Компактность произведения пространств

Теорема 7.17 (теорема Тихонова)**.** *Пусть X_α компактное пространство для $\alpha \in A$. Тогда произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ компактно.*

Доказательство. В силу теоремы 6.18, достаточно доказать, что любой ультрафильтр на $P = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ сходится к некоторой точке P. Пусть $\xi_\alpha = \pi_\alpha(\xi)$ для $\alpha \in A$. Из утверждения 6.10 вытекает, что ξ_α есть ультрафилитр на X_α. Так как X_α компактно, то из теоремы 6.18 вытекает, что ультрафилитр ξ_α сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$.

Покажем, что ультрафилитр ξ сходится к точке $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Из утверждения 7.11 вытекает, что $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\ U$ открыто в $X_\alpha\}$ предбаза произведения P. В силу предложения 6.11, достаточно показать, что если $x \in W \in \mathcal{P}$, то $W \in \xi$. Пусть $W = \pi_\alpha^{-1}(U)$, где $\alpha \in A$ и U открыто в X_α. Так как $x \in W$, то $x_\alpha \in U$. Так как ξ_α сходится к x_α, то $U \in \xi_\alpha$. Следовательно $W = \pi_\alpha^{-1}(U) \in \xi$. □

7.1.6 Метрические и метризуемые пространства, IV

Две метрики ρ и d на множестве X называются *эквивалентными*, если топологии на X, порожденные на ρ и d, совпадают. Для $M \subset X$, обозначим

$$\operatorname{diam}_\rho(M) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in M\}$$

– диаметр множества M.

Предложение 7.18. *Для метрики ρ на множестве X и $\varepsilon > 0$ существует эквивалентная метрика d на X, для которой $\mathrm{diam}_d(X) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Положим $d(x, y) = \min \varepsilon, \rho(x, y)$. □

Предложение 7.19. *Пусть (X_n, ρ_n) метрические пространства и $\mathrm{diam}_{\rho_n}(X_n) \leqslant \frac{1}{n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $P = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Положим*

$$\rho(x, y) = \sup\{\rho(x_n, y_n) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

для $x = (x_n)_n \in P$ и $y = (y_n)_n \in P$. Тогда ρ метрика на P и топология (X, ρ) совпадает с топологией произведения на P.

Доказательство. Проекции $\pi_n : (P, \rho) \to (X_n, \rho_n)$ не увеличивают расстояние и поэтому непрерывны. Следовательно, топология (P, ρ) сильнее топологии произведения. Базу в (P, ρ) образуют множества вида $B_\rho(x, \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ и $x = (x_n)_n \in P$. Тогда

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} B_{\rho_n}(x, \varepsilon)$$

Так как $B_{\rho_n}(x, \varepsilon) = X_n$ для $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то из утверждения 7.12 вытекает, что $B_\rho(x, \varepsilon)$ открыто в топологии произведения. Следовательно, (P, ρ) слабее топологии произведения. □

Из предложений 7.18 и 7.19 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.20. *Счетное произведение метризуемых пространств метризуемо.*

Пространство $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ называется *гильбертов куб* или *гильбертов кирпич*.

Из теоремы 7.20 и теоремы 7.17 Тихонова вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.21. *Гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ является метризуемым компактным пространством.*

Теорема 7.22 (метризационная теорема Урысона)**.** *Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *X метризуемое сепарабельное пространство.*

(2) *X вкладывается в гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.*

(3) *X является регулярным пространством со второй аксиомой счетности.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из ...

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из ...

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Из теоремы ... вытекает, что X нормальное пространство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Положим $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \,:\, \overline{V} \subset U\}$. Занумеруем $\mathcal{D} = \{(U_n, V_n) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Из леммы Урысона (теорема ...) вытекает, что существует непрерывная функция $f_n : X \to [0, 1]$, так что

$f(\overline{V}) = \{0\}$ и $f(X \backslash U_n) = \{1\}$. Так как семейство $\{f^{-1}([0,1)) : n \in \mathbb{N}\}$ образует базу X, то семейство функций $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяют топологию X. Из утверждения 7.16 вытекает, что диагональное произведение $\triangle_{n=1}^{\infty} f_n$ вкладывает X в гильбертов куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$. $\square$

7.2 Дополнение

7.3 Задачи

Глава 8

Конструкции пространств

8.1 Конструкция топологических пространств

8.1.1 Фактор топология и факторные отображения

Пусть X множество, Y пространство, $f\colon Y \to X$ сюрьективное отображение. Топологию $\mathcal{T}_F$ на множестве X назовем *фактортопологией* относительно отображения f, если $\mathcal{T}_F$ есть сильнейшая топология на X, относительно которой отображение f непрерывна.

Другими словами, $\mathcal{T}_F$ есть финальная топология относительно семейства отображений $\{f\}$. Из утверждения 7.7 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.1.

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X \;:\; f^{-1}(U) \textit{ открыто в } Y\}.$$

Это утверждение эквивалентно следующему утверждению.

Пусть $\sim$ есть отношение эквивалентности на Y. Обозначим $[y]_\sim = \{x \in Y \;:\; x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий $y \in Y$. Множество $Y/\sim = \{[y]_\sim \;:\; y \in Y\}$ называется *фактормножеством* и отображение

$$q_\sim : Y \to Y/\sim,\; y \mapsto [y]_\sim$$

фактороотображением. Фактормножество с фактортопологией относительно фактороотображения называется *факторпространством*.

Отображение $f\colon Y \to X$ топологических пространств называется *факторным отображение*, если отображение f сюрьективно и топология X совпадает с фактортопологией на множестве X относительно отображения f.

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8.2. *Фактороотображение $q_\sim : Y \to Y/\sim$ пространства Y на факторпространство $Y/\sim$ является факторным отображение.*

Утверждение 8.1 можно сформулировать следующим образом.

Предложение 8.3. *Пусть $f : Y \to X$ сюрьективное отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Отображение f факторно.*

(2) *Множество $U \subset X$ открыто в X если и только если $f^{-1}(U)$ открыто в Y.*

(3) *Множество $F \subset X$ замкнуто в X если и только если $f^{-1}(F)$ замкнуто в Y.*

Предложение 8.4. *Факторное отображение непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f\colon Y \to X$ факторное отображение. Пусть $U \subset X$ открытое множество. Из предложения 8.3 вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в Y. □

Предложение 8.5. *Композиция факторных отображений факторна.*

Доказательство. Пусть $g\colon Z \to Y$ и $f\colon Y \to X$ факторные отображения. Так как g и f сюрьективны и непрерывны, то композиция $f \circ g\colon Z \to X$ сюрьективна и непрерывна. Пусть $U \subset X$, $V = f^{-1}(U)$ и $W = g^{-1}(V)$. Так g факторно, то W открыто если и только если V открыто. Так f факторно, то V открыто если и только если U открыто. Тогда $W = (f \circ g)^{-1}(U)$ открыто если и только если U открыто. Следовательно, отображение $f \circ g$ факторно. □

Пусть $f : Y \to X$ есть отображение множеств. Отношение эквивалентности $\sim_f$,

$$x \sim_f y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

на Y называется *отношением эквивалентности, порожденное отображением f.*

Предложение 8.6. *Пусть $f : Y \to X$ отображение топологических пространств. Пусть $h : Y/\sim_f \to X$ есть такое отображение, что $f = h \circ q_{\sim_f}$, то есть диаграмма*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_{\sim_f}"'] & & X \\ & Y/\sim_f \arrow[ur, hook, "h"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Пространство $Y/\sim_f$ есть факторпространство. Тогда

(1) *отображение h инъективно;*

(2) *отображение f сюрьективно тогда и только тогда, когда отображение h является биекцией;*

(3) *отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда отображение h непрерывно;*

(4) *отображение f факторно тогда и только тогда, когда отображение h является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Отображение $q_{\sim_f}$ факторно и, в силу предложения 8.4, непрерывно. Пункты (1) и (2) очевидны.

Докажем (3). ($\Rightarrow$) Пусть $U \subset X$ отрыто и $V = h^{-1}(U)$. Так как $q_{\sim_f}^{-1}(V) = f^{-1}(U)$ открыто в Y, то из факторности $q_{\sim_f}$ вытекает, что V открыто в $Y/\sim_f$.

($\Leftarrow$) Отображение f непрерывна как композиция непрерывных отображений h и $q_{\sim_f}$.

Докажем (4). ($\Rightarrow$) Так как f факторно, то f сюрьекция и из (2) вытекает, что h биекция. Для непрерывности h^{-1} достаточно проверить, что $U = h(V)$ открыто в X для открытого $V \subset Y/\sim_f$. Так как $q_{\sim_f}$ непрерывно, то $q_{\sim_f}^{-1}(V)$ открыто в Y. Так как $q_{\sim_f}^{-1}(V) = f^{-1}(U)$, то $f^{-1}(U)$ открыто в Y. Из факторности f вытекает, что U открыто в X.

($\Leftarrow$) Очевидно, гомеоморфизм h является факторным отображением. Из предложения 8.5 вытекает, что композиция $h \circ q_{\sim_f} = f$ факторна. □

8.1.2 Замкнутые и открытые отображения

Пусть $f : Y \to X$ отображение топологических пространств. Отображение f называется *открытым* отображением, если $f(U)$ открыто в X для любого открытого $U \subset Y$. Отображение f называется *замкнутым* отображением, если $f(F)$ замкнуто в X для любого замкнутого $F \subset Y$.

Предложение 8.7. *Пусть $f : Y \to X$ сюрьективное непрерывное отображение топологических пространств.*

(1) *Если f замкнутое отображение, то f факторно.*

(2) *Если f открытое отображение, то f факторно.*

Доказательство. Докажем (1). В силу предложения 8.3, достаточно показать, что если $F \subset X$ и $f^{-1}(F)$ замкнуто, то F замкнуто. Так как $f^{-1}(F)$ замкнуто, отображение f замкнуто и $F = f(f^{-1}(F))$, то F замкнуто.

Докажем (2). В силу предложения 8.3, достаточно показать, что если $U \subset X$ и $f^{-1}(U)$ открыто, то U открыто. Так как $f^{-1}(U)$ открыто, отображение f открыто и $U = f(f^{-1}(U))$, то U открыто. □

Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.8. (1) *Композиция замкнутых отображений замкнуто.*

(2) *Композиция открытых отображений открыто.*

Предложение 8.9. *Пусть $f\colon Y \to X$ непрерывное отображение топологических пространств. Если Y компактное пространство и X хаусдорфово пространство, то f замкнутое отображения.*

Доказательство. Пусть F замкнутое подмножество Y. Как замкнутое подмножество компактного пространства X, в силу предложения 5.1, пространство F компактно. Как непрерывный образ компактного пространства, в силу предложения 5.2, пространство $f(F)$ компактно. Как компактное подмножество хаусдорфового пространства, в силу предложения 5.6, множество $f(F)$ замкнуто в X. □

Предложение 8.10. *Пусть $f\colon Y \to X$ непрерывное сюръективное замкнутое отображение топологических пространств.*

(1) *Если Y T_1-пространство, то X T_1-пространство.*

(2) *Если Y нормальное пространство, то X нормальное пространство.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть $x \in X$ и $y \in f^{-1}(x)$. Так как Y T_1-пространство, то $\{y\}$ замкнуто в Y. Так как f замкнутое отображение, то $\{x\} = f(\{y\})$ замкнуто в X.

Докажем (2). Из (1) вытекает, что X T_1-пространство. Пусть P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X. Так как $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(F)$ замкнутые непересекающиеся подмножества нормального пространства Y, то существуют открытые непересекающиеся окрестности $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$ множеств $f^{-1}(P)$ и $f^{-1}(F)$. Положим

$$U = X \backslash f(Y \backslash \widetilde{U}), \qquad V = X \backslash f(Y \backslash \widetilde{V}).$$

Тогда U и V открытые непересекающиеся окрестности множеств P и F. □

Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Обозначим

$$\pi^A_B\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in B} X_\alpha,\ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha\in B}$$

проекцию произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ на $\prod_{\alpha\in B} X_\alpha$.

Предложение 8.11. *Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Тогда проекция $\pi^A_B\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ непрерывна и открыта.*

Доказательство. Для $C \subset A$ обозначим

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \prod_{\alpha\in C} U_\alpha : U_\alpha \text{ открыто в } X_\alpha \text{ для } \alpha \in C \text{ и } |\{\alpha \in C \,:\, U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \omega \right\}.$$

В силу утверждения 7.11, семейство $\mathcal{B}_C$ является базой произведения $\prod_{\alpha\in C} X_\alpha$. Пусть $V = \prod_{\alpha\in B} V_\alpha \in \mathcal{B}_B$. Тогда $(\pi^A_B)^{-1}(V) = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha \in \mathcal{B}_A$, где $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \in A \backslash B$. Тогда $(\pi^A_B)^{-1}(V)$ открыто в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и, следовательно, проекция π^A_B непрерывна.

Пусть $U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{B}_A$. Тогда $\pi^A_B(U) = \prod_{\alpha\in B} U_\alpha \in \mathcal{B}_B$ открыто в $\prod_{\alpha\in B} X_\alpha$. □

Следствие 8.12. *Пусть X и Y пространства. Тогда проекции*

$$\pi_1\colon X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x,$$
$$\pi_2\colon X \times Y \to Y,\ (x, y) \mapsto y$$

непрерывны и открыты.

Предложение 8.13. *Пусть X пространство и Y компактное пространство. Тогда проекция*

$$\pi_1\colon X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x$$

является замкнутым отображением.

Доказательство. Пусть $F \subset X \times Y$ замкнутое множество. Покажем, что $\pi_1(F)$ замкнуто в X. Для этого проверим, что $X \backslash \pi_1(F)$ открыто. Пусть $x \in X \backslash \pi_1(F)$.

Так как F замкнуто в $X \times Y$ и $(x, y) \notin F$ для $y \in Y$, то существуют открытые окрестности V_y точки y и открытые окрестность U_y точки x, для которых

$$U_y \times V_y \cap F = \varnothing.$$

Так как Y компактно и $\{V_y : y \in Y\}$ является открытым покрытием Y, то существует конечное $L \subset Y$, такое что $\bigcup\{V_y : y \in L\} = Y$. Тогда $U = \bigcap\{U_y : y \in L\}$ является окрестностью точки x и $(U \times Y) \cap F = \varnothing$. Следовательно, $x \in U \subset X \backslash \pi_1(F)$ и x является внутренней точкой множества $X \backslash \pi_1(F)$. □

8.1.3 Топологические свойства сумм и произведений пространств

Из предложений 5.3, 5.14 и 5.29 вытекает следующие утверждение.

Предложение 8.14. *Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

(1) *Если X_α компактно для $\alpha \in A$ и $|A| < \omega$, то X компактно.*

(2) *Если X_α счетно компактно для $\alpha \in A$ и $|A| < \omega$, то X счетно компактно.*

(3) *Если X_α финально компактно для $\alpha \in A$ и $|A| \leqslant \omega$, то X финально компактно.*

Из определений непосредственно вытекает следующие утверждение.

Предложение 8.15. *Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$. Если X_α T_i-пространство для $\alpha \in A$, то $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i-пространство.*

Из определений непосредственно вытекает следующие утверждение.

Предложение 8.16. *Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Если X_α T_i-пространство для $\alpha \in A$, то $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i-пространство.*

Лемма 8.17. *Пусть X пространство, Y компактное пространство, γ открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\gamma^{<\omega}$ множество конечных подмножеств множества γ. Существует семейство*

Докажем (1). Пусть $x \in X$. Пространство $\{x\} \times Y$ компактно. Следовательно, существует $\mu \in \gamma^{<\omega}$, для которого $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mu$. Тогда $x \in U_\mu$.

Пункт (2) вытекает из построения.

Пункт (3) вытекает из (2).

Предложение 8.18. *Пусть X счетно компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ счетно компактное пространство.*

Доказательство. Пусть γ счетное открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ семейство из леммы 8.17. Из леммы 8.17(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X. Так как $|\gamma^{<\omega}| \leqslant \omega$, то $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ открытое не более чем счетное покрытие счетно компактного пространства X. Следовательно, существует конечное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, такое что $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X. Из леммы 8.17(3) вытекает, что конечное семейство $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространство $X \times Y$. □

Предложение 8.19. *Пусть X финально компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ финально компактное пространство.*

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие пространства X. Пусть $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ семейство из леммы 8.17. Из леммы 8.17(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X. Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, для которого семейство $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X. Из леммы 8.17(3) вытекает, что $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространство $X \times Y$. Семейство λ не более чем счетно. □

Предложение 8.20. *Пусть X линделефовое пространство и Y компактное хаусдорфова пространство. Тогда $X \times Y$ линделефовое пространство пространство.*

Доказательство. Из предложения 8.20 вытекает, что $X \times Y$ финально компактное пространство. Из теоремы 5.8 вытекает, что Y нормальное и, следовательно, регулярно. Пространство X регулярно. Из предложения 8.16 вытекает, что $X \times Y$ регулярно. □

Теорема 8.21 (лемма Джонса)**.** *Пусть X сепарабельное нормальное пространство. Тогда $|D| < 2^\omega$ для любого дискретное замкнутого подмножество D пространства X.*

Доказательство. Пусть S счетное всюду плотное подмножество X. Для каждого $M \subset D$ зафиксируем открытое U_M, для которого

$$M \subset U_M \subset \overline{U_M} \subset X \backslash (D \backslash M).$$

Положим $S_M = U_M \cap S$. Тогда $M = \overline{S_M} \cap D$. Следовательно, отображение

$$\varphi : \mathsf{Exp}(D) \to \mathsf{Exp}(S),\ M \mapsto S_M$$

является иньективным. Следовательно, $2^{|D|} \leqslant 2^\omega$. Из теоремы Кантора получаем $|D| < 2^\omega$. □

Предложение 8.22. *Прямая Зоргенфрея* S *(пример 2.23) является линделефовым пространством.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что S регулярное пространство. Проверим, что S финально компактно. Пусть γ открытое покрытие S, состоящее из базисных множеств вида $[a, b)$. Положим $\gamma^* = \{(a, b) : [a, b) \in \gamma\}$ и $U = \bigcup \gamma^*$. Семейство γ^* состоит из открытых интервалов.

Так как для $\mathbb{R}$ и U, в топологии индуцированной из $\mathbb{R}$, линделефовы, то существует счетное $\mu \subset \gamma^*$, для которого $\bigcup \mu = U$. Положим $F = \mathbb{R} \setminus U$.

Для $x \in F$ зафиксируем $V_x \in \gamma$, для которой $x \in V_x$. Так как $x \notin U$, то x является левым концом полунтервала V_x. Пусть $y \in F \setminus \{x\}$. Так как $x, y \notin U$, то $x \notin V_y$ и $y \notin V_x$. Следовательно $V_x \cap V_y = \varnothing$. Так как семейство $\{V_x : x \in F\}$ дизьюнктно, то $|F| \leqslant \omega$. Семейство

$$\lambda = \{[a,b) : (a,b) \in \mu\} \cup \{V_x : x \in F\} \subset \gamma$$

является счетным подпокрытием. □

Предложение 8.23. *Квадрат S^2 прямой Зоргенфрея не нормален.*

Доказательство. Так как прямая Зоргенфрея сепарабельна, то S^2 сепарабельно. Множество

$$L = \{(x,y) \in \mathsf{S}^2 : x + 1 = 0\}$$

является дискретным замкнутым подмножеством мощности континуум. Из леммы Джонса (теорема 8.21) вытекает, что S^2 не нормально. □

8.1.4 Конструкция пространств

Для отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X обозначаем $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий x.

Из предложения 8.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.24. *Пусть $f\colon X \to Y$ факторное отображение топологических пространств. Отображение f замкнуто если и только если $f^{-1}(f(F))$ замкнуто в X для любого замкнутого F в X множества.*

Стягивание множества в точку

Пусть X пространство и $F \subset X$. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на X, такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \setminus F$ и $[x] = F$ для $x \in F$. Фактор множество $X/\sim$ обозначим как X/F и фактор отображение $q_\sim\colon X \to X/F$ обозначим как q_F. Факторпространство X/F это пространство X после *стягивания множества F в точку.*

Еще говорят, что X/F есть результат *факторизации X по F.*

Предложение 8.25. *Пусть F замкнутое множество пространства X. Тогда*

(1) *факторотображение $q_F : X \to X/F$ замкнуто;*

(2) *если X нормальное пространство, то X/F нормальное пространство.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть P замкнуто в X. Если $P \cap F = \varnothing$, то $q_F^{-1}(q_F(P)) = P$ замкнуто в X. Если $P \cap F \neq \varnothing$, то $q_F^{-1}(q_F(P)) = P \cup F$ замкнуто в X. Из предложения 8.24 вытекает, что q_F замкнутое отображение.

Докажем (2). Так как q_F замкнутое отображение, то из предложения 8.10 вытекает, что X/F нормально. □

Приклеивание пространств

Пусть X, Y – топологические пространства, F – подмножество пространства X, $f\colon F \to Y$ – непрерывное отображение. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на $X \oplus Y$, такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \oplus Y \backslash (F \cup f(F))$ и $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(y)$ для $y \in f(F)$. Фактор множество $(X \oplus Y)/\sim$ обозначим как $X \cup_f Y$ и факторотображение $q_\sim\colon X \oplus Y \to X \cup_f Y$ обозначим как q_f. Факторпространство $X \cup_f Y$ это $X \oplus Y$ после *приклеивания* X *к* Y *посредством отображения* f.

Предложение 8.26. *Пусть X, Y – топологические пространства, F – замкнутое подмножество пространства X, $f\colon F \to Y$ – непрерывное замкнутое отображение. Тогда*

(1) *факторотображение $q_f\colon X \oplus Y \to X \cup_f Y$ замкнуто;*

(2) *если X и Y нормальные пространства, то $X \cup_f Y$ нормальное пространство.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть P замкнуто в $X \oplus Y$. Тогда множество

$$q_f^{-1}(q_f(P)) = Q \cup f^{-1}(P \cap f(F)) \cup f^{-1}(f(F \cap P))$$

замкнуто в $X \oplus Y$. Из предложения 8.24 вытекает, что q_f замкнутое отображение.

Докажем (2). Из предложения **??** вытекает, что $X \oplus Y$ нормальное пространство. Так как q_f замкнутое отображение, то из предложения 8.10 вытекает, что $X \cup_f Y$ нормально. □

Цилиндр пространств и отображений

Пространство $X \times [0,1]$ называется *цилиндром* пространства X. Пусть $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение. Результат приклеивания цилиндра $X \times [0,1]$ к Y посредством отображения

$$f_0 : X \times \{0\} \to Y,\ (0,x) \mapsto f(x)$$

называется *цилиндром отображения* f и обозначается через $\mathrm{Cyl}(f)$.

Из предложения 8.26 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.27. *Пусть X, Y – топологические пространства, $f\colon X \to Y$ – непрерывное замкнутое отображение. Тогда*

(1) *факторотображение $q_{f_0}\colon (X \times [0,1]) \oplus Y \to \mathrm{Cyl}(f)$ замкнуто;*

(2) *если $X \times [0,1]$ нормальные пространства, то $\mathrm{Cyl}(f)$ нормальное пространство.*

Конусы

Если профакторизовать $X \times [0,1]$ по $X \times \{1\}$, то получится *конус* $\mathrm{Con}(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ над X.

Из предложения 8.25 вытекает следующее утверждение.

Предложение 8.28. *Пусть X пространства. Тогда*

(1) *факторотображение* $q_{X\times\{1\}} : X \times [0,1] \to \mathrm{Con}(X)$ *замкнуто;*

(2) *если* $X \times [0,1]$ *нормальное пространство, то* $\mathrm{Con}(X)$ *нормальное пространство.*

8.2 Дополнение

8.3 Задачи

Задача 8.1. Пусть X множество, X_α пространство и $f_\alpha\colon X_\alpha \to X$ для $\alpha \in A$, $\bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha(X_\alpha) = X$. Пусть $Y = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $f\colon Y \to X$ отображение, для которого $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$. Доказать, что финальная топология на X относительно семейства $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ совпадает с фактортопологией относительно отображения f.

8.3.1 Произведения пространств

Задача 8.2. Построить два счетнокомпактных пространства X и Y, для которых произведение не счетнокомпактно.

Задача 8.3. Пусть $(X_n)_n$ секвенциально компактные пространства. Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ секвенциально компактно.

Задача 8.4. Пусть X секвенциально компактные пространство и Y счетнокомпактное пространство. Доказать, что $X \times Y$ счетно компактно.

Задача 8.5. Привести пример компактного не секвенциально компактного пространства.

Задача 8.6. Привести пример нормально пространства X, для которого $X \times [0,1]$ не нормально.

> Такие примеры сложны, это пространства Доукера (Dowker space).

8.3.2 Конструкция пространств

Задача 8.7. Доказать, что $\mathbb{R}/$ без первой аксиомы счетности.

Задача 8.8. Доказать, что $\mathrm{Con}(\mathbb{R})$ без первой аксиомы счетности.

Задача 8.9. Доказать, что если X метризуемое пространство и $F \subset X$ компактно, то X/F с первой аксиомы счетности.

Задача 8.10. Доказать, что если X метризуемое пространство и $F \subset X$ компактно, то X/F метризуемо.

Задача 8.11. Доказать, что X/F хаусдорфово, если X регулярно и F замкнуто в X.

Задача 8.12. Привести пример регулярного пространства X и замкнутого $F \subset X$, для которых X/F не регулярно.

Задача 8.13. Привести пример хаусдорфового пространства X и замкнутого $F \subset X$, для которых X/F не хаусдорфово.

8.3.3 Совершенные отображения

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *совершенным* отображением, если отображение f замкнуто и $f^{-1}(y)$ компактно для каждого $y \in Y$.

Задача 8.14. Доказать, что если $f\colon X \to Y$ совершенное сюрьективное отображение и Y компактно, то X компактно.

Задача 8.15. Доказать, что если $f\colon X \to Y$ совершенное сюрьективное отображение и Y счетно компактно, то X счетно компактно.

Задача 8.16. Доказать, что если $f\colon X \to Y$ совершенное сюрьективное отображение и Y финально компактно, то X финально компактно.

Задача 8.17. Доказать, что если $f\colon X \to Y$ совершенное сюрьективное отображение и X метризуемо, то Y метризуемо.

8.3.4 Замкнутые образы метризуемых пространств

Пусть $S_{FU} = \{(n, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : n, m \in \mathbb{N}\}$, $F_{FU} = \{(n, 0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, $X_{FU} = S_{FU} \cup F_{FU}$. Пространство $V_{FU} = X_{FU}/F_{FU}$ называется *веером Фреше–Урысона*.

Задача 8.18. Доказать, что веер Фреше–Урысона V_{FU} без первой аксиомы счетности.

Задача 8.19. Доказать, что веер Фреше–Урысона V_{FU} вкладывается в пространства $\mathbb{R}/$ и $\mathrm{Con}(\mathbb{R})$.

Задача 8.20. Пусть X метризуемое пространство, Y пространство, f : $X \to Y$ непрерывное сюрьективное замкнутое отображение и $y \in Y$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

(1) в точке y выполняется первая аксиома счетности;

(2) граница $\mathrm{Fr}\, f^{-1}(y)$ компактна;

(3) веер Фреше-Урысона не вкладывается в Y таким образом, что y единственная неизолированная точка веера Фреше-Урысона.

Задача 8.21. Доказать, что если $f\colon X \to Y$ замкнутое непрерывное сюрьективное отображение, X метризуемо и Y с первой аксиомой счетности, то Y метризуемо.

Глава 9

Функции на пространствах, паракомпактность

9.1 Функции на пространствах, разбиение единицы, паракомпактность

9.1.1 Непрерывные отображения, III

Положим

$$\begin{aligned}
o_+ &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y, \\
o_* &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy, \\
o_{\max} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \max(x, y), \\
o_{\min} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \min(x, y), \\
o_- &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x, \\
o_i &: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Из математического анализа известно

Предложение 9.1. *Функции o_+, o_*, $o_{\max}$, $o_{\min}$, o_-, o_i непрерывны.*

Пусть X множество, f и g функции на X. Положим

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\
(fg)(x) &= f(x)g(x), \\
\max(f, g)(x) &= \max(f(x), g(x)), \\
\min(f, g)(x) &= \min(f(x), g(x)), \\
(-f)(x) &= -f(x).
\end{aligned}$$

Если $f(x) \neq 0$ для всех x, то

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Определим также $f - g = f + (-g)$ и $f/g = f\frac{1}{g}$ если $g(x) \neq 0$ для всех x.

Предложение 9.2. *Топология евклидово пространства* $\mathbb{R}^n$ *совпадает с топологией произведения.*

Доказательство. Базу обеих топологий образуют множества вида $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. □

Предложение 9.3. *Пусть* X *пространство,* f *и* g *непрерывные функции на* X*. Тогда функции* $f+g$, fg, $f-g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ *непрерывны. Если* $g(x) \neq 0$ *для всех* x*, то функции* $\frac{1}{g}$ *и* $\frac{f}{g}$ *непрерывны.*

Доказательство. Из предложений 9.2 и утверждения 7.15 вытекает, что отображение

$$f \triangle g : X \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (f(x), f(y))$$

непрерывно. Из предложений 9.1 и непрерывности композиции непрерывных функций (предложение 4.20) и перечисленных ниже формул вытекает доказываемое утверждение.

$$\begin{aligned}
(f+g) &= o_+ \circ (f \triangle g),\\
fg &= o_+ \circ (f \triangle g),\\
\max(f,g) &= o_{\max} \circ (f \triangle g),\\
\min(f,g) &= o_{\min} \circ (f \triangle g),\\
-f &= o_- \circ f,\\
\frac{1}{f} &= o_i \circ f.
\end{aligned}$$

□

9.1.2 Пространство непрерывных функций

Пусть V линейное пространство над $\mathbb{R}$. Функция

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto v$$

называется *нормой* если $\|v+u\| \leqslant \|v\| + \|u\|$, $\|-v\| = \|v\| \geqslant 0$ и $\lambda v = |\lambda|\|v\|$ для $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Пара $(V, \cdot)$ называется *нормированным* пространством. Функция $d(v,u) = \|v-u\|$ определяет метрику на V, которая определяет топологию V.

Последовательность $(x_n)_n$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, так что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для $n, m > N$. Другими словами, последовательность

$$d_n = \operatorname{diam}_\rho(\{x_n, x_{n+1}, ...\})$$

сходится к 0.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Нормируемое пространство V называется *банаховым* пространством, если метрическое пространство V полно.

Пусть X множество. Множество ограниченных функций на X обозначим $B(X)$. Ясно, $B(X)$ – линейное пространство. Положим

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in X\}$$

для $f \in B(X)$. Несложно проверяется, что $\|\cdot\|$ является нормой. Норма $\|\cdot\|$ называется sup-нормой. Сходимость функций в $(B(X), \|\cdot\|)$ называется *равномерной* сходимостью. Топология на $B(X)$, которая определяется с помощью sup-нормы, называется *топологией равномерной сходимости.*

Предложение 9.4. *Пусть X множество. Нормируемое пространство $(B(X), \|\cdot\|)$ является баноховым.*

Доказательство. Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $B(X)$. Пусть $x \in X$. Последовательность $(f_n(x))_n$ фундаментальна и поэтому сходится к некоторому $f(x)$.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим через N_ε такое число, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$.

Лемма 1. *$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $n > N_\varepsilon$.*

Доказательство. Так $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$, то

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)|.$$

Так как $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\| < \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$, то $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. □

Покажем, что f ограниченная функция. Если $n > N_1$, то из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leqslant 1$ и, следовательно $\|f\| \leqslant \|f_n\| + 1 < \infty$.

Из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leqslant \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(f_n)_n$ сходится к f. □

Пусть X топологическое пространство.

Обозначим через $C^*(X)$ все непрерывные ограниченные функции на X. Из предложения **??** вытекает, что $C^*(X)$ является линейным пространством. Будем рассматривать на $C^*(X)$ sup-норму $\|\cdot\|$.

Теорема 9.5. *Пусть X топологическое пространство. Нормируемое пространство $(C^*(X), \|\cdot\|)$ является баноховым.*

Доказательство. Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $C^*(X)$. Из предложения 9.4 вытекает, что последовательность $(f_n)_n$ равномерно сходится к некоторой ограниченной функции f.

Осталось показать, что функция f непрерывна. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $(f_n)_n$ сходится к f, то существует n, такое что $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как функция f_n непрерывна, то существует окрестность U точки x, такая что $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $y \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $y \in U$. □

Предложение 9.6. *Пусть $(V, \|\cdot\|)$ банохово пространство, $\sum_{n=1}^\infty c_n$ сходящийся ряд с положительными членами, $v_n \in V$, $\|v_n\| \leqslant c_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty v_n$ сходится в V.*

Доказательство. Обозначим $u_n = \sum_{i=1}^{n} v_n$ и $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(s_n)_n$ является фундаментальной, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $|s_n - s_m| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$. Тогда

$$\|u_n - u_m\| = \| \sum_{i=n}^{m} v_n \| \leqslant \sum_{i=n}^{m} \|v_i\| \leqslant \sum_{i=n}^{m} c_i = s_m - s_n < \varepsilon$$

для $m > n > N_\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(u_n)_n$ является фундаментальной и сходится к некоторой точке $u \in V$. Тогда $u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. □

9.1.3 Продолжение непрерывных функций

Теорема 9.7 (теорема Брауэра-Титце-Урысона)**.** *Пусть X нормальное топологическое пространство, F замкнутое подмножество X и f непрерывная функция на f непрерывная функция на X. Тогда f продолжается до непрерывной функции g на X (т.е. $f = g|_F$).*

Кроме того,

$$a = \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x), \qquad b = \sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x),$$

если f не достигает a, то g не достигает a и если f не достигает b, то g не достигает b.

Доказательство. Случай $a = b$, то есть f константа, тривиален. Далее $a < b$.

Рассмотрим случай $a = 0$ и $b = 1$. Построим индукцией по n последовательности непрерывных функций $(f_n)_n$ на F и $(h_n)_n$ на X, так что бы выполнялись условия:

(A_1) $f = f_1$;

(B_n) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant (2/3)^{n-1}$ для $x \in F$;

(C_n) $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ для $x \in X$;

(D_n) $f_{n+1}(x) = f_n(x) - h_n(x)$ для $x \in F$.

Положим $f_1 = f$. Предположим, что непрерывная функция f_n на F построена и для нее выполняются условие (B_n). Определим непрерывную функцию h_n на X таким образом, что для h_n выполняется условие (C_n) и для функции $f_{n+1} = f_n - h_n|_F$ выполняется условие

(B_{n+1}) $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant (2/3)^n$ для $x \in F$.

Отметим, из определения f_{n+1} вытекает (D_n).

Пусть

$$A = f_n^{-1}([0, \tfrac{1}{3}(2/3)^{n-1}]),$$
$$B = f_n^{-1}([\tfrac{2}{3}(2/3)^{n-1}, (2/3)^{n-1}]).$$

Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $h : X \to [0, 1]$, для которой $h(A) = \{0\}$ и $h(B) = \{1\}$. Положим

$h_n = \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}h$. Условие (C_n) выполняется. Положим $C = F\backslash(A \cup B)$. Семейство $\{A, B, C\}$ является разбиением множества F.

Поверим условие (B_{n+1}). Пусть $x \in F$. Рассмотрим три случая.

Случай $x \in A$. Тогда $h_n(x) = 0$ и $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ и

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \tfrac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant (2/3)^n\,.$$

Случай $x \in B$. Тогда $h_n(x) = \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и $\frac{2}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant f_n(x) \leqslant (2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и

$$0 \leqslant \tfrac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant (1 - \tfrac{1}{3})(2/3)^{n-1} = (2/3)^n\,.$$

Случай $x \in C$. Тогда $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и $\frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} < f_n(x) \leqslant \frac{2}{3}\,(2/3)^{n-1}$. Следовательно

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \tfrac{2}{3}\,(2/3)^{n-1} = (2/3)^n\,.$$

Последовательности функций $(f_n)_n$ и $(h_n)_n$, для которых выполняются условия (A_1), (B_n), (C_n) и (D_n), построены.

Из (A_1) и (D_n) вытекает, что $f = f_1$ и $f_i = h_i|_F + f_{i+1}$ для $i = 1, 2, ..., n$. Следовательно,

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i\,\Big|_F + f_{n+1}. \tag{9.1}$$

Из (B_n) и (C_n) вытекает, что $\|h_n\| \leqslant (2/3)^n$ и $\|f_n\| \leqslant (2/3)^n$, где $\|\cdot\|$ sup-норма на $C^*(X)$ и $C^*(F)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2/3)^n$ сходится, то из теоремы **??** и предложения **??** вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_n$ сходится в $C_*(X)$ в топологии равномерной сходимости.

Положим $g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} h_n$. Функция g_1 непрерывна. Так как $\lim_{n\to\infty}\|f_n\| = 0$, то из равенства (9.1) вытекает, что $g_1|_F = f$. Положим

$$g_2 = \min(1, \max(0, g_1)).$$

Тогда $g_2(X) \subset [0,1]$, $g_2|_F = f$ и из предложения 9.3 вытекает, что g_2 непрерывно.

Если f достигает своего инфинума (то есть $f(x) = 0$ для некоторого $x \in F$), то положим $g_3 = g_2$. Определим g_3 в противном случае. Положим $Q = g_2^{-1}((-\infty, 0])$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \varnothing$. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \to [0,1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g_3 = qg_2$. Тогда g_3 непрерывна, $g_3|_F = f$ и $g(X) \subset (0,1]$.

Если f достигает своего супремума (то есть $f(x) = 1$ для некоторого $x \in F$), то положим $g = g_3$. Определим g в противном случае. Положим $Q = g_3^{-1}([1, +\infty))$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \varnothing$. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \to [0,1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g = qg_3$. Тогда g непрерывна, $g|_F = f$ и $g(X) \subset [0,1)$.

По построению, функция g является искомой.

Рассмотрим случай $-\infty < a < b < +\infty$. Положим $\tilde{f} = (f - a)/(b - a)$. Тогда $\inf \tilde{f} = 0$ и $\sup \tilde{f} = 1$. Из случая $a = 0$ и $b = 1$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X, для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = 0$ и $\sup \tilde{g} = 1$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает 0, то $\tilde{g}$ не достигает 0 и если $\tilde{f}$ не достигает 1, то $\tilde{g}$ не достигает 1. Положим $g = a + (b - a)\tilde{g}$. Функция g является искомой.

Рассмотрим общий случай. Из математического анализа известно, что функции $\mathrm{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ возрастающие, непрерывны и взаимно обратные. Положим $\tilde{f} = \mathrm{arctg} \circ f$. Тогда $\tilde{f}$ непрерывная ограниченная функция. Из случая $-\infty < a < b < +\infty$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X, для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = \inf \tilde{f}$ и $\sup \tilde{g} = \sup \tilde{f}$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает $\inf \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\inf \tilde{f}$ и если $\tilde{f}$ не достигает $\sup \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\sup \tilde{f}$. Тогда $\tilde{g}(X) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Положим $g = \mathrm{tg} \circ \tilde{g}$. Функция g является искомой. □

9.1.4 Паракомпактные пространства

Семейство множеств λ пространства X называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая что $|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| < \omega$.

Пусть γ семейство подмножеств пространства X. Семейство λ *вписано* в семейство γ, если для любого $M \in \lambda$ существует $L \in \gamma$, такое что $M \subset L$.

Пространство X называется *паракомпактным* пространством, если для любого открытого покрытия γ пространства X существует локально конечное покрытие λ, такое что λ вписано в покрытие γ.

Конечное семейство является локально конечным, так что верно следующие утверждение.

Предложение 9.8. *Компактные пространства паракомпактны.*

Это утверждение можно усилить следующим образом.

Предложение 9.9. *Пусть X паракомпактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ паракомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть γ открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\gamma^{<\omega}$ множество конечных подмножеств множества γ. В силу леммы 8.17, существует семейство $\mathcal{U} = \{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ подмножеств X, так что выполняются условия:

(1) семейство $\mathcal{U}$ является открытым покрытием пространства X;

(2) $U_\mu \times Y \subset \bigcup \mu$ для $\mu \in \mathcal{M}$.

Так как X паракомпактное пространство, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X, такое что $\tilde{\lambda}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}$. Так как $\tilde{\lambda}$ вписано в $\mathcal{U}$, то для каждого $V \in \tilde{\lambda}$ существует $\mu_V \in \gamma^{<\omega}$, такое что $V \subset U_{\mu_V}$. Положим

$$\lambda = \{(V \times Y) \cap U \,:\, V \in \tilde{\gamma},\ U \in \mu_V\}.$$

Так как $\tilde{\lambda}$ локально конечно и μ_V конечно для $V \in \tilde{\lambda}$, то семейство λ локально конечно. Очевидно, λ вписано в γ и состоит из открытых множеств. Так как $\tilde{\lambda}$ покрытие X, $V \subset U_{\mu_V}$ и, в силу условия (2), $U_{\mu_V} \times Y \subset \bigcup \mu_V$ для $V \in \tilde{\lambda}$ то λ покрытие $X \times Y$. □

Предложение 9.10. *Замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X паракомпактное пространство и $F \subset X$ замкнутое множества. Пусть γ открытое в топологии подпространства покрытие пространства F.

Положим $\tilde{\gamma} = \{U \cap (X \backslash F) \ : \ U \in \gamma\}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ открытое покрытие X. Так как X паракомпактно, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X, вписанное в покрытие $\tilde{\gamma}$.

Положим $\lambda = \{V \cap F \ : \ V \in \tilde{\lambda}\}$. Семейство λ является локально конечным открытым в F покрытием пространства F, вписанным в γ. $\square$

Лемма 9.11. *Пусть λ локально конечное семейство в пространстве X. Тогда*

$$\bigcup_{U\in\lambda} \overline{U} = \overline{\bigcup_{U\in\lambda} U}.$$

Доказательство. Включение $\bigcup_{U\in\lambda} \overline{U} \subset \overline{\bigcup \lambda}$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x \in \overline{\bigcup \lambda}$. Так как λ локально конечно, то семейство $\mu = \{U \in \gamma \ : \ U \cap V \neq \varnothing\}$ конечно для некоторой окрестности V точки x. Тогда $x \in \overline{\bigcup \mu}$. Так как μ конечно, то $\overline{\bigcup \mu} = \bigcup_{U\in\mu} \overline{U}$. Тогда $x \in \overline{U}$ для некоторого $U \in \mu$ и, следовательно, $x \in \bigcup_{U\in\lambda} \overline{U}$. $\square$

Лемма 9.12. *Пусть X паракомпактное пространство, $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Предположим, что для каждого $y \in F$ существует окрестность $U_y \supset P$ множества P и окрестность V_y точки y, такие что $U_y \cap V_y = \varnothing$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности множеств P и F.*

Доказательство. Пусть λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в открытое покрытие $\gamma = \{X \backslash F\} \cap \{V_y \ : \ x \in F\}$. Положим $\lambda_F = \{W \in \lambda \ : \ W \cap F \neq \varnothing\}$ и $V = \bigcap \lambda_F$. Так как λ покрытие, то $F \subset V$.

Покажем, что $\overline{V} \cap P = \varnothing$. Так как семейство λ_F локально конечно, то, в силу леммы 9.12, $\overline{V} = \bigcup_{W\in\lambda_F} \overline{W}$. Покажем, что если $W \in \lambda_F$, то $\overline{W} \cap P = \varnothing$. Так как λ вписано в γ и $W \cap F \neq \varnothing$, то $W \subset V_y$ для некоторого $y \in F$. Тогда $\overline{W} \subset X \backslash V_y \subset X \backslash P$. Следовательно, $\overline{W} \cap P = \varnothing$.

Положим $U = X \backslash \overline{V}$. Тогда $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Теорема 9.13. *Паракомпактное хаусдорфовое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X паракомпактное хаусдорфовое пространство.

Покажем, что X регулярное пространство. Пусть $x \in X$, $F \subset X$ замкнутое множество и $x \notin F$. Надо найти у x и F непересекающиеся окрестности. Положим $P = \overline{x}$. Так как X хаусдорфово пространство, то X является T_1-пространством и множество P замкнуто в X. Так как X хаусдорфово пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y, соответственно. Из леммы 9.12 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности множеств $P = \{x\}$ и F.

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Надо найти у P и F непересекающиеся окрестности. Так как X регулярное пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y множества P и точки y. Из леммы 9.12 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности у множеств P и F. □

Теорема 9.14. *Линделефово пространство паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X линделефово пространство. Пусть γ открытое покрытие X. Так как X регулярно, то

$$\gamma_1 = \{V \subset X \,:\, V \text{ открыто в } X \text{ и } \overline{V} \subset U \text{ для некоторого } U \in \gamma\}$$

есть открытое покрытие, вписанное в γ. Так как X финально компактно, то существует счетное подпокрытие $\gamma_2 \subset \gamma_1$ покрытия γ_1. Занумеруем элементы γ_2: $\gamma_2 = \{V_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как γ_2 вписано в γ, то существует $U_n \in \gamma$, такой что $\overline{V_n} \subset U_n$. Положим

$$W_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V_n}.$$

Семейство $\lambda = \{W_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ состоит из открытых множеств и вписано в γ.

Покажем, что λ покрытие X. Пусть $x \in X$. Положим $m = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, x \in U_n\}$. Так как $\overline{V_i} \subset U_i$ для $i < m$, то $x \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{V_i}$. Так как $x \in U_m$, то $x \in W_m$.

Покажем, что λ локально конечно. Пусть $x \in X$. Положим $k = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, x \in V_n\}$. Тогда V_k окрестность точки x и $x \notin W_n$ для $n > k$. Следовательно, $|\{W \in \lambda \,:\, W \cap V_k \neq \varnothing\}| \leqslant k < \omega$. □

9.1.5 Разбиение единицы

Пусть X пространство и f функция на X. Множество

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}$$

называется *носителем* функции f.

Пусть $\{f_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ семейство непрерывных функций на пространстве X. Если семейство $\{\operatorname{supp} f_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ локально конечно, то определим сумму

$$\sum_{\alpha \in A} f_\lambda(x) = \sum \{f_\alpha \,:\, \alpha \in A,\ f_\alpha \neq 0\}.$$

Правая часть этого равенства является конечной суммой и поэтому определена корректна.

Утверждение 9.15. *Если семейство носителей* $\{\operatorname{supp} f_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ *локально конечно, то сумма* $\sum_{\alpha \in A} f_\lambda$ *непрерывна.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как $\{\operatorname{supp} f_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ локально конечно, то $B = \{\alpha \in A \,:\, \operatorname{supp} f_\alpha \cap U \neq \varnothing\}$ конечно для некоторой открытой окрестности точки x. Положим $f = \sum_{\alpha \in A} f_\lambda$ и $g = \sum_{\alpha \in B} f_\lambda$. Тогда $f|_U = g|_U$. Так как g непрерывно то f непрерывно в точке x. □

Семейство непрерывных функций $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ назовем *разбиением единицы*, если семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, $f_\alpha \geqslant 0$ для $\alpha \in A$ и $\sum_{\alpha \in A} f_\lambda \equiv 1$.

Разбиение единицы *подчинено покрытию* γ пространства X, если семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ вписано в покрытие γ.

Семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ является покрытием для разбиения единицы. Ясно, $f_\alpha(X) \subset [0,1]$ и $\operatorname{supp} f_\alpha = f^{-1}((0,1])$ для функций из разбиения единицы.

Семейство множеств $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ *комбинаторно вписано* в семейство $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$, если $S_\alpha \subset T_\alpha$ для $\alpha \in A$.

Покрытие пространства, состоящее из замкнутых множеств, будем называть *замкнутым покрытием.*

Предложение 9.16 (лемма об ужатии)**.** *В конечное открытое покрытие $\{U_i : i = 1,2,...,n\}$ нормального пространства X можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1,2,...,n\}$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. Если $n = 1$, от $U_1 = X$ и $F_1 = X$. Пусть $n > 1$ и утверждение доказано для $n-1$. Пусть $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$. Пусть U есть окрестность F, такая что $\overline{U} \subset U_n$. Положим $Y = X \setminus U$. Так как Y замкнуто в X, то Y нормальное пространство (предложение 4.28). Семейство $\{U_i \cap Y : i = 1,2,...,n-1\}$ является открытым в Y покрытием нормального пространства Y. Из предположения индукции вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1,2,...,n-1\}$ пространства Y, комбинаторно вписанное в $\{U_i \cap Y : i = 1,2,...,n-1\}$. Положим $F_n = \overline{U}$. Семейство $\{F_i : i = 1,2,...,n\}$ является искомым. □

Теорема 9.17. *Если X нормальное пространство, то для любого конечного отрытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \{U_i : i = 1,2,...,n\}$. Из леммы об ужатии (предложение 9.17) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1,2,...,n\}$, комбинаторно вписанное в γ. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что, для $i = 1,2,...,n$, существует непрерывная функция $g_i : X \to [0,1]$, такая что $g_i(F_i) = \{1\}$ и $g_i(X \setminus F_i) = \{0\}$. Положим $g = \sum_{i=1}^n g_i$. Так как $\{F_i : i = 1,2,...,n\}$ покрытие, то $g \geqslant 1 > 0$. Положим $f_i = g_i/g$. Разбиение единицы $\{f_i : i = 1,2,...,n\}$ подчиненно покрытию γ. □

Предложение 9.18 (лемма об ужатии для паракомпактных пространств)**.** *В открытое покрытие $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ хаусдорфового паракомпактного пространства X можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Доказательство. Положим

$$\lambda = \{V \subset X : V \text{ открыто в } X \text{ и } \overline{V} \subset U_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in A\}.$$

Так как X нормально (теорема 9.13), то семейство λ является открытым покрытием X. Так как X паракромпактно, то существует открытое локально конечное покрытие λ, вписанное в γ. Положим $\lambda_\alpha = \{U \in \lambda : \overline{U} \subset$

$U_\alpha\}$ и $F_\alpha = \bigcup\{\overline{U} : U \in \lambda_\alpha\} \subset U_\alpha$ для $\alpha \in A$. Так как λ вписано в γ, то $\bigcup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha = \lambda$. Следовательно, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие X, комбинаторно вписанное в $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как семейство λ_α локально конечно, то, в силу леммы 9.12, $F_\alpha = \overline{\bigcup \lambda_\alpha}$ и, следовательно, F_α замкнуто для $\alpha \in A$. □

Теорема 9.19. *Если X хаусдорфово паракомпактное пространство, то для любого отрытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ.*

Доказательство. Так как X паракромпактно, то существует открытое локально конечное покрытие $\lambda = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, вписанное в γ. Из леммы об ужатии для паракомпактных пространств (предложение 9.19) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$, комбинаторно вписанное в λ. Из леммы Урысона (теорема 4.26) вытекает, что, для $\alpha \in A$, существует непрерывная функция $g_\alpha : X \to [0,1]$, такая что $g_\alpha(F_\alpha) = \{1\}$ и $g_\alpha(X\backslash F_\alpha) = \{0\}$. Отметим, $\operatorname{supp} g_\alpha \subset U_\alpha$ и, следовательно, семейство носителей $\{\operatorname{supp} g_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно. Из утверждения 9.15 вытекает, что функция $g = \sum_{i=1}^n g_i$ непрерывна. Так как $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие, то $g \geqslant 1 > 0$. Положим $f_\alpha = g_\alpha/g$. Разбиение единицы $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ подчиненно покрытию γ. □

9.2 Дополнение

9.2.1 Метрические и метризуемые пространства, V

Пусть (X,ρ) метрическое пространство. Для $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$B_\rho(A,\varepsilon) = \bigcup_{x\in A} B_\rho(x,\varepsilon).$$

Семейство подмножеств λ пространства X называется *дискретным*, то если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая что

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| \leqslant 1.$$

Ясно, дискретное семейство является локально конечным.

Теорема 9.20 (теорема Стоуна)**.** *Метризуемое пространство паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X есть метризуемое пространство и ρ метрика на X, которая определяет топологию X. Пусть γ открытое покрытие X и $\tau = |\gamma|$. Занумеруем γ ординалами до τ: $\gamma = \{U_\alpha : \alpha < \tau\}$. Для $\alpha < \tau$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_{\alpha,n} = \{x \in U_\alpha : B_\rho(x, \tfrac{3}{n}) \subset U_\alpha\}. \tag{9.2}$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$ построим

$$C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset W_{\alpha,n} \subset U_\alpha, \tag{9.3}$$

так чтобы выполнялись условия:

(*C*) $C_{\alpha,n} = (F_{\alpha,n}\backslash U_n)\backslash \bigcup_{\beta<\alpha} W_{\beta,n}$;

(U) $U_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{1}{n})$;

(W) $W_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{3}{n})$;

где

$$U_n = \bigcup \{U_{i,\alpha} : i < n, \ \alpha < \tau\}. \tag{9.4}$$

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность семейств

$$\Lambda_n = \{C_{\alpha,n}, U_{\alpha,n}, W_{\alpha,n} : \alpha < \tau\}, \ n \in \mathbb{N},$$

каждое семейство Λ_n построим по трансфинитной индукцией по $\alpha < \tau$.

Предположим, что для $i < n$ семейства Λ_i построены. Определим U_n по формуле (9.4). Пусть $\alpha < \tau$ и для $\beta < \alpha$ построены $C_{\beta,n}$, $U_{\beta,n}$ и $W_{\beta,n}$. Определим $C_{\alpha,n}$ формулой (C), $U_{\alpha,n}$ формулой (U), $W_{\alpha,n}$ формулой (W). Построение завершено.

Так как $C_{\alpha,n} \subset F_{\alpha,n}$, то из формул (9.2), (U) и (W) вытекает включение (9.3).

Для $n \in \mathbb{N}$, положим $\lambda_n = \{U_{\alpha,n} : \alpha < \tau\}$. Положим $\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$.

Лемма 1. *Семейство λ состоит из открытых множеств и вписано в γ.*

Доказательство. Пусть $U_{\alpha,n} \in \lambda$. Из (U) вытекает, что $U_{\alpha,n}$ открыто. Из (9.3) вытекает $U_{\alpha,n} \subset U_\alpha \in \gamma$. □

Лемма 2. *λ покрытие X.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как γ покрытие X, то $A = \{\beta < \tau : x \in U_\beta\} \neq \varnothing$. Положим $\alpha = \min A$. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое что $B_\rho(x, \frac{3}{n}) \subset U_\alpha$. Тогда $x \in F_{\alpha,n}$. Если $x \in U_n$, то $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup \lambda$. Рассмотрим случай $x \notin U_n$. Так как $x \notin U_\beta \supset W_{\beta,n}$ для $\beta < \alpha$, то $x \notin \bigcup_{\beta<\alpha} W_{\beta,n}$. Тогда

$$x \in C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset \bigcup \lambda.$$

В любом случае, $x \in \bigcup \lambda$. □

Лемма 3. *λ_n дискретно для $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Если $\beta < \alpha < \tau$, то из (C) вытекает, что $W_{\beta,n} \cap C_{\alpha,n} = \varnothing$. Из (W) вытекает $\rho(C_{\beta,n}, C_{\alpha,n}) \geqslant \frac{3}{n}$. Из (U) вытекает, что $\rho(U_{\beta,n}, U_{\alpha,n}) \geqslant \frac{1}{n}$. Отсюда вытекает, что

$$|\{\alpha < \tau : U_{\alpha,n} \cap B_\rho(x, \tfrac{1}{2n})\}| \leqslant 1.$$

□

Лемма 4. *Для $x \in X$ существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x, такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$.*

Доказательство. Так как λ покрытие X, то $x \in U_{\kappa,k}$ для некоторых $\kappa < \tau$ и $k \in \mathbb{N}$. Существует $m \geqslant k$, такое что $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k}$. Положим $W = B_\rho(x, \frac{1}{m})$.

Покажем, что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$. Достаточно показать, что $W \cap U_{\alpha,n} = \varnothing$ для $\alpha < \tau$. Так как $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k} \subset U_n$ и, в силу (C), $C_{\alpha,n} \cap U_n = \varnothing$, то $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \cap C_{\alpha,n} = \varnothing$. Следовательно, $\rho(W, C_{\alpha,n}) \geqslant \frac{2}{m}$. Так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, то из (C) вытекает $\rho(W, U_{\alpha,n}) \geqslant \frac{1}{m}$. Следовательно, $W \cap U_{\alpha,n} = \varnothing$. □

Лемма 5. *λ локально конечно.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Из леммы 4 вытекает, что существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x, такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$. Для $i \leqslant m$, в силу леммы 3, семейство λ_i дискретно. Следовательно, существует окрестность U_i точки x, такая что $|\{V \in \lambda_i : V \cap U_i \neq \varnothing\}| \leqslant 1$. Положим

$$U = W \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i.$$

Тогда

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| \leqslant m < \omega.$$

□

Из лемм 1, 2 и 5 вытекает, что λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в покрытие γ. □

9.3 Задачи

Глава 10

Связность и нульмерность

10.1 Связные и нульмерные пространства

10.1.1 Связные пространства

Пространство X называется *связным*, если не существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B. В противном случае пространство X называется *несвязным*.

Соответственно, пространство X является несвязным, если существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B.

Множество A является дополнением до открытого множества B и, следовательно, замкнуто. Множество A является открытым и замкнутым, то есть *открыто-замкнутым*. Дополнение до открыто-замкнутого множества открыто-замкнуто, то есть множество B тоже открыто-замкнуто.

Предложение 10.1. *Пространство X связно если и только если любое открыто-замкнутое непустое подмножество U пространства X совпадает с X.*

Пустое пространство и одноточечное связны. Среди двоеточий, связны андидискретное двоеточие и связное двоеточие.

Теорема 10.2. *Непрерывный образ связного пространства связен.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное сюрьективное отображение пространств и X связно. Пусть U есть открыто замкнутое непустое подмножество Y. Тогда $f^{-1}(U)$ является открыто-замкнутым непустым подмножеством X. Из предложения 10.1 вытекает, что $f^{-1}(U)$ совпадает с X. Тогда U совпадает с Y. Из предложения 10.1 вытекает, что Y связно. $\square$

Предложение 10.3. *Пусть X пространство, $Y \subset X$ связное подпространство и U открыто-замкнутое подмножество X. Тогда либо $Y \subset U$ либо $Y \cap U = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное, то есть то что $V = Y \cap \neq \varnothing$ и $Y \setminus U \neq \varnothing$. Тогда V непустое открыто-замкнутое в Y подмножество. Следовательно, в силу предложения 10.1, $V = Y$ и $Y \subset U$. Противоречие с $Y \setminus U \neq \varnothing$. $\square$

Предложение 10.4. *Пусть X пространство, $X = A \cup B$, $A \cap B \neq \varnothing$ и подпространства A и B связны. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто замкнутое подмножество X. Так как $X = A \cup B$, то либо $A \cap U \neq \varnothing$, либо $B \cap U \neq \varnothing$. Для определенности, пусть $A \cap U \neq \varnothing$. Из предложения 10.8 вытекает, что $A \subset U$. Так как $A \cap B \neq \varnothing$, то $B \cap U \neq \varnothing$. Из предложения 10.8 вытекает, что $B \subset U$. Следовательно, $X = A \cap B \subset U$. $\square$

Предложение 10.5. *Пусть X пространство и для любых $x, y \in X$ существует связное $C \subset X$, такое что $x, y \in C$. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто-замкнутое подмножество X. Пусть $x \in U$. Для любого $y \in X$ существует связное $C \subset X$, для которого $x, y \in C$. Тогда $V = U \cap C$ открыто-замкнуто в связном пространстве C и $x \in V \neq \varnothing$. Следовательно, $V = C$ и $y \in V \subset U$. Получаем, что $U = C$. $\square$

Предложение 10.6. *Пусть X пространство и $\mathcal{C}$ есть некоторое семейство связных подмножеств X. Если $A \cap B \neq \varnothing$ для $A, B \in \mathcal{C}$, то множество $\bigcup \mathcal{C}$ связно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in C = \bigcup \mathcal{C}$. Тогда $x \in A$ и $y \in B$ для некоторых $A, B \in \mathcal{C}$. Из предложения 10.4 вытекает, что $D = A \cup B$ связно. По построению, $x, y \in D$. Из предложения 10.5 вытекает, что X связно. $\square$

Теорема 10.7. *Пусть X пространство и $Y \subset X = \overline{Y}$ всюду плотное связное подпространство. Тогда X связно.*

Доказательство. Пусть U непустое открыто-замкнутое подмножество X. Так как Y всюду плотно, то $V = Y \cap U \neq \varnothing$ непусто. Так как V непусто и открыто-замкнуто в Y, то из связности Y, в силу предложения 10.1, вытекает, что $V = Y$. Следовательно, $Y \subset U$. Так как U замкнуто и Y всюду плотно, то $U = X$. Из предложения 10.1 вытекает, что X связно. $\square$

Теорема 10.8. *Пусть X и Y связные пространства. Тогда произведение $X \times Y$ связно.*

Доказательство. Пусть $x = (a, b) \in X \times Y$ и $y = (c, d) \in X \times Y$. Положим $A = \{a\} \times Y$, $B = X \times \{d\}$ и $C = A \cup B$. Ток как A и B связны и $A \cup B \neq \varnothing$, то, в силу предложения 10.4, C связно. Так как $x, y \in C$, то из предложения 10.5 вытекает, что $X \times Y$ связно. $\square$

Теорема 10.9. *Отрезок вещественной прямой связен.*

Доказательство. Предположим, что отрезок $[a, b]$ несвязен. Пусть $[a, b] = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ есть разбиения отрезка $[a, b]$ на два непустых открыто-замкнутых в $[a, b]$ подмножества A и B. Пусть $a' \in A$ и $b' \in B$.

Будем считать $a' < b'$, случай $b' < a'$ вытекает из случая $a' < b'$. Положим $A' = [a', b'] \cap A$ и $B' = [a', b'] \cap B$. Тогда $a' \in A'$, $b' \in B'$, A' и B' есть разбиение отрезка $[a', b']$ два непустых открыто-замкнутых в $[a', b']$ множества. Пусть $m = \inf B'$. Тогда $m \in B'$ и $a' < m$. Так как $[a', m) \subset A'$ и A' замкнуто, то $m \in A'$. Получаем $m \in A' \cap B' \neq \varnothing$. Противоречие. $\square$

10.1.2 Компоненты и квазикомпоненты связности

Пусть X пространство. Определим два отношения эквивалентности $\sim_c$ и $\sim_q$ на пространстве X. Пусть $x, y \in X$.

Положим $x \sim_c y$ если существует связное $C \subset X$, для которого $x, y \in C$. Так как одноточечное пространство связно, то отношение $\sim_c$ рефлексивно, то есть $x \sim_c x$. Ясно, отношение $\sim_c$ симметрично. Транзитвность $\sim_c$ вытекает из предложения 10.4. Класс эквивалентности по отношению $\sim_c$, содержащий точку x, обозначим через C_x. Множество C_x называется *компонентой связности* точки x.

Положим $x \sim_q y$ если выполняется условие: если U открыто-замкнутое подмножество X и $x \in U$, то $y \in U$. Непосредственно проверяется, что $\sim_q$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности по отношению $\sim_q$, содержащий точку x, обозначим через Q_x. Множество Q_x называется *квазикомпонентой связности* точки x.

Утверждение 10.10. *Компонента связности C_x является наибольшим связным множеством, содержащим x. Компонента связности C_x замкнута.*

Доказательство. Положим $\mathcal{C} = \{C \subset X : x \in C$ и C связно $\}$. Тогда $C_x = \bigcup \mathcal{C}$. Из предложения 10.6 вытекает, что C_x связно и, следовательно, $C_x \in \mathcal{C}$. Получаем, что C_x является наибольшим связным множеством, содержащим x. Из теоремы 10.7 вытекает, что $\overline{C_x}$ связно и $\overline{C_x} \in \mathcal{C}$. Следовательно $\overline{C_x} = C_x$ и C_x связно. □

Утверждение 10.11. *Компонента квазисвязности Q_x является пересечением открыто-замкнутых множеств, содержащим x. Квазикомпонента связности Q_x замкнута.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x. Положим $Q = \bigcap \mathcal{U}$. Если $y \in Q$, то $x \sim_q y$. Следовательно, $y \in Q_x$. Получаем $Q \subset Q_x$. Пусть $y \notin Q$. Тогда $x \in U \not\ni y$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Следовательно, $x \not\sim_q y$. Получаем $Q_x \subset Q$. Следовательно, $Q = Q_x$. Как пересечение замкнутых множеств, Q замкнуто. □

Утверждение 10.12. $C_x \subset Q_x$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x. Тогда, в силу утверждения 10.11, $Q_x = \bigcap \mathcal{U}$. Из утверждения 10.10 вытекает, что C_x связно. Пусть $U \in \mathcal{U}$. Из предложения 10.8 вытекает, что $C_x \subset U$. Следовательно $C_x \subset Q_x$. □

Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

Теорема 10.13. *Пусть X топологическая пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X локально связное пространство;*

(2) *для любой точки $x \in X$ компонента связности C_x открыто-замкнута и совпадает с квазикомпонентой Q_x;*

(3) *существует база X, состоящая из связных множеств.*

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). В силу утверждения 10.10, компонента связности C_x замкнута и связна.

Пусть $y \in C_x$. Так как X локально связно, то существует связная окрестность V точки y. Из предложения 10.4 вытекает, то $C_x \cup V$ связно. Тогда, в силу утверждения 10.10, $C_x \cup V \subset C_x$, то есть $V \subset C_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества C_x. Мы доказали, что C_x открыто.

Компонента связности C_x открыто-замкнута. Из утверждения 10.11 вытекает $Q_x \subset C_x$. Из утверждения 10.12 вытекает $C_x \subset Q_x$. Следовательно, $C_x = Q_x$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Докажем, что все открытые связные подмножества X образуют базу X. Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x. Подпространство V локально связно, поэтому, в силу (2), компонента связности C точки x в V открыта в V и связна. Тогда V открытая связная окрестность точки x, для которой $V \subset U$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\square$

Теорема 10.14. *Пусть X хаусдорфово компактное пространство. Тогда $C_x = Q_x$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. В силу утверждений 10.10 и 10.12, достаточно показать, что Q_x связно. Предположим противное. Квазикомпонета связности Q_x замкнуты (утверждение 10.11). Пусть $Q_x = P \cup F$, $P \cap F = \varnothing$ и $x \in P$ для некоторых замкнутых непустых $P, F \subset X$.

Так как X нормальное пространство (теорема 5.8), то существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V множеств P и F. Множества $W = U \cup V$ является открытой окрестностью множества Q_x.

Лемма 1. *Существует открыто-замкнутое $O \subset X$, такое что $Q_x \subset O \subset W$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x. Семейство $\mathcal{U}$ является базой фильтра и, в силу утверждения 10.11, $Q_x = \bigcap \mathcal{U} \subset W$. Из предложения 6.17 вытекает, что $Q_x \subset O \subset W$ для некоторого $O \in \mathcal{U}$. $\square$

Множество $S = O \cap U$ открыто. Так как $S = O \cap \overline{U}$, то S замкнуто. Тогда множество S открыто замкнуто и

$$x \in P \subset S \subset U \subset X \backslash F.$$

Из утверждения 10.11 вытекает, что $Q_x \subset S$. Противоречие с $\varnothing \neq F \subset Q_x$. $\square$

Пример 10.15. Определим пространство X как подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$. Прямая l_0 — прямая $x = 0$. Прямая l_1 — прямая $x = 1$. Для целых $n \geqslant 3$, обозначим через P_n прямоугольник (периметр прямоугольника) со сторонами на прямых: $x = \frac{1}{n}$, $x = 1 - \frac{1}{n}$, $y = n$, $y = -n$. Положим

$$X = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} P_n.$$

Пространство X локально компактно.

Найдем квазикомпоненту Q_O точки $O = (0,0)$. Пусть U открыто-замкнутое подмножество X, содержащие O. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $P_n \cap U \neq \varnothing$ для $n > m$. Так как множества l_0 и P_n связны, то $l_0 \subset U$ и $P_n \subset U$ для $n > m$. Положим $M = l_0 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n$. Тогда

$$U_m = \overline{M} = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n \subset U.$$

Множество U_m открыто-замкнуто. Следовательно,

$$Q_O = \bigcap_{m=4}^{\infty} U_m = l_0 \cup l_1.$$

Квазикомпонента Q_O отличается от компоненты точки O, так как Q_O несвязно.

10.1.3 Линейно связные пространства

Пусть X пространство. Обозначим через $\mathbb{I}$ отрезок $[0,1]$.

Непрерывное отображение $\varphi\colon \mathbb{I} \to X$ называется *путём* в пространстве X. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ. Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлёй*. Будем говорить, что путь φ *соединяет точки* $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём.

Предложение 10.16. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. ... □

Введем отношение $\sim_l$ на пространстве X. Пусть $x, y \in X$. Положим $x \sim_l y$ если существует путь φ в пространстве X, такое что x начало пути φ и y конец пути φ.

Утверждение 10.17. *Отношение $\sim_l$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in X$.

Проверим рефлексивность $\sim_l$: $x \sim_l x$. Положим $\varphi(t) = x$ для $t \in \mathbb{I}$. Путь φ соединяет x с x.

Проверим симметричность $\sim_l$: если $x \sim_l y$, то $y \sim_l x$. Пусть φ есть путь, который соединяет x и y. Положим $\psi(t) = \varphi(1-t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Тогда ψ соединяет y и x.

Проверим транзитивность $\sim_l$: если $x \sim_l y$ и $y \sim_l z$, то $x \sim_l z$. Пусть путь φ соединяет x с y и путь ψ соединяет y с z. Положим

$$\theta(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & \text{для } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \psi(2(t - \frac{1}{2})), & \text{для } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

для $t \in \mathbb{I}$. Путь θ соединяет x с z. □

Класс эквивалентности по отношению эквивалентности $\sim_l$ называется *компонентой линейной связности*. Компонента линейной связности, содержащая точку x, обозначим L_x.

Утверждение 10.18. *Компонента линейной связности L_x линейно связна.*

Доказательство. ... □

Утверждение 10.19. $L_x \subset C_x$

Доказательство. ... □

Пространство X назовем *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует линейно связная окрестность V, такая что $x \in V \subset U$.

Теорема 10.20. *Пусть X топологическая пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *X локально линейно связное пространство;*

(2) *для любой точки $x \in X$ компонента линейной связности L_x открыто-замкнута и совпадает с компонентой C_x и квазикомпонентой Q_x;*

(3) *существует база X, состоящая из линейно связных множеств.*

Доказательство. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $y \in L_x$. Так как X локально линейно связно, то существует линейно связная окрестность V точки y. Тогда $L_x \cup V$ линейно связно. Тогда $L_x \cup V \subset L_x$, то есть $V \subset L_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества L_x. Мы доказали, что L_x открыто. Каждый класс эквивалентности $\sim_l$ открыт. Следовательно, множество $L_x = X \setminus \bigcup\{L_y : y \in X \setminus L_x\}$ замкнуто.

Компонента линейной связности L_x открыто-замкнута. Из утверждения 10.11 вытекает $Q_x \subset L_x$. Из утверждений 10.12 и 10.19 вытекает $L_x \subset C_x \subset Q_x$. Следовательно, $L_x = C_x = Q_x$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Докажем, что все открытые линейно связные подмножества X образуют базу X. Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x. Подпространство V локально линейно связно, поэтому, в силу (2), компонента линейной связности L точки x в V открыта в V и линейно связна. Тогда V открытая линейно связная окрестность точки x, для которой $V \subset U$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. □

10.1.4 Вполне не связные и нульмерные пространства

T_1-Пространство X называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

Предложение 10.21. *Нульмерное пространство вполне регулярно.*

Доказательство. ... □

Предложение 10.22. *Нульмерное пространство вполне несвязно.*

Доказательство. ... □

Предложение 10.23. (1) *Подпространство нульмерного пространства нульмерно.*

(2) *Подпространство вполне несвязного пространства вполне несвязно.*

(3) *Произведение нульмерных пространств нульмерно.*

(4) *Произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.*

Доказательство. ... □

Предложение 10.24. *Пространство X вполне несвязно если и только если $C_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. ... □

Теорема 10.25. *Вполне несвязное компактное хаусдорфово пространство нульмерно.*

Доказательство. Из предложения 10.24 и теоремы 10.14 вытекает, что $Q_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.

Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $\mathcal{B}_x$ есть семейство открытых-замкнутых множеств, содержащих точку x. Тогда $\{x\} = Q_x = \bigcap \mathcal{B}_x$. Семейство $\mathcal{B}_x$ является базой фильтра, состоящей замкнутых множеств. Из предложения 6.17 вытекает, что $O \subset U$ для некоторого $O \in \mathcal{B}_x$. □

10.2 Дополнение

10.3 Задачи

Глава 11

Кривые

11.1 Кривые

11.1.1 Деревья

Частично упорядоченное множество $(T, <)$ называется *деревом*, если для каждого $x \in X$ множество

$$\mathsf{pr}(x, T) = \{y \in T \,:\, y < x\}$$

всех *предшественников* элемента x является вполне упорядоченной цепью. Элементы дерева называются *узлами*. Минимальные элементы T называются *корнями*. Максимальные элементы T называются *терминальным* узлами, то есть x терминальный узел, если $\{y \in T \,:\, x < y\} = \varnothing$.

Два узла $x, y \in T$ называются *сравнимыми* если либо $x < y$, либо $x = y$, либо $y < x$.

Порядковый тип $\mathsf{Ord}(\mathsf{pr}(x, T))$ предшественников $\mathsf{pr}(x, T)$ узла x называется *высотой* x. Для ординала α, обозначим через $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ множество всех узлов в T высоты α. Множество $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ называется *α-уровень дерева T*. *Высотой* дерева T называется минимальный ординал α, для которого α-уровень $\mathsf{Lv}_\alpha(T)$ пуст.

> Понятие дерева встречается в разных разделах математики, информатики и программировании. Терминология в разных разделах и в работах разных авторов отличается. В теории графов узлы называются вершинами, а терминальные узлы листьями.

Подмножество $S \subset T$ называется *поддеревом*, если $\mathsf{pr}(x, T) \subset S$ для $x \in S$. Отметим, что $\mathsf{pr}(x, T) = \mathsf{pr}(x, S)$ и высота узла x в T и S совпадают для $x \in S$.

Индукция по дереву

Метод индукции построения и доказательства распространяется на случай, когда индексное множество является деревом.

Пусть T дерево и $P(t)$ есть некоторое утверждение для каждого $t \in T$. Предположим мы доказали:

- База индукция. $P(t)$ верно для каждого корня t дерева T;

- Шаг индукция. Если $u \in T$ и $P(t)$ верно для каждого $t < u$, то $P(u)$ верно.

Тогда $P(t)$ верно для каждого $t \in T$.

Аналогично определяется построение индукцией по T.

Предположим мы построили:

- База индукция. Строим множество M_t для каждого корня t дерева T;

- Шаг индукция. Если $u \in T$ и построено M_t для каждого $t < u$, то тогда определяем M_u.

Тогда мы построили M_t для каждого $t \in T$.

Полные M-арные деревья

Пусть M есть множество. Обозначим

$$M^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} M^n.$$

Множество $M^{<\omega}$ состоит из конечных последовательностей элементов из M. Обозначим через $\mathsf{lt}(x)$ длину n последовательности $u \in M^n$. Нулевая степень M^0 состоит из пустой последовательности длины ноль — $\varnothing$.

Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in M^n \subset M^{<\omega}$. Обозначим

$$u{\restriction}m = (u_0, ..., u_{m-1})$$

для $m \leqslant n$ — *начальный сегмент* последовательности u длины m.

Введем частичный порядок на множестве $M^{<\omega}$. Пусть $v, u \in M^{<\omega}$. Положим $v < u$, если v является начальным сегментом u и $\mathsf{lt}(v) < \mathsf{lt}(u)$. Другими словами, $v < u$, если $v = u{\restriction}n$ для некоторого $n < \mathsf{lt}(u)$.

Если $v < u$, то будем также говорить, что *u продолжает v*.

Множество $\{v \in M^{<\omega} : v < u\}$ является конечной цепью для $u \in M^{<\omega}$. Следовательно, $M^{<\omega}$ является деревом. Высота дерева $M^{<\omega}$ равна ω.

Дерево $M^{<\omega}$ называется *полным M-арным* деревом. В дереве $M^{<\omega}$ есть единственный корень, пустая последовательность $() = \varnothing \in M^0$. Высота узла из $M^{<\omega}$ совпадает с длиной. Для $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in M^n$ и $x \in M$ обозначим

$$u^\frown x = (u_0, ..., u_{n-1}, x) \in M^{n+1}.$$

Бесконечная последовательность $s = (s_0, s_1, ...) \in M^\omega$ называется *бесконечной ветвью* дерева T, если $s{\restriction}n = (s_0, s_1, ..., s_{n-1}) \in T$ для всех $n \in \omega$. Множество всех бесконечных ветвей называется *телом* дерева T и обозначается как $[T]$.

Для $s \in [T]$ и $u \in T$, будем говорить *u является начальным сегментом s* или *s продолжает s*, если $u = s{\restriction}n$ для $n = \mathsf{lt}(u)$.

Продолжим частичный порядок с T на $T \cup [T]$. Различные элементы из $[T]$ попарно не сравнимы. Если $u \in T$ и $s \in [T]$, то $u < s$ если s продолжает u. Относительно этого порядка, множество $T \cup [T]$ является деревом, в котором T поддерево $T \cup [T]$ и $[T]$ является ω-уровнем дерева $T \cup [T]$.

> Данное определение ветвей дерева соответствует использованию деревьев в дискриптивной теории множеств. В других разделах математики, ветвь дерева — максимальная цепь в дереве. Бесконечные ветви в нашем контексте также называются ветвь сквозь дерево или путь сквозь дерево. *Ветвь сквозь дерево* — это ветвь, длина (порядковый тип) которой совпадает с высотой дерева.

11.1.2 Пространство Бэра

Поддеревья полного ω-арного дерева $\omega^{<\omega}$ назовем *дескриптивными деревьями.*

Пусть T есть дескриптивное дерево. Для $u \in T$, обозначим

$$W(u, T) = \{s \in [T] \,:\, u < s\}.$$

Несложно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 11.1. *Пусть $v, u \in T$. Тогда*

(1) *если $v < u$, то $W(v, T) \supset W(u, T)$;*

(2) *если v и u несравнимы, то $W(v, T) \cap W(u, T) = \varnothing$.*

Обозначим

$$\mathcal{B}_T = \{W(u, T) \,:\, u \in T\}.$$

Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X называется *неархимедовым*, если для любых $U, V \in \mathcal{M}$, либо $U \cap V = \varnothing$, либо $U \subset V$, либо $V \subset U$.

Утверждение 11.2. *Семейство $\mathcal{B}_T$ является неархимедовым семейством. Семейство $\mathcal{B}_T$ является базой топологии.*

Доказательство. Из утверждения 11.1 вытекает, что $\mathcal{B}_T$ является неархимедовым семейством.

Так как $W(\varnothing, T) = T$, то $\mathcal{B}_T$ покрытие $[T]$. Пусть $U, V \in \mathcal{B}_T$ и $U \cap V \neq \varnothing$. Так как $\mathcal{B}_T$ неархимедово семейство, то либо $U \subset V$, либо $V \subset U$. Следовательно, $U \cap V \in \mathcal{B}_T$. □

На множестве $[T]$ будем рассматривать топологию, которая определяется с помощью базы топологии $\mathcal{B}_T$.

Метрика ρ на множестве X называется *неархимедовой*, если

$$\rho(x, z) \leqslant \max \rho(x, y), \rho(y, z)$$

для любых $x, y, z \in X$. Метрика ρ является неархимедовой если и только если семейство всех шаров является неархимедовым.

Определим на множестве $[T]$ неархимедову метрику ρ_T. Пусть $s = (s_n)_n \in [T]$ и $q = (q_n)_n \in [T]$. Положим $\rho_T(s, q) = 0$ если $s = q$. Если $s \neq q$ и $n = \min i \in \omega : s_i \neq q_i$, то положим

$$\rho_T(s, q) = \tfrac{1}{2^n}.$$

Утверждение 11.3. *ρ_T является неархимедовой метрикой, которая задает топологию $[T]$.*

Доказательство. Так как

$$B_{\rho_T}(s, \tfrac{1}{2^n}) = W(s{\restriction}n + 1, T)$$

для $s \in [T]$, то семейство всех шаров относительно ρ_T совпадает с неархимедовым семейством $\mathcal{B}_T$. Следовательно, ρ_T является неархимедовой метрикой, которая задает топологию $[T]$. $\square$

Пространство $[\omega^{<\omega}] = \omega^\omega$ называется *пространством Бэра.* Обозначим $\rho_B = \rho_{\omega^{<\omega}}$.

Из определения метрики ρ_T вытекает следующее утверждение.

Утверждение 11.4. $\rho_T = \rho_B|_{[T]}$. *Топология $[T]$ является топологией подпространства пространства Бэра ω^ω.*

Предложение 11.5. *Топология пространство Бэра ω^ω является топологией произведения ω^ω, где на ω рассматривается дискретная топология.*

Доказательство. Пусть $u = (u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \in \omega^{<\omega}$. Тогда базисная окрестность $W(u, \omega^{<\omega})$ пространства Бэра совпадает с базисной окрестностью $\prod_{i=0}^{\infty} U_i$ произведения ω^ω с топологией произведения, где $U_i = \{u_i\}$ для $i < n$ и $U_i = X$ для $i \geqslant n$. $\square$

Утверждение 11.6. *Пространство $[T]$ замкнуто в ω^ω.*

Доказательство. Пусть $s \in \omega^\omega \backslash [T]$. Тогда $u = s{\restriction}n \notin T$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда $W(u, \omega^{<\omega}) \cap T = \varnothing$. Следовательно, $s \in \operatorname{Int}(\omega^\omega \backslash [T])$. $\square$

Обозначим

$$\widetilde{T} = \{s{\restriction}n \, : \, s \in [T], \; n \in \omega\}.$$

Дерево $\widetilde{T}$ называется *усечением* дерева T.

Утверждение 11.7. $[T] = [\widetilde{T}]$.

Доказательство. Так как $\widetilde{T} \subset T$, то $[\widetilde{T}] \subset [T]$. Докажем обратное включение. Пусть $s \in [T]$. Тогда $s{\restriction}n \in \widetilde{T}$ для $n \in \omega$. Следовательно $s \in [\widetilde{S}]$. $\square$

Дерево без терминальных узлов называется *обрезанным.* Обозначим

$$\mathsf{suc}(u, T) = \{x \in \omega \, : \, u^\frown x \in T\}$$

для $u \in T$.

Предложение 11.8. *Пусть T дескриптивное дерево. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *T обрезанное дерево;*

(2) $\mathsf{suc}(u, T) \neq \varnothing$ *для всех $u \in T$;*

(3) $W(u, T) \neq \varnothing$ *для всех $u \in T$;*

(4) $T = \widetilde{T}$.

Доказательство. Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из того, что узел $u \in T$ является терминальным, если и только если $\mathsf{suc}(u, T) = \varnothing$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in T$. Из (2) вытекает, что существует последовательность $u_n, u_{n+1}, ...$, такая что $s_m = (u_0, ..., u_{m-1}) \in T$ и $u_m \in \mathsf{suc}(s_m, T)$ для $m \geqslant n$. Тогда $s = (u_0, u_1, ...) \in [T]$ и $s \in W(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in T$ и $s = (u_m)_m \in W(u, T)$. Тогда $u_n \in \mathsf{suc}(u, T)$.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (4). По построению $T \supset \widetilde{T}$. Докажем $T \subset \widetilde{T}$. Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in T$. Из (3) вытекает, что $W(u, T) \neq \varnothing$. Пусть $s \in W(u, T) \subset [T]$. Тогда $u = s{\restriction}n$. Следовательно $u \in \widetilde{T}$.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1}) \in T$. Из (4) вытекает, что $u \in \widetilde{T}$. Следовательно, $u = s{\restriction}n$ для некоторого $s \in [T]$. Следовательно $s \in W(u, T)$. □

Дерево T называется *совершенным*, если для любого $x \in T$ существуют несравнимые $u, v \in T$, для которых $x < u$ и $x < v$.

Из определений вытекает вытекает следующие утверждение.

Предложение 11.9. *Совершенное дерево является обрезанным.*

Пространство X называется *совершенным*, если в X нет изолированных точек.

Предложение 11.10. *Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T совершенно если и только если дерево T совершенно.*

Доказательство. Докажем ($\Rightarrow$). Пусть $u \in T$. Так как T обрезано (предложение 11.9), то из предложения 11.8 вытекает, что $W(u, T) \neq \varnothing$. Так как $[T]$ совершенное пространство, то $|W(u, T)| > 1$. Пусть $s, q \in W(u, T)$ различные элементы. У s и q есть непересекающиеся окрестности $W(s', T)$ и $W(q', T)$, лежащие в $W(u, T)$. Тогда s' и q' больше u и несравнимы.

Докажем ($\Leftarrow$). Достаточно доказать, что $|W(u, T)| > 1$ для $u \in T$. Пусть $a, b \in T$ больше u и несравнимы. Тогда $W(a, T), W(b, T) \subset W(u, T)$, $W(a, T)$ и $W(b, T)$ не пусты (предложение 11.8), $W(a, T) \cap W(b, T) = \varnothing$ (утверждение 11.1). □

Дерево T называется *компактным*, если T обрезанное дерево и для любого $u \in T$ множество $\mathsf{suc}(u, T)$ конечно. Дерево T компактно если и только если T обрезанное дерево и каждый уровень в T конечен.

Предложение 11.11. *Пусть T обрезанное дескриптивное дерево. Тело $[T]$ дерева T компактно если и только если дерево T компактно.*

Доказательство. Пусть π_n есть проекция ω^ω на n-ю копию ω. Положим $L_n = \pi_n([T])$. Дескриптивное обрезанное дерево T компактно если и только если каждое L_n конечно.

Докажем ($\Rightarrow$). Так как проекция π_n непрерывна и $[T]$ компактно, то L_n конечно.

Докажем ($\Leftarrow$). Так как $[T] \subset \prod_{n \in \omega} L_n$, все L_n конечны и $[T]$ замкнуто в ω^ω (утверждение 11.7), то $[T]$ замкнутое подпространство компактного пространства $\prod_{n \in \omega} L_n$. Следовательно, $[T]$ компактно. □

11.1.3 A-системы

Пусть T есть дескриптивное дерево и X топологическое пространство. Отображение $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ называется *A-системой*.

> Стандартное определение A-системы: отображение из $\omega^{<\omega}$ в $\mathsf{Exp}(X)$. Отображение $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ можно продолжить до $\omega^{<\omega}$ в $\mathsf{Exp}(X)$: $\Phi(u) = \varnothing$ для $u \in \omega^{<\omega} \setminus T$.

Будем говорить, что *последовательность множеств* $(M_n)_n$ *сходится* к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует N, такое что $M_n \subset U$ для $n > N$.

Рассмотрим условия на Φ:

(A_1) $\Phi(v) \subset \Phi(u)$ для $v, u \in T$ и $v < u$;

(A_2) $\Phi(u)$ замкнуто в X для $u \in T$;

(A_3) для $s \in [T]$, пересечение $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s{\restriction}n)$ состоит из одной точки $\widehat{\Phi}(s)$ и последовательность множеств $(\Phi(s{\restriction}n))_{n\in\omega}$ сходится к точке $\widehat{\Phi}(s)$;

A-систему Φ назовем *непрерывной*, если выполняются условия (A_1), (A_2) и (A_3). Для $s \in [T]$, единственный элемент $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s{\restriction}n)$ обозначим через $\widehat{\Phi}(s)$.

Утверждение 11.12. *Если A-система Φ непрерывна, то отображение $\widehat{\Phi} : [T] \to X$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $s \in [T]$ и U окрестность точки $\widehat{\Phi}(s)$. Из (A_3) вытекает, что $\Phi(s{\restriction}n) \subset U$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда

$$\widehat{\Phi}(W(s{\restriction}n, T)) \subset \Phi(s{\restriction}n) \subset U.$$

□

Утверждение 11.13. *Предположим, что для A-системы Φ выполняется условия (A_1), (A_2) и следующие условие:*

(A_3^m) *существует полная метрика ρ на X, которая порождает топологию X, последовательность $(\varepsilon_n)_n$ положительных чисел, сходящаяся к 0, такие что*

$$\mathrm{diam}_\rho(\Phi(u)) < \varepsilon_n$$

для $u \in T$ и $n = \mathsf{lt}(u)$.

Тогда Φ непрерывно.

Доказательство. Проверим условие (A_3).

... □

Утверждение 11.14. *Предположим, что для A-системы Φ выполняется условия (A_1), (A_2) и следующие условие:*

(A_3^c) *пространство X является хаусдофовым компактом и $\bigcap_{n\in\omega} \Phi(s{\restriction}n)$ состоит не более чем из одной точки.*

Тогда Φ *непрерывно.*

Доказательство. Проверим условие (A_3).
... $\square$

Утверждение 11.15. *Предположим, что* A*-операция* Φ *непрерывна и выполняется следующие условие:*

(A_4) *для* $u \in T$, $\Phi(u) = \bigcup\{\Phi(u^\frown l) : l \in \mathsf{suc}(u, T)\}$.

Тогда $\widehat{\Phi}([T]) = \Phi(\varnothing)$.

Доказательство. ... $\square$

Утверждение 11.16. *Предположим, что* A*-операция* Φ *непрерывна и выполняется следующие условие:*

(A_5) *для* $u \in T$, *семейство* $\{\Phi(u^\frown l) : l \in \mathsf{suc}(u, T)\}$ *является дискретным семейством;*

Тогда $F = \widehat{\Phi}([T])$ *замкнуто в* X *и отображение* $\widehat{\Phi} : [T] \to F$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. ... $\square$

11.1.4 Канторово множество и его непрерывные образы

Обозначим $\mathbf{2} = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ — дискретное двоеточие. Полное $\mathbf{2}$-арное дерево $\mathbf{2}^{<\omega}$ называется *канторовым* деревом.

Лемма 11.17. *В метризуемом нульмерном компактном пространство семейство открыто-замкнутых множеств не более чем счетно.*

Доказательство. ... $\square$

Теорема 11.18. *Любое метризуемое совершенное нульмерно компактное пространство* X *гомеоморфно* $\mathbf{2}^\omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ все открыто-замкнутые подмножества X. Из леммы 11.17 вытекает, что $\mathcal{B}$ счетно. Пусть $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$.

Определим A-систему $\Phi : \mathbf{2}^{<\omega} \to \mathsf{Exp}(X)$. Положим $\Phi(\varnothing) = X$. Предположим, что построено открыто-замкнутое непустое $\Phi(u) \subset X$ для $u \in \mathbf{2}^{<\omega}$. Пусть

$$n = \min\{m \in \omega : F(u) \cap U_m \neq \varnothing \text{ и } F(u) \backslash U_m \neq \varnothing\}.$$

Положим $\Phi(u^\frown 0) = F(u) \cap U_n$ и $\Phi(u^\frown 0) = F(u) \backslash U_n$. Построение завершено.

Проверим, что Φ непрерывно. Условия (A_1) и (A_2) очевидны. Проверим условие (A_3^c) утверждения 11.14. ... Из утверждения 11.14 вытекает, что Φ непрерывно.

По построению, для Φ выполняется условия (A_4) и (A_5) утверждений 11.15 и 11.16. Из этих утверждений вытекает, что $\widehat{\Phi} : \mathbf{2}^\omega \to X$ является гомеоморфизмом. $\square$

В частности, $\mathbf{2}^\omega$ гомеоморфно канторовому множеству. Часто пространство $\mathbf{2}^\omega$ также называют канторовым множеством.

Теорема 11.19. *Любое метризуемое компактное пространство X является непрерывным образом $\mathbf{2}^{\omega}$.*

Доказательство. ... □

11.1.5 Непрерывные образы отрезка

Пусть T дискриптивное дерево. Линейно упорядочим n-ый уровень $\mathsf{Lv}_n(T)$ дерева T. Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1})$ и $v = (v_0, ..., v_{n-1})$ различные элементы $\mathsf{Lv}_n(T)$. Положим $u < v$ если $u_{<} v_k$, где $k = \min\{i \in \{0, ..., n-1\} : u_i \neq v_i\}$.

Два элемента a и b линейно упорядоченного множества L назовем *соседними*, если между a и b нет других элементов L.

Теорема 11.20. *Пусть T компактное дескриптивное дерево, X пространство, $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ непрерывная A-система, для которой выполняется условие:*

(A_6) *для $n \in \omega$, $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \varnothing$ для любых соседних $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$.*

Тогда существуют непрерывные отображения $f\colon [T] \to [0,1]$ и $g\colon [0,1] \to X$, такие что $\widehat{\Phi} = g \circ f$.

Доказательство. ... □

Теорема 11.21. *Пусть T компактное дескриптивное дерево, X пространство, $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ непрерывная A-система, для которой выполняется условие:*

(A_7) *для $n \in \omega$ и $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$, $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \varnothing$ если и только если u и v соседние элементы в $\mathsf{Lv}_n(T)$.*

Тогда существуют непрерывное отображения $f\colon [T] \to [0,1]$ и топологическое вложение $g\colon [0,1] \to X$, такие что $\widehat{\Phi} = g \circ f$.

Доказательство. ... □

11.1.6 Фракталы

11.1.7 Локально связные полные метрические пространства

11.2 Дополнение

11.3 Задачи

Литература