

Теория игр в топологии

Е.А.Резниченко

Москва

- 1 Полные метрические пространства
- 2 Пространство Бэра
- 3 Последовательные игры

Пусть (X, d) есть метрическое пространство,

$$\mathfrak{F}(X) = \{(x_n)_n \in X^\omega : (x_n)_n \text{ есть} \\ \text{фундаментальная последовательность}\}$$

есть множество фундаментальных последовательностей X .

Введем на $\mathfrak{F}(X)$ отношение:

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Отношение \sim является отношением эквивалентности.

Предложение 1.

Для $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathfrak{F}(X)$ существует предел

$$\tilde{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Если $(x_n)_n \sim (x'_n)_n$ и $(y_n)_n \sim (y'_n)_n$, то

$$\tilde{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \tilde{d}((x'_n)_n, (y'_n)_n).$$

Множество

$$[(x_n)_n] = \{(x'_n)_n \in \mathfrak{F}(X) : (x_n)_n \sim (x'_n)_n\}$$

есть класс эквивалентности, содержащий $(x_n)_n$. Положим

$$\hat{X} = \{[\xi] : \xi \in \mathfrak{F}(X)\}.$$

Для $\xi, \zeta \in \mathfrak{F}(X)$ положим

$$\hat{d}([\xi], [\zeta]) = \tilde{d}(\xi, \zeta).$$

Предложение 2.

Функция $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ корректна определена, \hat{d} является полной метрикой.

Для $x \in X$ обозначим через $s(x)$ стационарную последовательность $(x_n)_n$, у которой $x_n = x$ для всех n .

Предложение 3.

Отображение

$$i : X \rightarrow \widehat{X} : x \mapsto [s(x)].$$

является изометрическим вложением метрического пространства (X, d) в полное метрическое пространство (\widehat{X}, \hat{d}) , то есть $\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Кроме того, $i(X) \subset \widehat{X} \subset \overline{i(X)}$.

Обычно отождествляют X и $i(X)$, тогда (\widehat{X}, \hat{d}) является полным метрическим расширением (X, d) , $\overline{X} = \widehat{X}$, которое называется *пополнением метрического пространства X по метрике d* .

Предложение 4.

Пусть (X, d) полное метрическое пространство,
 $G = \bigcap_n U_n \subset X$, где U_n открыто в X ,

$$f_n(x) = d(x, X \setminus U_n) = \inf\{d(x, y) : y \in X \setminus U_n\}$$

для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$,

$$\rho_n(x, y) = \min \left\{ 1, \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f_n(y)} \right| \right\},$$

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x, y).$$

для $x, y \in G$. Тогда метрика ρ полна и задает ту же топологию на G что и метрика d

Предложение 5.

G_δ подмножество полного метрического пространства метризуемо полной метрикой.

Предложение 6.

Если $Y \subset X \subset \bar{Y}$ и Y метризуемо полной метрикой, то Y множество типа G_δ в X .

Предложение 7.

Если $Y \subset X$, Y метризуемо полной метрикой и X метризуемо, то Y множество типа G_δ в X .

Пространство X называется *абсолютной* G_δ , если для любого расширения Y , $X \subset Y \subset \overline{X}$, множество X множеством типа G_δ в Y .

Из предложений 3, 5 и 6 вытекает

Предложение 8.

Метризуемое пространство X метризуемо полной метрикой если и только если X является абсолютной G_δ .

Theorem 1.1.

Пусть X есть метризуемое пространство, $M \subset X$. Игра $BM(X, M)$ α -благоприятна если и только если существует открытое непустое $U \subset X$ и абсолютное G_δ подмножество $G \subset M$, так что $G \subset U \subset \overline{G}$.

Множество $M \subset X$ называется *детерминированным*, если игра Банаха-Мазура $BN(X, M)$ детерминированна, то есть либо α есть выигрышная стратегия либо β есть выигрышная стратегия.

Предложение 9.

Если X является полным метрическим пространством без изолированных точек, $M \subset X$. Если M является детерминированным множеством, то либо M либо в $X \setminus M$ есть подмножество G типа G_δ без изолированных точек.

Предложение 10.

Если X является полным метрическим пространством без изолированных точек то X содержит $Y \subset X$, гомеоморфное канторову множеству \mathbb{C} .

Множество Берштейна

Множество $M \subset X$ называется *множеством Берштейна*, если $P \cap M \neq \emptyset$ и $P \setminus M \neq \emptyset$ для любого несчетного замкнутого нигде не плотного множества $P \subset X$. Дополнение $X \setminus M$ до множества Берштейна M также является множеством Берштейна.

Предложение 11.

Существует множество Берштейна $M \subset X = \mathbb{I} = [0, 1]$.

Для любого $Y \subset \mathbb{I}$, гомеоморфное канторову множеству \mathbb{C} , Y замкнуто и нигде не плотно в \mathbb{I} . Следовательно, $Y \cap M \neq \emptyset$ и $Y \setminus M \neq \emptyset$ для множества Берштейна M .

Предложение 12.

Множество Берштейна $M \subset \mathbb{I}$ не является детерминированным множеством.

Пусть X множество.

Метрическое пространство $B(X) = (X^\omega, d)$ называется пространством Бэра, где

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ \frac{1}{n+1} & n = \min\{m : x_m \neq y_m\} \end{cases}$$

где $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in X^\omega$.

Положим

$$X^{<\omega} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n,$$

где $X^0 = \{\emptyset\}$.

Пусть $x = (x_k)_k \in X^m$, $y = (y_k)_k \in X^l$, $n \leq m < \omega$, $l < \omega$.

Положим

$$x|_n = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$
$$x \frown y = (x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_l)$$

Введем порядок на $X^{<\omega}$,

$$x \prec y$$

если и только если $l \leq m$ и $y = x|_l$.

Положим $U(X, x) = \{z \in B(X) : x \succ z\} = \{z \in X^\omega : x = z|_m\}$
для $x \in X^{<\omega}$.

Предложение 13.

Множества вида $U(X, x)$, $x \in X^{<\omega}$ образуют базу в $B(X)$.

Предложение 14.

$(B(X), d)$ является полным метрическим пространством.

Предложение 15.

Отображение

$$f : B(\{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{C} \subset [0, 1] : (x_0, x_1, \dots) \mapsto 2 \cdot (x_0 x_1 \dots)_3$$

гомеоморфно отображает $B(\{0, 1\})$ на канторово множество \mathbb{C} .

Предложение 16.

Пусть $\mathbb{P}_+ = \mathbb{P} \cap (0, +\infty)$. Отображение

$$\begin{aligned} f : B(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{P}_+ : (x_0, x_1, \dots) \mapsto [x_0; x_1, x_2, x_3, \dots] = \\ = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \dots}}} \end{aligned}$$

гомеоморфно отображает $B(\mathbb{N})$ на положительные иррациональные числа \mathbb{P}_+ .

Ориентированный граф

Пусть X множество. Любое отношение $R \subset X \times X$ можно трактовать как *ориентированный граф*. Пара $(x, y) \in R$ можно воспринимать как *дугу* от *вершины* x к вершине y . Множество всех подмножеств множества X обозначим через 2^X . Отношению R соответствует отображение $X \rightarrow 2^X$: $R(x) = \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Вершина x называется *терминальной* (концевой узел, лист) если $R(x) = \emptyset$.