

Теория игр в топологии

Е.А.Резниченко

Москва

1 Игра Банаха-Мазура

Theorem 1.1.

Если $BM(X, M)$ β -благоприятна, то M тощее.

Пусть s выигрышная стратегия β . Положим $\mathcal{B}_{-1} = \{X\}$;
Построим последовательность семейств открытых множеств

$$\mathcal{B}_{-1}, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \dots$$

Так что

- 1 \mathcal{B}_n дизъюнктивные семейства;
- 2 $\overline{\bigcup \mathcal{A}_n} = \bigcup \overline{\mathcal{B}_n} = X$;
- 3 \mathcal{B}_n вписанно в \mathcal{A}_n , \mathcal{A}_{n+1} вписанно в \mathcal{B}_n : заданы отображения $\varphi_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}$, $\psi_n : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ таким образом, что
 - (a) если $U_n \in \mathcal{A}_n$, то $U_n \subset \varphi_n(U_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$;
 - (b) если $V_n \in \mathcal{B}_n$, то $V_n \subset \psi_n(V_n) \in \mathcal{A}_n$.

4 пусть

- (a) $\mathfrak{A}_n = \{(U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n) : U_i \in \mathcal{A}_i \text{ для } i \leq n, V_i \in \mathcal{B}_i \text{ для } i < n, \varphi_i(U_i) = V_{i-1} \text{ для } 0 < i \leq n, \psi_i(V_i) = U_i \text{ для } i < n\} =$
 $\{(U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n) : (U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}) \in \mathfrak{B}_{n-1} \text{ и } \varphi_n(U_n) = V_{n-1}\}$;
- (b) $\mathfrak{B}_n = \{(U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n, V_n) : (U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n) \in \mathfrak{A}_n \text{ и } \psi_n(V_n) = U_n\}$;

Тогда $s(U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n) = V_n$ для $(U_0, V_0, U_1, \dots, V_{n-1}, U_n, V_n) \in \mathfrak{B}_n$.

Обозначения:

$$\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$$

$$\bar{x} \hat{\wedge} \bar{y} = (x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_l)$$

$$\mathcal{A}_0^* = \mathcal{A}_0$$

$$\mathcal{A}_n^* = \mathcal{B}_{n-1}^* \times \mathcal{A}_n$$

$$\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_l)$$

$$\bar{x} \hat{\wedge} x = (x_0, x_1, \dots, x_m, x)$$

$$\mathcal{B}_0^* = \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$$

$$\mathcal{B}_n^* = \mathcal{A}_n^* \times \mathcal{B}_n$$

- 1 \mathcal{B}_n дизъюнктивные семейства;
- 2 $\overline{\bigcup \mathcal{A}_n} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_n} = X$;
- 3 Заданы отображения $\varphi_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}$, $\psi_n : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ таким образом, что
 - (a) если $U_n \in \mathcal{A}_n$, то $U_n \subset \varphi_n(U_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$;
 - (b) если $V_n \in \mathcal{B}_n$, то $V_n \subset \psi_n(V_n) \in \mathcal{A}_n$.
- 4 пусть
 - (a) $\mathfrak{A}_n = \{ \tilde{U} \frown (V_{n-1}, U_n) \in \mathcal{A}_n^* : \tilde{U} \frown V_{n-1} \in \mathfrak{B}_{n-1} \text{ и } \varphi_n(U_n) = V_{n-1} \}$;
 - (b) $\mathfrak{B}_n = \{ \tilde{V} \frown (U_n, V_n) \in \mathcal{B}_n^* : \text{и } \psi_n(V_n) = U_n \}$;
 Тогда $s(\tilde{U}) = V_n$ для $\tilde{U} \frown V_n \in \mathfrak{B}_n$.

Пусть $\tau_*(V)$ — все непустые открытые подмножества $V \subset X$.
Индукцией по n . Положим $\mathfrak{B}_{-1} = \{X\}$. Пусть $n \geq 0$. Положим

$$\mathfrak{B} = \{s(\tilde{U} \cap V_{n-1} \cap U) : \tilde{U} \cap V_{n-1} \in \mathfrak{B}_{n-1}, U \in \tau_*(V_{n-1})\}.$$

\mathfrak{B} — π -база X .