

Теория игр в топологии

Е.А.Резниченко

Москва

1 Использование игр в топологии

2 Сети и базы

Рассмотрим общую схему, как игры используются в топологии.
То есть как используя игры доказывать теоремы в топологии.

Сравнительно несложно доказываются утверждения вида:

(1) $(P) \implies$ игра δ -благоприятна

Если в пространстве X выполняется некоторое свойство (P) , то X благоприятно для некоторого игрока $\delta \in P$ в некоторой топологической игре G .

Используем свойство (P) и строим выигрышную стратегию для игрока δ . Двойственное утверждение:

(2) игра δ -неблагоприятна $\implies (Q)$

Если X не благоприятна для δ в игре G , то для X выполняется свойство $(Q) = \neg(P)$.

Труднее доказывать утверждения вида

(3) $(P) \implies$ игра δ -неблагоприятна

Если в пространстве X выполняется свойство (P) , то X не благоприятно для игрока $\delta \in P$ в игре G .

(4) игра δ -благоприятна $\implies (Q)$

Если X благоприятна для δ в игре G , то для X выполняется свойство $(Q) = \neg(P)$.

Стандартная схема использования игр:

$$(A) \implies \text{что то про игры} \implies (B)$$

Либо первая либо вторая импликация будет вида (3) или (4).
То есть реализуется одна из схем:

$$(I) (A) \underset{(1)}{\implies} \text{игра } \delta\text{-благоприятна} \underset{(4)}{\implies} (B)$$

$$(II) (A) \underset{(3)}{\implies} \text{игра } \delta\text{-неблагоприятна} \underset{(2)}{\implies} (B)$$

Тут сложные импликации вида (3) и (4). Эти импликации двойственны.

Как доказывать (4)

Общая схема доказательства

(4) игра δ -благоприятна $\implies (Q)$

Играют игроки δ и κ . "Простой" способ доказательства (4) состоит в доказательстве

игра δ -благоприятна \implies игра κ -неблагоприятна $\implies (Q)$

Но такое доказательство не существенно облегчают доказательства $(A) \implies (B)$, так как сводит схему (I) к схеме (II).

Схема

$(A) \implies$ игра δ -благоприятна \implies игра κ -неблагоприятна $\implies (B)$

также используется, например, при доказательстве того что II является тучным пространством.

Более сложен но и более полезен способ:

- 1 Берем выигрышную стратегию s для игрока δ .
- 2 Строим специальным способом семейство стратегий $\{q_\alpha : \alpha \in A\}$ для игрока κ .
- 3 Получаем семейство партий $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$, выигрышных для игрока δ , $p_\alpha = p(s, q_\alpha)$.
- 4 Семейство партий $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ используем для доказательства свойства (Q).

Используем эту схему в характеристизации пространств, в которых игрок β выигрывает в игре Банаха Мазура.

Пусть X пространство и \mathcal{V} семейство непустых подмножеств X . Семейство \mathcal{V} называется

- 1 *сетью* X , если для любого $x \in X$ и окрестности $U \ni x$ существуют $V \in \mathcal{V}$, $x \in V \subset U$;
- 2 *π -сетью* X , если для любого открытого непустого $U \subset X$ существуют $V \in \mathcal{V}$, $V \subset U$;
- 3 *базой* X , если \mathcal{V} состоит из открытых множеств и является сетью X ;
- 4 *π -базой* X , если \mathcal{V} состоит из открытых множеств и является π -сетью X .

Семейство множеств \mathcal{P} называется *дизъюнктным семейством*, если $A \cap B = \emptyset$ для различных $A, B \in \mathcal{P}$.

Theorem 2.1.

Пусть X пространство и \mathcal{V} есть π -сеть. Тогда существует $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$, так что

- 1 $\overline{\bigcup \mathcal{P}} = X$;
- 2 семейство \mathcal{P} является дизъюнктным семейством.

Докажем теорему сначала для случая, когда множество \mathcal{V} счетно, $\mathcal{V} = \{M_n : n < \omega\}$. Построим $\mathcal{P} = \{M_{n_k} : k < \omega\} \subset \mathcal{V}$ с помощью индукции.

База индукции, $k = 0$. $n_0 = 0$.

Шаг индукции, $k > 0$. Пусть

$M = M_{n_0} \cup M_{n_0} \cup M_{n_1} \cup \dots \cup M_{n_{k-1}}$. Если $\overline{M} = X$, то положим $\mathcal{P} = \{M_{n_0}, M_{n_0}, M_{n_1}, \dots, M_{n_{k-1}}\}$ и теорема доказана.

Положим $U = X \setminus \overline{M} \neq \emptyset$, $N_k = \{i < \omega : M_i \subset U\}$. Так как \mathcal{V} есть сеть, то $N_k \neq \emptyset$. Положим $n_k = \min N_k = \min\{i : i \in N_k\}$. Последовательность n_k возрастающая.

Покажем, что $M = \bigcup \mathcal{P} = \bigcup_{k < \omega} M_{n_k}$ плотно в X , то есть $\overline{M} = X$. Предположим противное. Тогда $U = X \setminus \overline{M}$ открыто и не пусто. Так как \mathcal{V} есть π -сеть, то $M_l \subset U$ для некоторого $l < \omega$. Существует k , для которого $l < n_k$. Противоречие, так как $l \in N_k$ и $l < n_k = \min N_k$.

Существует несколько альтернативных формулировок леммы Цорна.

Основная: если в частично упорядоченном множестве M для всякого линейного упорядоченного подмножества существует верхняя грань, то в M существует максимальный элемент.

В приложениях наиболее удобна формулировка, утверждающая существование максимального элемента, который не меньше заданного: если всякая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M предшествует некоторому максимальному.

В оригинальной статье 1935 года Цорн сформулировал утверждение для множеств, частично упорядоченных по отношению включения: если семейство множеств \mathfrak{M} обладает тем свойством, что объединение любой цепи множеств из \mathfrak{M} есть снова множество из этого семейства, то \mathfrak{M} содержит максимальное множество.

Семейство $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}$ называется *цепью*, если для любых $A, B \in \mathcal{M}$ либо $A \subset B$ либо $B \subset A$.

Доказательство в общем случае.

Положим

$$\mathfrak{M} = \{M \subset \mathcal{V} : M \text{ есть дизъюнктное семейство}\}.$$

Объединение цепи в \mathfrak{M} снова будет дизъюнктным семейством, то есть будет принадлежать \mathfrak{M} . Применим лемму Цорна и возьмем $\mathcal{P} \in \mathfrak{M}$ максимальный элемент. Покажем, что $M = \bigcup \mathcal{P}$ плотно в X . Предположим противное. Пусть $U = X \setminus \overline{M} \neq \emptyset$. Так как \mathcal{V} есть π -сеть, то существует $P \in \mathcal{V}$, так что $P \subset U$. Тогда $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{P\} \in \mathfrak{M}$ и \mathcal{P}' строго больше \mathcal{P} . Противоречие с максимальнойностью \mathcal{P} .