

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
по курсу линейной алгебры и геометрии
III поток, лектор К.Л.Козлов, 2014-2015 учебный год

1. Определение линейного пространства. Примеры, основные свойства. Линейная зависимость векторов. Полная система векторов. Основная лемма о линейной зависимости.
2. Базисы и размерность. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты. Переход от одного базиса к другому.
3. Подпространства линейного пространства. Операции над ними. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств.
4. Прямая сумма подпространств. Алгебраическое дополнение подпространства. Внешняя прямая сумма.
5. Линейные отображения. Задание линейного отображения образом базиса. Изоморфизмы, эпиморфизмы и мономорфизмы. Связь размерностей ядра и образа линейных отображений.
6. Линейное подмножество. Фактор-пространства.
7. Линейные функции. Определение и простейшие свойства сопряженного пространства. Сопряженный базис. Матрица перехода сопряженных базисов.
8. Второе сопряженное пространство. Его канонический изоморфизм исходному линейному пространству.
9. Аннуляторы. Системы однородных линейных уравнений. Связь ранга системы с размерностью пространства решений. Представление произвольного подпространства в виде пространства решений однородной системы.
10. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Алгебра линейных операторов и алгебра матриц.
11. Инвариантные подпространства. Прямая сумма операторов. Приводимые операторы.
12. Собственные векторы и собственные значения. Спектр оператора. Диагонализируемые операторы.
13. Характеристический многочлен оператора. Алгебраическая и геометрическая кратности его корней.

14. Комплексификация пространств и операторов. Существование двумерного инвариантного подпространства у оператора в вещественном линейном пространстве.
15. Нильпотентные операторы. Циклический оператор.
16. Фактор-оператор. Характеристический многочлен нильпотентного оператора.
17. Разложение вырожденного оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного.
18. Корневые подпространства. Разложение линейного оператора в прямую сумму его ограничений на корневые подпространства.
19. Существование жорданова базиса нильпотентного оператора.
20. Единственность жордановой формы нильпотентного оператора.
21. Жорданова форма произвольного оператора.
22. Многочлены от линейного оператора. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли.
23. Билинейные и полуторалинейные функции. Их матрицы, изменение матрицы при переходе к новому базису. Ранг бифункционала. Левое и правое ядра.
24. Ортогональное дополнение до подпространства. Нормальный вид матриц (косо)симметричных и эрмитовых бифункционалов.
25. Квадратичные функции. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
26. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
27. Комплексификация билинейных функций. Положительная определенность бифункционалов. Критерий Сильвестра.
28. Матрица и определитель Грама. Неравенство Коши–Буняковского.
29. Евклидовы, унитарные и нормированные пространства.
30. Длины и углы. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис.
31. Ортогональное дополнение. Расстояния, углы, объемы.
32. Изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств. Общий вид линейной функции в евклидовом и унитарном пространствах.

33. Сопряженный оператор.
34. Нормальные операторы. Канонический вид матрицы нормального оператора в унитарном и евклидовом пространствах.
35. Самосопряженные операторы. Характеризация самосопряженных операторов. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора.
36. Кососимметрические операторы. Характеризация кососимметрических операторов. Канонический вид матрицы кососимметрического оператора в унитарном и евклидовом пространствах.
37. Изометрические операторы. Характеризация изометрических операторов. Канонический вид матрицы изометрического оператора в унитарном и евклидовом пространствах.
38. Неотрицательные операторы. Существование и единственность неотрицательного корня неотрицательного оператора.
39. Полярное разложение (разложение произвольного оператора в композицию неотрицательного и изометрического).
40. Симметричные билинейные функции на евклидовых пространствах. Приведение пары симметричных билинейных функций к главным осям.
41. Аффинные и евклидовы аффинные пространства. Аффинная система координат. Переход к новой системе координат. Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве.
42. Аффинные отображения аффинных пространств. Изометрии. Классификация движений пространства.
43. Тензоры. Запись тензора в координатах. Изменение коэффициентов тензора при переходе к другому базису.
44. Операции над тензорами. Базис в пространстве тензоров.
45. Симметрические и кососимметрические тензоры. Операция альтернирования.
46. Внешнее умножение. Базис в пространстве кососимметрических тензоров.