Связность

Связность играет особую роль, и не только в топологии. Например, классическая теорема Больцано–Коши о промежуточном значении — очевидное следствие связности отрезка.

Определение 1. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подпространств, и *несвязным*, если его можно так представить. Связный компакт называется *континуумом*.

Иными словами, X связно, если его нельзя представить в виде $Y \oplus Z$, где Y и Z — непустые подпространства пространства X.

Замечание 1. Очевидно, в определении связного пространства слово «открытых» можно заменить на «замкнутых», а также на «открыто-замкнутых».

Теорема 1. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия равносильны:*

① *X связно;*

② *X не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме $\varnothing$ и X;*

③ *если $X = Y \cup Z$ и множества Y и Z отделены*[1] *в X, то Y или Z пусто;*

④ *каждое непрерывное отображение $f\colon X \to \{0,1\}$*[2] *постоянно, т.е. либо $f(X) \subset \{0\}$, либо $f(X) \subset \{1\}$.*

Доказательство. Если множество Y открыто-замкнуто в пространстве X и $Y \neq \varnothing, X$, то X несвязно, поскольку $X \setminus Y$ тоже открыто-замкнуто и $X = Y \oplus X \setminus Y$. Значит, ① $\Longrightarrow$ ②.

Покажем, что ② $\Longrightarrow$ ③. Если $X = Y \cup Z$ и множества Y и Z отделены, то $Y = \overline{Y}$ (потому что $\overline{Y} \subset X \setminus Z = Y$), $Z = \overline{Z}$ и $\overline{Y} \cap \overline{Z} = \varnothing$, т.е. Y и Z — разные открыто-замкнутые подмножества пространства X, так что одно из них должно быть пусто.

Чтобы доказать импликацию ② $\Longrightarrow$ ④, достаточно заметить, что в силу непрерывности отображения f множества $f^{-1}(\{0\})$ и $f^{-1}(\{1\})$ открыто-замкнуты в X, так что одно из них должно быть пустым.

Наконец, импликация ④ $\Longrightarrow$ ① вытекает из того, что если X несвязно, то $X = Y \oplus Z$, где Y и Z — непустые открыто-замкнутые подмножества X, и непрерывное отображение $f\colon X \to \{0,1\}$, определённое правилом $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$, не постоянно. ■

Следствие 1. *Каждое связное тихоновское пространство, содержащее хотя бы две разные точки (в частности, любой неодноточечный континуум), имеет мощность не меньше $2^{\aleph_0}$.*

Доказательство. Пусть X — связное тихоновское пространство, и пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Поскольку $X \in T_1$, множество $\{y\}$ замкнуто в X, а поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$. Функция f сюръективна, потому что если бы нашлось $r \in [0,1] \setminus f(X)$, то мы бы имели $X = f^{-1}\big([0,r)\big) \oplus f^{-1}\big((r,1]\big)$, что противоречит связности пространства X. Значит, $|X| \geq \big|[0,1]\big| = 2^{\aleph_0}$. ■

В теории связных пространств наибольший интерес представляют не подпространства связных пространств, обладающие теми или иными свойствами, а связные подпространства произвольных (вообще говоря, несвязных) пространств.

---

[1] т.е. $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \varnothing$.

[2] Подразумевается, что множество $\{0,1\}$ снабжено дискретной топологией, если не оговорено иное.

Теорема 2. *Подпространство Y топологического пространства X связно тогда и только тогда, когда Y нельзя представить как объединение двух непустых множеств, отделённых в X.*

Доказательство. Необходимость. Если $Y = X_1 \cup X_2$ и X_1 и X_2 отделены в X, то, очевидно, X_1 и X_2 отделены и в Y. По теореме 1③ подпространство Y несвязно.

Достаточность. Если Y несвязно, то по теореме 1③ имеем $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1 и Y_2 непусты и отделены в Y, т.е. $\overline{Y_1}^Y \cap Y_2 = Y_1 \cap \overline{Y_2}^Y = \varnothing$. Поскольку $Y_1, Y_2 \subset Y$, имеем

$$\overline{Y_1}^X \cap Y_2 \subset (\overline{Y_1}^X \cap Y) \cap Y_2 = \overline{Y_1}^Y \cap Y_2 = \varnothing;$$

аналогично $Y_1 \cap \overline{Y_2}^X = \varnothing$, т.е. Y_1 и Y_2 отделены и в X. ■

Следствие 2. *Если $Y \subset X$, Y связно и X_1 и X_2 — отделённые множества в X, для которых $Y \subset X_1 \cup X_2$, то одно из множеств X_1 и X_2 содержит Y.*

Теорема 3. *Пусть Y_α, $\alpha \in A$, — связные подмножества пространства X. Если существует $\alpha_0 \in A$, для которого Y_{α_0} не отделено ни от одного Y_α, $\alpha \in A$, то объединение $\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha$ связно.*

Доказательство. Применим теорему 2. Пусть $Y = \bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 отделены в X. В силу следствия 2 либо $Y_{\alpha_0} \subset X_1$, либо $Y_{\alpha_0} \subset X_2$. Пусть для определённости $Y_{\alpha_0} \subset X_1$. Для любого $\alpha \neq \alpha_0$, $\alpha \in A$, в силу того же следствия тоже имеем либо $Y_\alpha \subset X_1$, либо $Y_\alpha \subset X_2$. Очевидно, $Y_\alpha \subset X_1$ — иначе множества Y_α и Y_{α_0} были бы отделены, будучи подмножествами отделённых множеств. Значит, $Y = \bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha \subset X_1$, откуда следует, что $X_2 = \varnothing$. По теореме 2 множество Y связно. ■

Следствие 3. *Если Y_α, $\alpha \in A$, — связные подпространства пространства X и $\bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha \neq \varnothing$, то $\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha$ связно.*

Следствие 4. *Если Y_α, $\alpha \in A$, — попарно пересекающиеся связные подмножества пространства X, то объединение $Y = \bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ связно.*

Доказательство. Предположим, что Y несвязно. Тогда по теореме 2 имеем $Y = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 отделены в X и непусты. Пусть $X_1 \cap Y_{\alpha_1} \neq \varnothing$ и $X_2 \cap Y_{\alpha_2} \neq \varnothing$. Согласно следствию 3 объединение $Y_{\alpha_1} \cup Y_{\alpha_2}$ должно быть связно, однако это не так в силу следствия 2. ■

Следствие 5. *Если Y связно, $Y \subset X$ и $Y \subset Z \subset \overline{Y}^X$, то Z тоже связно. В частности, $\overline{Y}^X$ связно.*

Доказательство. Семейство $Y \cup \big\{\{z\} : z \in Z\big\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3: множество Y не отделено ни от одного $\{z\}$, $z \in Z$. ■

Из курса анализа известно, что обычная прямая, а также все интервалы, отрезки и открытые и замкнутые лучи на прямой связны.

Следствие 6. *Если для любых двух точек пространства X существует содержащее их связное множество $Y \subset X$, то X связно.*

Доказательство. Предположим, что X непусто (иначе доказывать нечего). Зафиксируем любую точку $x_0 \in X$ и для каждой точки $x \in X$ выберем связное множество $Y_x \subset X$, содержащее x и x_0 (отметим сразу же, что $X = \bigcup_{x\in X} Y_x$). Множества Y_x, $x \in X$, удовлетворяют условиям следствия 3, поскольку $x_0 \in \bigcap_{x\in X} Y_x$; значит, X связно. ■

Следующее утверждение тоже по сути является следствием теоремы 3, но мы сформулируем его как отдельную теорему ввиду его важности.

Теорема 4. *Тихоновское пространство X связно тогда и только тогда, когда βX связно.*

Доказательство. Если X связно, то βX тоже связно в силу следствия 5. Если же X несвязно, то по теореме 1④ существует непостоянная непрерывная функция $f\colon X \to \{0,1\}$. Непрерывное продолжение $\hat{f}\colon \beta X \to [0,1]$ этой функции на βX тоже непостоянно. При этом $\hat{f}(\beta X) \subset \{0,1\}$. ■

В каждом топологическом пространстве определены специальные связные подпространства, которые играют важную роль в разных разделах математики.

Определение 2. Объединение всех связных подпространств пространства X, содержащих точку $x \in X$, называется *компонентой связности*, или *связной компонентой*, или просто *компонентой* точки x в X.

Сразу же сделаем несколько замечаний.

- Компонента точки x — это максимальное связное подмножество X, содержащее x: она связна в силу следствия 3, будучи объединением пересекающихся связных множеств, и по определению содержит всякое связное подмножество, которому принадлежит x.
- Компонента любой точки замкнута, потому что замыкание любого связного множества связно (см. следствие 5).
- Компоненты любых двух точек в топологическом пространстве либо не пересекаются, либо совпадают. (Действительно, если C_x и C_y — компоненты точек x и y и $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, то по следствию 3 множество $C_x \cup C_y$ связно, и в силу максимальности компонент имеем $C_x = C_y = C_x \cup C_y$.) Таким образом, в совокупности компоненты точек составляют разбиение пространства на попарно непересекающиеся связные замкнутые множества, которые называются *компонентами связности*, или *связными компонентами*, или просто *компонентами* этого пространства.

Определение 3. *Квазикомпонентой* точки x в топологическом пространстве X называется пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств X, содержащих эту точку.

Ясно, что квазикомпоненты всех точек замкнуты.

Предложение 1. *Квазикомпоненты любых двух точек либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Пусть Q_x и Q_y — квазикомпоненты точек x и y. Тогда либо $x, y \in Q_x \cap Q_y$, либо хотя бы одна из точек x и y не содержится в $Q_x \cap Q_y$. В первом случае всякое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x, содержит также и y, так что $Q_x = Q_y$. Предположим, что одна из точек — пусть это будет x — не принадлежит пересечению $Q_x \cap Q_y$. Тогда у точки y есть открыто-замкнутая окрестность U, которая не содержит x, причём по определению $Q_y \subset U$. Множество $X \setminus U$ является открыто-замкнутой окрестностью точки x, причём по определению $Q_x \subset X \setminus U$. Значит, $Q_x \cap Q_y = \varnothing$. ■

Таким образом, квазикомпоненты точек в топологическом пространстве тоже (как и компоненты) образуют разбиение пространства на непересекающиеся замкнутые множества, которые называются *квазикомпонентами* этого пространства.

Предложение 2. *Компонента любой точки в топологическом пространстве содержится в квазикомпоненте этой точки.*

Доказательство. Пусть C_x — компонента точки x в пространстве X, и пусть Q_x — её квазикомпонента. Если U — любая открыто-замкнутая окрестность точки x, то множества U и $X \setminus U$ отделены в X. В силу следствия 2 имеем $C_x \subset U$ (включение $C_x \subset X \setminus U$ выполняться не может, так как $x \in C_x$). Значит, C_x содержится в каждой открыто-замкнутой окрестности точки x. ■

Теорема 5. *Во всяком компакте компонента любой точки совпадает с её квазикомпонентой.*

Доказательство. Ввиду предложения 2 достаточно доказать, что любая квазикомпонента компакта связна.

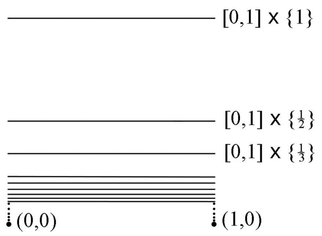
Пусть X — компакт, $x \in X$ и Q — квазикомпонента точки x. Предположим, что $Q = Y \cup Z$, где Y и Z — замкнутые подмножества подпространства Q (а значит, и компакта X) и $Y \cap Z = \varnothing$. Пусть для определённости $x \in Y$. В силу нормальности каждого компакта найдутся непересекающиеся открытые множества $U, V \subset X$, для которых $Y \subset U$ и $Z \subset V$. Имеем $Q \subset U \cup V$. По определению $Q = \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$, где $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство всех открыто-замкнутых окрестностей точки x в X. Множества $U_\alpha = X \setminus W_\alpha$, $a \in A$, образуют открытое покрытие компакта $X \setminus (U \cup V)$. Пусть $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $W = \bigcap_{i \le n} W_{\alpha_i} \subset U \cup V$. Ясно, что множество W открыто-замкнуто. При этом

$$\overline{U \cap W} \subset \overline{U} \cap \overline{W} = \overline{U} \cap W = \overline{U} \cap \big((U \cup V) \cap W\big) =$$
$$= (\overline{U} \cap U \cup \overline{U} \cap V) \cap W = U \cap W,$$

т.е. множество $U \cap W$ открыто-замкнуто. Поскольку $x \in U \cap W$, по определению квазикомпоненты имеем $Q \subset U \cap W$; значит, $Q \subset U$. Из того, что $Z \subset V$ и $V \cap U = \varnothing$, следует, что $Z = \varnothing$. Из произвольности выбора замкнутых множеств Y и Z вытекает связность множества Q. ■

Пример. Для некомпактных пространств доказанная теорема неверна. В качестве примера рассмотрим пространство

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big([0,1] \times \{\frac{1}{n}\}\big) \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2.$$



Компоненты точек $\{(0,0)\}$ и $\{(1,0)\}$ одноточечны (это очевидно), тогда как их квазикомпоненты — одно и то же множество $\{(0,0), (1,0)\}$. Действительно, все отрезки $[0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ открыто-замкнуты в X и связны, и любая окрестность точки $\{(0,0)\}$ пересекает их все, кроме конечного числа. Значит, в силу их связности, по теореме 1 ② любая открыто-замкнутая окрестность точки $\{(0,0)\}$ обладает тем свойством, что она содержит все эти отрезки, кроме конечного их числа; следовательно, она должна содержать и точку $\{(1,0)\}$, которая является предельной для любого множества с этим свойством.

Перейдём к поведению связности при непрерывных отображениях и операциях над топологическими пространствами.

Теорема 6. *Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1 и Y_2 непусты, то $X = f^{-1}(Y_1) \oplus f^{-1}(Y_2)$, причём $f^{-1}(Y_1)$ и $f^{-1}(Y_2)$ тоже непусты. ■

Уже из определения связности ясно, что сумма непустых пространств может быть связной только в случае одного слагаемого. Зато связность мультипликативна.

Теорема 7. *Топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ непустых пространств X_α связно тогда и только тогда, когда все пространства X_α связны.*

Доказательство. Если $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно, то все пространства X_α связны, потому что все они являются непрерывными образами (при проекциях) пространства $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

То, что произведение $X\times Y$ двух связных пространств X и Y связно, вытекает из следствия 6: любые две точки $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ принадлежат множеству $(X\times\{y_1\})\cup(\{x_2\}\times Y)$, которое связно, будучи объединением пересекающихся связных множеств (см. следствие 3).

Отсюда немедленно вытекает, что произведение любого конечного числа связных пространств связно.

Рассмотрим произвольное произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ связных пространств. Зафиксируем любую точку $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Пусть $\mathscr{F}=\{F\subset A : F \text{ конечно}\}$. Для каждого $F\in\mathscr{F}$ положим

$$X_F=\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha,\qquad \text{где } Y_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha\in F \text{ и } Y_\alpha=\{x_\alpha\} \text{ для } \alpha\notin F.$$

Каждое X_F гомеоморфно конечному произведению связных пространств и потому связно. Поскольку все X_F содержат точку $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, объединение $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} X_F$ тоже связно (по следствию 3). Рассматривая элементы канонической базы произведения, легко показать, что это объединение плотно в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. В силу следствия 5 произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ связно. ■

Следствие 7. *Все тихоновские степени прямой $\mathbb{R}^\kappa$ и все тихоновские кубы $[0,1]^\kappa$ связны.*

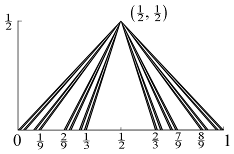
Теорема 8. *Компонента точки $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в топологическом произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ равна произведению $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$, где C_α — компонента точки x_α в X_α для каждого $a\in A$.*

Доказательство. Пусть C — компонента точки $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$. Она связна, поэтому все проекции $\pi_\alpha(C)$ связны; значит, $C_\alpha\supset\pi_\alpha(C)$ для $\alpha\in A$, откуда следует, что $C\subset\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$. С другой стороны, $C\supset\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$, потому что произведение $\prod_{\alpha\in A} C_\alpha$ связно по теореме 7, а компонента C — максимальное связное множество, содержащее точку $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. ■

В отличие от большинства свойств типа компактности, связность накладывает только одно ограничение на кардинальные инварианты метризуемых пространств — в силу следствия 1 мощность непустого неодноточечного связного метризуемого (как и любого связного тихоновского) пространства не может быть меньше $2^{\aleph_0}$. Любой бесконечный кардинал может быть весом, а значит, и плотностью, числом Суслина и числом Линделёфа связного метризуемого пространства — это видно из того очевидного наблюдения, что метрический ёж любой колючести связен.

Пример (*веер Кнастера–Куратовского*)**.** Пусть E — множество всех концевых точек интервалов, удаленных из отрезка $[0,1]$ в процессе построения канторова множества C (на каждом шаге из каждого имеющегося отрезка удаляется средняя треть). Положим $I=C\setminus E$. Для каждого $c\in C$ соединим точку $(c,0)\in\mathbb{R}^2$ с точкой $(\frac12,\frac12)\in\mathbb{R}^2$ отрезком L_c и обозначим через F_c множество всех точек $(x,y)\in L_c$, у которых координата y рациональна, если $c\in E$, и иррациональна, если $c\in I$. Подпространство $F=\bigcup_{c\in C} F_c$ евклидовой плоскости называется *веером Кнастера–Куратовского*; оно известно также как *протекающая*[1] *канторова палатка* и *канторов вигвам.*

[1]В противоположность палатке, сделанной из целых отрезков L_c вместо множеств F_c. Бывает и «сильно протекающая канторова палатка» (*Cantor's leakier tent*) — она получается перестановкой слов «рационально» и «иррационально» в определении палатки. Такая палатка уже нульмерна.



- Пространство F связно.
- Пространство $F^0 = F \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ вполне несвязно.

Доказательство. Как-нибудь перенумеруем все рациональные числа в отрезке $[0, \frac{1}{2}]$: $\mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}] = \{r_1, r_2, \dots\}$. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть H_n — горизонтальная прямая $y = r_n$. Предположим, что $F = (F \cap A) \cup (F \cap B)$, где A и B — замкнутые подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$, $A \cap B \cap F = \varnothing$ и (для определенности) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in A$. Рассмотрим множества $I_n = \{c \in C : A \cap B \cap H_n \cap L_c \neq \varnothing\}$. Всякое такое множество замкнуто: если отрезок L_c, соединяющий точку c с $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, не пересекает замкнутое подмножество $A \cap B \cap H_n$ горизонтальной прямой H_n, то и отрезки, соединяющие близкие к c точки с $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, не пересекают это множество. Кроме того, каждое I_n содержится в I, потому что если бы нашлась точка $c \in E \cap I_n$, то точка из пересечения $A \cap B \cap H_n \cap L_c$ (которая имеет рациональную ординату r_n по определению прямой H_n) принадлежала бы множеству F, а значит, и пересечению $A \cap B \cap F$, которое по предположению пусто. Следовательно, что каждое множество I_n нигде не плотно в C (иначе, будучи замкнутым, оно содержало бы пересечение некоторого открытого интервала с C, а любое такое пересечение содержит точки из E).

Для каждой точки $c \in C$ плотное подмножество F_c отрезка L_c содержится в объединении $A \cup B$, а значит, и весь отрезок L_c содержится в $A \cup B$ (ибо множество $L_c \setminus (A \cup B)$ открыто в L_c), откуда в силу связности отрезка L_c вытекает, что либо $L_c \cap A \cap B \neq \varnothing$, либо $L_c \cap B = \varnothing$ (случай $L_c \cap A = \varnothing$ невозможен, поскольку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in L_c \cap A$ для всех $c \in C$). Заметим, что если $c \in I$ и $(x, y) \in L_c \cap A \cap B$, то y рационально — иначе $(x, y) \in F \cap A \cap B$. Следовательно, для всех $c \in I \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ имеем $F_c \cap B = \varnothing$. Вспомним, что множество E счётно, а все I_n нигде не плотны в C; значит, в силу теоремы Бэра о категории множество $\{c \in C : F_c \subset A\}$ плотно в C и из замкнутости множества A вытекает, что $F \cap B = \varnothing$. Таким образом, пространство F связно.

Покажем, что F_0 вполне несвязно. Заметим, что для любого $x \in [0, 1] \setminus C$ пересечения полуплоскостей, на которые плоскость разбивается прямой, проходящей через точки $(x, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, с пространством F^0 открыто-замкнуты в F^0. Отсюда легко вывести, что любое связное подмножество F^0 целиком содержится в F_c для некоторого $c \in C$. С другой стороны, всякое связное подмножество любого F_c содержит не более одной точки. ■