Введение в топологию[1]

$\boxed{\text{Виталий Витальевич Федорчук}}$

[1]Составители задач: К. Л. Козлов, Е. Ю. Мычка, Е. А. Резниченко, О. В. Сипачева, О. Д. Фролкина

Оглавление

Лекция 1

Метрические пространства. Канторово совершенное множество.

Предполагаются известными понятия множества, основных операций над множествами (объединения, пересечения, дополнения) и их свойств, отображений множеств. Эти понятия излагаются в курсах высшей алгебры и математического анализа в первом семестре. Через $\mathbb{R}_+$ будем обозначать множество всех неотрицательных вещественных чисел.

1.1. Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X — множество, а ρ — *метрика* на X, т.е. такая функция

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$,

что выполнены следующие условия:

(1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксиома *тождества*);

(2) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома *симметрии*);

(3) $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома *треугольника*).

Часто для краткости метрическое пространство (X, ρ) обозначается одной буквой X. Элементы метрического пространства называются *точками*. Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

1.1 Примеры метрических пространств.

Примеры метрических пространств.

1. Простейшими примерами являются пустое множество и множество X, состоящее из одной точки. На каждом из этих множеств существует един-

ственная метрика.

2. Из школы известны *эвклидовы пространства* E^n, $n = 1, 2, 3$, (прямая, плоскость, пространство). В этих пространствах a priori определено расстояние между точками x и y — это длина отрезка, соединяющего точки x и y.

После введения прямоугольных координат пространства E^n превращаются в *арифметические n-мерные пространства* $\mathbb{R}^n$, в которых расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum \bigl\{ (x_i - y_i)^2 : \ i = 1, \dots, n \bigr\}}, \tag{1.1}$$

вытекающей из теоремы Пифагора.

3. Всякое множество X превращается в метрическое пространство, если положить $\rho(x, y) = 1$ для любых различных точек $x, y \in X$.

4. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$. Определим на Y метрику $\rho|Y$ как ограничение метрики ρ на Y, т.е.

$\bigl(\rho|Y\bigr)(x, y) = \rho(x, y) \quad$ для любых $\quad x, y \in Y$.

Ясно, что так определённая функция расстояния $\rho|Y$ удовлетворяет аксиомам метрики. Формально надо писать не „$\rho|Y$“, а „$\rho|Y \times Y$“, но мы для удобства используем более короткое обозначение.

Пара $(Y, \rho|Y)$ называется *подпространством* метрического пространства (X, ρ). Подпространства дают нам большой запас метрических пространств: множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел, отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, квадрат на плоскости и т.д.

Следующие примеры метрических пространств связаны с понятием *нормированного* пространства, известным из курса "Линейная алгебра и геометрия". Напомним определение в простейшем случае.

1.3. Определение. Пусть V — вещественное векторное пространство. *Нормой* в пространстве V называется отображение

$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}_+$,

ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x} \in V$ неотрицательное число $||\mathbf{x}||$ и удовлетворяющее аксиомам

(1) если $||\mathbf{x}|| = 0, \quad$ то $\quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(2) $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}|| \quad$ для всякого $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in V$;

(3) $\forall x, y \in V \quad ||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad$ (аксиома треугольника).

Из (2) вытекает, что $||\mathbf{0}|| = 0$.

Векторное пространство V с заданной на нём нормой $|| \cdot ||$ называется *нормированным (векторным) пространством.*

1.2 Примеры нормированных пространств.

Примеры нормированных пространств.

1. Простейшим примером является *нульмерное пространство* $V = \{\mathbf{0}\}$, на котором существует единственная норма.

2. Естественная норма на $\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$||\mathbf{x}|| = |\mathbf{x}|$.

3. Одним из обобщений предыдущего примера является следующая норма на арифметическом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются последовательности $(x_1, \dots, x_n)$ вещественных чисел:

$$||(x_1, \dots, x_n)|| = \max\big\{|x_1|, \dots, |x_n|\big\}. \tag{1.2}$$

Аксиомы нормы проверяются покоординатно с использованием свойств модуля (вещественного) числа.

4. Норма из примера 1.2.3 обобщается до нормы на пространстве $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$:

$||f|| = \sup\big\{|f(t)| : t \in [0,1]\big\}$.

Проверим аксиому треугольника. Пусть $f = g + h$. Тогда для всякого $t \in [0,1]$ имеем $|f(t)| \leq |g(t)| + |h(t)|$. Отсюда вытекает, что

$|f(t)| \leq \sup\big\{|g(t')| : t' \in [0,1]\big\} + \sup\big\{|g(t')| : t' \in [0,1]\big\}$, откуда и получаем неравенство $||f|| \le ||g|| + ||h||$.

5. Определим ещё одну норму на $\mathbb{R}^n$. Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum \{x_i^2 : i = 1, \ldots, n\}}. \tag{1.3}$$

В курсе Линейной алгебры и геометрии доказано, что функция из (1.3) удовлетворяет всем аксиомам нормы.

1.5. Предложение. *Пусть $(V, ||\cdot||)$ — нормированное пространство. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ положим*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||. \tag{1.4}$$

Тогда ρ является метрикой на множестве V.

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить аксиому 1.1 (3) треугольника. Имеем

$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (1.4) = ||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z}|| \le (1.3(3)) \le ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||+||\mathbf{y}-\mathbf{z}|| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. $\square$

Таким образом, Предложение 1.5 даёт нам новые примеры метрических пространств: пространства $\mathbb{R}^n$ с двумя различными метриками (нормы из (1.2) и (1.3) различны при $n \ge 2$ и, следовательно, приводят к различным метрикам).

1.6. Канторово совершенное множество. Это замечательное множество имеет большое принципиальное значение и многочисленные применения.

Возьмём отрезок $I = [0, 1]$ числовой прямой и назовём его отрезком нулевого ранга. На нём возьмём два отрезка $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ и $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ и назовём их отрезками первого ранга. Интервал $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ назовём интервалом первого ранга. С каждым из отрезков I_0 и I_1 поступим так же, как и с отрезком I, а именно на I_0 и I_1 возьмём по два отрезка второго ранга, т.е.

$I_{00} = [0, \frac{1}{9}], \quad I_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}],$

$I_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad I_{11} = [\frac{8}{9}, 1].$

Между ними лежат интервалы второго ранга

$J_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), \quad J_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}).$

Продолжаем это построение. Пусть построены 2^n отрезков n-го ранга $I_{i_1 \dots i_n}$ (каждый из индексов принимает значения 0 или 1). Каждый из отрезков $I_{i_1 \dots i_n}$ разделим на три равные по длине части: два крайних отрезка $I_{i_1 \dots i_n 0}$ и $I_{i_1 \dots i_n 1}$ (первая и третья трети отрезка $I_{i_1 \dots i_n}$) и лежащий между ними интервал $J_{i_1 \dots i_n}$.

Объединение всех отрезков n-го ранга обозначим через C_n. Это — подмножество отрезка I, дополнение к которому состоит из всех интервалов ранга $\leq n$. Поэтому пересечение

$$C = \bigcap \{C_n : n = 1, 2 \dots\}$$

имеет своим дополнением (в отрезке I) объединение всех интервалов $J_{i_1 \dots i_n}$ всевозможных рангов. Различные интервалы этого семейства попарно не пересекаются. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $J_{i_1 \dots i_n}$ принадлежат множеству C. Кроме того, C содержит точки 0 и 1. Множество C и называется *канторовым совершенным множеством* или *канторовым дисконтинуумом.*

Топологические свойства канторова множества C, связанные со словами „совершенное“ и „дисконтинуум“, мы обсудим после того, как познакомимся с элементами топологии. А сейчас мы докажем, что множество C имеет *мощность континуума.*

Для этого сначала познакомимся с элементами теории множеств, связанными с понятием *мощность множества.* Это делается в курсе „Математический анализ“, но кое-что мы напомним.

Мощность множества - это в некотором смысле „количество“ его элементов. Для конечного множества с понятием количества его элементов не возникает никаких вопросов. С бесконечными множествами ситуация сложнее. Например, совпадает ли количество элементов множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множества $\mathbb{Z}$ всех целых чисел?

1.6.1. Определение. Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными* (обозначение: $A \sim B$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие или, другими словами, если существует биективное отображение $f : A \to B$. Если A и B равномощны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность.

1.6.2. Определение. Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Таким образом, хотя понятие счётности множества связано с возможностью его пересчёта, мы различаем конечные и бесконечные множества.

Задача. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ счётно.

1.6.3. Определение. Мощностью *континуума* называется мощность отрезка $I = [0, 1]$.

1.7. Предложение. *Множество $2^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей, составленных из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Двоичная запись

$t = 0, i_1 i_2 \dots i_k \dots$

произвольного числа $t \in I = [0, 1]$ даёт нам отображение $f : 2^{\mathbb{N}} \to I$. Это - отображение „на“, но не взаимно однозначно. Числам вида

$$n/2^k, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < n < 2^k, \tag{1.5}$$

соответствуют в точности две записи: у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а у другой - все единицы. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество двоично-рациональных чисел на отрезке I, т.е. множество чисел вида (1.5). На множестве $f^{-1}(I \backslash \mathcal{D})$ отображение f инъективно, т.е. переводит разные точки в разные. Но множества $\mathcal{D}$ и $f^{-1}(\mathcal{D})$ счётны. Значит, существует биекция $g : f^{-1}(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$. Тогда отображение $h : 2^{\mathbb{N}} \to I$, определяемое следующим образом:

$h|f^{-1}\mathcal{D} = g, \quad h|f^{-1}(I \setminus \mathcal{D}) = f|f^{-1}(I \setminus \mathcal{D}),$

является биекцией. $\square$

1.8. Предложение. *Канторово множество C имеет мощность континуума.*

Доказательство. Если точки $x, y \in C_n$ принадлежат различным отрезкам n-го ранга, то расстояние между ними $\geq 1/3^n$. Поэтому каждая точка $x \in C$ принадлежит единственному отрезку $I_{i_1 \dots i_n}$ n-го ранга. Следовательно, каждой точке $x \in C$ однозначно соответствует последовательность отрезков

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1 i_2 \dots i_n} \supset \ldots, \tag{1.6}$$

значит, и последовательность индексов

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots. \tag{1.7}$$

Таким образом, сопоставляя каждой точке $x \in C$ последовательность (1.7), получаем отображение, которое, как только что показано, инъективно, а по лемме о последовательности вложенных стягивающих отрезков сюръективно, т.е. является отображением „на“. Следовательно f есть биекция. Применение Предложения 1.7 завершает доказательство. $\square$

1.9. Замечание. Напомним, что по теореме Кантора мощность континуума несчётна.

Задачи.

1.1. Пусть на плоскости E задана прямоугольная система координат, $s = (x_s, y_s), q = (x_q, y_q)$. Определим отображения $\rho_\star : E \times E \to \mathbb{R}_+$:

(ρ_d) $\rho_d(s,q) = 1$, если $s \neq q$, $\rho_d(s,q) = 0$, если $s = q$;

(ρ_p) $\rho_p(s,q) = (|x_s - x_q|^p + |y_s - y_q|^p)^{\frac{1}{p}}, p > 1$;

(ρ_∞) $\rho_\infty(s,q) = \max\{|x_s - x_q|, |y_s - y_q|\}$;

(ρ_j) $\rho_j(s,q) = |y_s - y_q|$, если $x_s = x_q$, $\rho_j(s,q) = |x_s - x_q| + |y_s| + |y_q|$, если $x_s \neq x_q$.

Проверить, что они являются метриками.

1.2. Определить аналоги метрик $\rho_d, \rho_p, p \geq 1, \rho_\infty$ из задачи 1.1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Нарисовать единичные открытые шары точек в метриках из задач 1.1, 1.2.

1.4. Пусть

(ρ_p) ℓ_p, $p \geq 1$, — множество последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum |x_i|^p < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho_p(x, y) = (\sum |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$;

(ρ_∞) ℓ_∞ — множество последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ удовлетворяющих условию $\sup |x_i| < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho_\infty(x, y) = \sup\{|x_i - y_i|\}$.

Проверить, что они являются метриками.

1.5. Докажите, что в множестве $C[0, 1]$ всех непрерывных отображений $[0, 1] \to \mathbb{R}$ следующие функции

(ρ_p) $\rho_p(f, g) = (\int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$;

(ρ_∞) $\rho_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$

являются метриками.

1.6. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольная инъективная функция на множестве X. Докажите, что отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, является метрикой на X.

1.7. Может ли шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса?

1.8. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X. Сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ, ρ_1 и ρ_2.

1.9. Метрическое пространство полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел. Будут ли полны пространства в примерах 1.4 и 1.5?

Дополнительные задачи.

1.1x. На любом ли линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$ можно определить евклидову структуру?

1.2x. Пусть p — простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ представляется в виде $\frac{r}{s}p^{\alpha}$, где r, s и $\alpha \in \mathbb{Z}$, r, s взаимно просты с p. Положим $\rho(x, y) = p^{-\alpha}$ для $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Доказать, что ρ — метрика (p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$).

1.3x. Пусть на плоскости E задана аффинная (не прямоугольная) система координат. Определим отображение $\rho' : E \times E \to \mathbb{R}$ формулой

$$\rho'(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$\bar{a} = (x_1, x_2), \bar{b} = (y_1, y_2) \in E$. Доказать, что отображение ρ' является метрикой на E.

1.4x. Какие из метрик в задаче 1.4 могут быть заданы нормой (скалярным произведением) в линейных пространствах ℓ_p, $p \geq 1$, и ℓ_∞ с естественным сложением и умножением на скаляры.

Какие из метрик в задаче 1.5 могут быть заданы нормой (скалярным произведением) в линейном пространстве $C[0, 1]$ с естественным сложением и умножением на скаляры?

1.5x. *Пространство Бэра.* Пусть X произвольное бесконечное счетное множество. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех последовательностей элементов множества X. На множестве $\mathcal{B}$ введём метрику ρ следующим образом: для $p = (x_1, x_2, ...), q = (y_1, y_2, ...) \in \mathcal{B}$ полагаем $\rho(p, q) = 0$, если $p = q$, и $\rho(p, q) = 1/k$, если k наименьшее натуральное число, для которого $x_k \neq y_k$.

Показать, что метрика корректно определена. Описать открытые шары точек. Будет ли полным пространство Бэра?

1.6x. *"Метризуемый еж".* Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0, 1]$, который обозначим через $[0, 1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0, 1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Для $p, q \in X$ полагаем $\rho(p, q) = |p - q|$, если p и q принадлежат одному отрезку $[0, 1]_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, и $\rho(p, q) = p + q$, если p и q не принадлежат одному отрезку $[0, 1]_\lambda$. Показать, что метрика корректно определена. Описать открытые шары точек. Будет ли полным пространство "метризуемый еж"?

1.7x. Докажите, что для любого метрического пространства (X, ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A, B) = \max\{\sup\{\rho(a, B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b, A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$. Можно ли отказаться от требования их замкнутости? ограниченности?

1.8x. Для $0 < p < 1$ точками пространства ℓ_p являются счетные последовательности $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, для которых $\sum |x_i|^p < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho(p, q) = \sum |x_i - y_i|^p$. Показать, что метрика корректно определена. Порождена ли она нормой?

Лекция 2

Непрерывные отображения метрических пространств. Кривая Пеано.

2.1. Прежде чем говорить о непрерывных отображениях, поговорим об отображениях вообще. Пусть $f : X \to Y$ — отображение множества X в множество Y и $M \subset X$. Множество

$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$

называется *образом* M при f.

Справедливы следующие свойства:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2); \tag{2.1}$$

$$f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2). \tag{2.2}$$

В то же время не всегда имеет место равенство

$f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$.

В качестве примера можно взять множество X, состоящее из двух различных точек a_1 и a_2, и положить $M_i = \{a_i\},\ i = 1, 2$. Пусть Y состоит из одной точки b. Отображение $f : X \to Y$ определено однозначно: $f(a_i) = b$. Тогда $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и $f(M_1 \cap M_2) = \varnothing$. В то же время $f(M_1) \cap f(M_2) = Y \neq \varnothing$.

2.2. Пусть теперь $M \subset Y$. Множество

$$f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$$

называется (полным) *прообразом* множества M при f. Переход к прообразу сохраняет основные теоретико-множественные операции:

$$f^{-1}(M_1 \setminus M_2) = f^{-1}(M_1) \setminus f^{-1}(M_2); \tag{2.3}$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2); \tag{2.4}$$

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \tag{2.5}$$

2.3. Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — отображения, то определена их *композиция*

$g \circ f : X \to Z$

по правилу : $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *обратимым*, если существует такое отображение $g : Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$, где id_X — тождественное отображение множества X на себя, и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Отображение g называется *обратным* к f и обозначается f^{-1}.

2.4. Отображение $f : X \to Y$ называется

1) *инъекцией*, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

2) *сюръекцией* или „отображением на“, если для любого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $f(x) = y$;

3) *биекцией* (или „взаимно однозначным отображением“), если f одновременно является инъекцией и сюръекцией.

2.5. Предложение. *Отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда оно является биекцией.*

Доказательство достаточно просто и предоставляется читателю.

2.6. Пусть $f : X \to Y$ — отображение и $M \subset X$. Отображение f, рассматриваемое только на M, называется *сужением* (*ограничением*) отображения f на M и обозначается $f|M$. Получаем отображение $f|M : M \to Y$, где $(f|M)(x) = f(x)$.

2.7. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$O_\varepsilon(x) = \big\{x' \in X : \rho(x, x') < \varepsilon\big\}$

называется *ε-окрестностью* точки x (или *ε-шаром* с центром в точке x) в метрическом пространстве X.

2.8. Определение. Пусть (X,ρ_1) и (Y,ρ_2) — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\forall x \in X$ из

$$\rho_1(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Понятие окрестности позволяет дать более короткое определение непрерывности отображения.

2.9. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big). \tag{2.7}$$

Ясно, что Определения 2.8 и 2.9 равносильны, поскольку условия (2.6) и (2.7) совпадают.

2.10. Замечание. Определение 2.9 непрерывности отображения f называется *определением непрерывности по Коши.*

Определим теперь непрерывность по Гейне. Для этого нам потребуется

2.11. Определение. Пусть X — метрическое пространство и $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность точек $x_n \in X$. Говорят, что последовательность ξ *сходится* к точке $x \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\varepsilon(x) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0. \tag{2.8}$$

2.12. Определение непрерывности по Гейне. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для всякой последовательности $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ сходится к точке $f(x_0)$.

2.13. Теорема. *Непрерывности отображения $f : X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть f непрерывно в точке x_0 по Коши и пусть $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ - последовательность, сходящаяся к точке x_0. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что выполнено свойство (2.7). Поскольку ξ сходится к x_0, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$x_n \in O_\delta(x_0) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0.$$

Но тогда

$$f(x_n) \in f\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0.$$

Следовательно, $f(\xi)$ сходится к $f(x_0)$.

Наоборот, пусть f непрерывно в точке x_0 по Гейне. Возьмём $\delta_n = 1/n$. Если f не является непрерывным в точке x_0 по Коши, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и для каждого n существует такая точка $x_n \in O_{\delta_n}(x_0)$, что $f(x_n) \notin O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Тогда последовательность $\xi = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x_0, но последовательность $f(\xi) = \big(f(x_n) : n \in \mathbb{N}\big)$ не сходится к $f(x_0)$, поскольку $f(\xi) \cap O_\varepsilon\big(f(x_0)\big) = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

2.14. Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

2.15. Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $M \subset X$. Если

$$\sup\big\{\rho(x, y) : x, y \in M\big\} = d < \infty,$$

то множество M называется *ограниченным*, а число d называется его *диаметром* и обозначается через $\operatorname{diam}(M)$.

2.16. Кривая Пеано. *Существует непрерывное отображение отрезка I на треугольник T.*

Доказательство. Пусть $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. В качестве T возьмём какой-нибудь равнобедренный прямоугольный треугольник. Разобьём отрезок I на две его половины: $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ и $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Это разбиение назовём разбиением первого ранга, а отрезки I_0 и I_1 - отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$ второго ранга, образующие разбиение отрезка I второго ранга и т.д. Разбиение n-го ранга состоит из 2^n отрезков $I_{i_1 i_2 \dots i_n},\ i_k \in \{0,1\}$, длина каждого из которых равна $1/2^n$.

Аналогичным образом, опуская в треугольнике T высоту из прямого угла, разобьём его на два равных равнобедренных треугольника T_0 и T_1. Это - треугольники первого ранга, они образуют разбиение первого ранга исходного треугольника T. Разбивая каждый треугольник первого ранга его высотой, получим четыре треугольника $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ второго ранга.

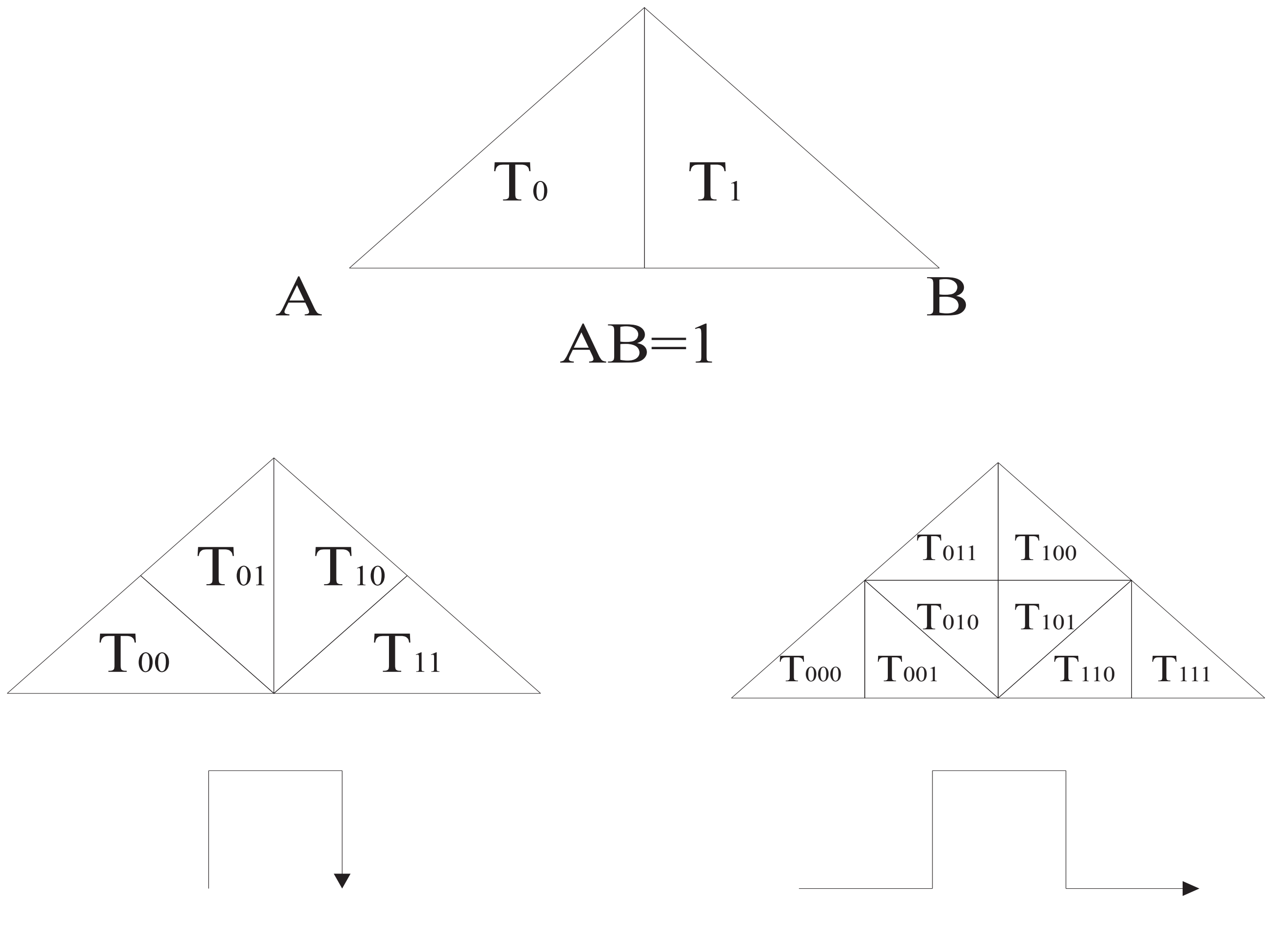

Рис. 2.1:

Вообще, при любом n получаем 2^n треугольников $T_{i_1 i_2 \dots i_n},\ i_k \in \{0,1\}$, ранга n.

Из нашей конструкции вытекает, что

$$I_{i_1\ldots i_n i_{n+1}} \subset I_{i_1\ldots i_n}, \quad T_{i_1\ldots i_n i_{n+1}} \subset T_{i_1\ldots i_n}. \tag{2.9}$$

Далее, имеем

$$\operatorname{diam}(I_{i_1\ldots i_n}) = 1/2^n. \tag{2.10}$$

Если считать длину основания треугольника T равной единице, то

$$\operatorname{diam}(T_{i_1\ldots i_n}) = 1/(\sqrt{2})^n. \tag{2.11}$$

Из (2.11) вытекает свойство

а) Если для любого n мы обозначим через P_n либо один треугольник ранга n, либо объединение двух прилегающих друг к другу треугольников ранга n, то

$$\operatorname{diam}(P_n) \le 1/(\sqrt{2})^{n-1}. \tag{2.12}$$

Далее, из рисунка видно следующее: треугольники ранга n можно упорядочить так, что выполняется свойство

б) Если два отрезка $I_{i_1\ldots i_n}$ и $I_{j_1\ldots j_n}$ ранга n имеют общий конец, то треугольники $T_{i_1\ldots i_n}$ и $T_{j_1\ldots j_n}$ прилегают друг к другу по общей стороне.

Пусть теперь t - какая-нибудь точка отрезка $I = [0,1]$. Для каждого n точка t принадлежит либо единственному отрезку $I_{i_1\ldots i_n}$ ранга n, либо двум отрезкам $I_{i_1\ldots i_n}$ и $I_{j_1\ldots j_n}$, имеющим точку t своим общим концом.

в) Обозначим через $P_n(t)$ в первом случае треугольник $T_{i_1\ldots i_n}$, а во втором — объединение двух треугольников $T_{i_1\ldots i_n}$ и $T_{j_1\ldots j_n}$, которые в этом случае прилегают друг к другу по общей стороне, в силу свойства б).

Легко видеть, что

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \ldots \supset P_n(t) \supset \ldots, \tag{2.13}$$

причём вследствии (2.12) пересечение всех $P_n(t)$ состоит не более чем из одной точки.

Замечание. Обобщением леммы о последовательности вложенных стягивающихся отрезков является следующее

2.17. Утверждение. *Убывающая последовательность непустых компактов имеет непустое пересечение.* $\square$

Утверждение 2.17. будет доказано в § 8. Следовательно, пересечение $\bigcap\big\{P_n(t) : n \in \mathbb{N}\big\}$ не пусто и состоит из одной точки, которую мы обозначим $f(t)$.

Продолжение доказательства. Итак, соответствие $t \to f(t)$ определяет отображение $f : I \to T$. Покажем прежде всего, что отображение f является сюръекцией. Пусть $x \in T$ — произвольная точка. Возьмём какую-нибудь такую последовательность треугольников

$$T_{i_1} \supset T_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{2.14}$$

что x содержится в каждом элементе $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ этой последовательности (для некоторых x такая последовательность определена однозначно, для других — нет). Последовательности (2.14) соответствует последовательность отрезков

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{2.15}$$

пересечение элементов которой состоит из единственной точки $t \in [0, 1]$.

Из нашего построения следует, что

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset P_n(t) \tag{2.16}$$

для произвольного элемента $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ последовательности (2.14). Поэтому из равенств

$$\bigcap\big\{T_{i_1 i_2 \ldots i_n} : n \in \mathbb{N}\big\} = \{x\}, \quad \bigcap\big\{P_n(t) : n \in \mathbb{N}\big\} = \big\{f(t)\big\}$$

и условия (2.16) вытекает, что $x = f(t)$.

Докажем, наконец, что отображение f непрерывно в произвольной точке $t_0 \in [0, 1]$. Пусть

$$\bigcap\big\{P_n(t_0) : n \in \mathbb{N}\big\} = \big\{f(t_0)\big\} = \{x_0\}. \tag{2.17}$$

Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (2.12) и (2.17) следует существование такого n, что

$$P_n(t_0) \subset O_\varepsilon(x_0). \qquad (2.18)$$

Точка t_0 принадлежит либо единственному отрезку $I_{i_1\ldots i_n}$, либо двум отрезкам $I_{i_1\ldots i_n}$ и $I_{j_1\ldots j_n}$. В первом случае полагаем $I'_n = I_{i_1\ldots i_n}$, а во втором — $I'_n = I_{i_1\ldots i_n} \cup I_{j_1\ldots j_n}$. Обозначим через δ расстояние от t_0 до ближайшего конца отрезка I'_n. Тогда для всех $t \in [0,1] \cap O_\delta(t_0)$ имеем $P_n(t) \subset \big(\text{по определению в}\big) \subset P_n(t_0)$. Следовательно, $f(t) \in P_n(t) \subset P_n(t_0) \subset (2.18) \subset O_\varepsilon(x_0)$, что и требовалось доказать. $\square$

Задачи.

2.1. Доказать, что в метрическом пространстве любая последовательность точек не может иметь более одного предела.

2.2. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.

2.3. Построить непрерывное отображения канторова множества на квадрат.

2.4. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$, непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x, a)$?

2.5. Отображение метрических пространств $f : X \to Y$ называется *изометрическим вложением*, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$. Доказать, что любое изометрическое вложение непрерывно.

2.6. Отображение f метрического пространств X в себя называется *сжимающим*, если существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства X непрерывно.

2.7. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя имеет неподвижную точку.

Дополнительные задачи.

2.1x. Доказать, что изометрическое вложение пространства $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) в себя однозначно определяется образами некоторых $n + 1$ точек, $n \in \mathbb{N}$.

2.2x. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не изометрично $\mathbb{R}^m$ при $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

2.3x. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) изометрично вложено в ℓ_2.

2.4x. Любое ли конечное метрическое пространство изометрически вложимо в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой)? в ℓ_2?

2.5x. Для всякой ли изометрии f пространства ℓ_2 существует точка p такая, что $f(p) = p$ (p — неподвижная точка отображения f)?

2.6x. Доказать, что канторовы множества, получаемые выкидыванием "интервалов различной длины", не изометричны.

2.7x. Может ли пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) быть изометрично своему собственному подмножеству? А пространство ℓ_2?

Лекция 3

Топологические пространства.

Для множества X через 2^X обозначается множество всех его подмножеств.

3.1. Определение. Пара $(X, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T} \subset 2^X$, называется *топологическим пространством*, если $\mathcal{T}$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(2) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;

(3) объединение произвольного семейства $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Говорят, что $\mathcal{T}$ — это топология на множестве X. Обычно топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ обозначается через X. Из тех же соображений краткости мы будем говорить „пространство“ вместо „топологическое пространство“. Элементы множества X называются *точками* пространства X.

3.2. Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами* пространства X, а дополнения к ним — *замкнутыми* множествами.

Из свойств (1), (2) и (3) вытекают свойства:

(1') $\varnothing$ и X — замкнутые множества пространства X;

(2') объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

(3') пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

3.3. Семейство всех топологий на множестве X упорядочено отношением включения. Это означает, что

$\mathcal{T}_1 \le \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, т.е. всякое множество U, открытое в топологии $\mathcal{T}_1$, открыто и в топологии $\mathcal{T}_2$.

При этом говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ *слабее* топологии $\mathcal{T}_2$, а топология $\mathcal{T}_2$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}_1$. Из Определения 1.1 вытекает, что пара $\{\varnothing, X\}$ содержится в любой топологии $\mathcal{T}$ на X. Ясно также, что эта пара является топологией на X, следовательно, $\{\varnothing, X\}$ — *наименьшая* или *слабейшая* на X топология.

Семейство 2^X всех подмножеств множества X также является топологией на X. Из Определения 3.1 вытекает, что это — *наибольшая* или *сильнейшая* топология на X. Эта топология называется *дискретной.* В дискретном пространстве всякое множество одновременно открыто и замкнуто.

3.4. Подпространства. Пусть $\mathcal{T}$ — топология на X и $Y \subset X$. Тогда, как легко видеть, семейство

$$\mathcal{T}|Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

является топологией на множестве Y. Пространство $(Y, \mathcal{T}|Y)$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathcal{T})$. Обычно говорят: „Y есть подпространство пространства X“.

3.5. Окрестности. Произвольное открытое множество, содержащее множество $M \subset X$, называется *окрестностью* множества M в пространстве X. Окрестности множества M обычно обозначаются символом OM (иногда UM). Из Определения 3.1.(2) вытекает, что пересечение конечного числа окрестностей множества M является его окрестностью.

3.6. Предложение. *Множество M открыто в X тогда и только тогда, когда для всякой точки $x \in M$ существует окрестность $Ox \subset M$.*

Доказательство. Пусть M открыто и $x \in M$. Тогда $Ox = M \subset M$. Наоборот, пусть для любой точки $x \in M$ существует $Ox \subset M$. В этом случае множество

$$M = \bigcup \{Ox : x \in M\}$$

открыто согласно Определению 3.1 (3). $\square$

3.7. Если точка $x \in X$ имеет окрестность, состоящую из одной точки, то x называется *изолированной* точкой пространства X. Пространство X дискретно тогда и только тогда, когда все его точки изолированы.

3.8. Определение. Пусть X — пространство и $M \subset X$. Множество

$$\bigcap \{F : F \quad \text{замкнуто в} \quad X \quad \text{и} \quad M \subset F\},$$

замкнутое согласно 3.2 (3'), называется *замыканием* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Cl}_X(M) = \mathrm{Cl}(M)$.

Таким образом, $\mathrm{Cl}(M)$ — это наименьшее замкнутое подмножество пространства X, содержащее M.

Множество

$\bigcup\{U : U \quad \text{открыто в} \quad X \quad \text{и} \quad U \subset M\}$,

открытое согласно 3.1.(3), называется *внутренностью* множества M в X и обозначается через $\mathrm{Int}_X(M) = \mathrm{Int}(M)$.

Ясно, что $\mathrm{Int}(M)$ — это наибольшее открытое подмножество пространства X, содержащееся в M.

3.9. Предложение. *Пусть X — пространство и $M \subset X$. Тогда*

$\mathrm{Cl}(M) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus M)$. $\square$

3.10. Предложение. *Пусть F — замкнутое подмножество пространства X. Тогда* $\mathrm{Cl}(F) = F$. $\square$

3.11. Предложение. *Пусть U — открытое подмножество пространства X. Тогда* $\mathrm{Int}(U) = U$. $\square$

Из Предложений 3.10 и 3.11 вытекает

3.12. Предложение. *Пусть $M \subset X$. Тогда*

$\mathrm{Cl}\big(\mathrm{Cl}(M)\big) = \mathrm{Cl}(M), \;\; \mathrm{Int}\big(\mathrm{Int}(M)\big) = \mathrm{Int}(M)$. $\square$

Следующее утверждение также очевидно.

3.13. Предложение. *Если M и N — такие подмножества пространства X, что $M \subset N$, то*

$\mathrm{Cl}(M) \subset \mathrm{Cl}(N), \; \mathrm{Int}(M) \subset \mathrm{Int}(N)$. $\square$

3.14. Определение. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset X$, если существует окрестность $Ox \subset M$. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если $Ox \cap M \neq \varnothing$ для всякой окрестности Ox точки x. Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества M, если она — его точка прикосновения, но не внутренняя точка. Множество граничных точек называется *границей* множества M и обозначается символом $\mathrm{Bd}(M)$.

3.15. Предложение. *Множество всех внутренних точек множества $M \subset X$ совпадает с* $\mathrm{Int}(M)$.

Доказательство. Из Определения 3.8 вытекает, что всякая внутренняя точка множества M принадлежит $\mathrm{Int}(M)$. Наоборот, если $x \in \mathrm{Int}(M)$, то $Ox = \mathrm{Int}(M) \subset M$. $\square$

Предложения 3.9 и 3.15 влекут

3.16. Предложение. *Множество всех точек прикосновения множества $M \subset X$ совпадает с* $\mathrm{Cl}(M)$. $\square$

Из Предложений 3.15 и 3.16 вытекает, что

$$\mathrm{Bd}(M) = \mathrm{Cl}(M) \setminus \mathrm{Int}(M). \tag{3.1}$$

3.17. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется открытой *базой* X, если всякое открытое множество пространства X является объединением некоторых элементов из $\mathcal{B}$.

3.18. Предложение. *Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям:*

(1) *всякая точка $x \in X$ принадлежит некоторому элементу $U \in \mathcal{B}$;*

(2) *если $x \in U_1 \cap U_2$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, то существует такой элемент $U_3 \in \mathcal{B}$, что $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*

Тогда $\mathcal{B}$ является базой некоторой (однозначно определённой) топологии на множестве X.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \right\} \tag{3.2}$$

и покажем, что $\mathcal{T}$ является топологией на X. Пустое множество принадлежит $\mathcal{T}$, поскольку $\varnothing = \bigcup \mathcal{B}_0$ для $\mathcal{B}_0 = \varnothing \subset \mathcal{B}$. Далее, $X \in \mathcal{T}$ согласно 3.18 (1). Условие 3.1 (3) выполнено автоматически. Теперь покажем, что пересечение двух элементов U_1 и U_2 из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Пусть $U_i = \bigcup \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2$. Тогда

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup \mathcal{B}_1\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{B}_2\right) = \bigcup \left\{V \cap V', \text{ где } V \in \mathcal{B}_1,\ V' \in \mathcal{B}_2\right\}.$$

Но каждое множество вида $V \cap V'$ согласно 3.18 (2) является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Таким образом, и пересечение $U_1 \cap U_2$ является объединением множеств $W \in \mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию 3.1 (2).

Наконец, если семейство $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии, то эта топология определена однозначно. Но мы сейчас доказали, что семейство $\mathcal{T}$ из (3.2) является топологией с базой $\mathcal{B}$. $\square$

3.19. Определение. Семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств пространства X называется его открытой *предбазой*, если множество всевозможных конечных пересечений $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ элементов $U_i \in \mathcal{B}$ является базой пространства X.

3.20. Определение. Семейство v подмножеств множества X называется *покрытием* множества X, если $X = \bigcup \left\{V : V \in v\right\}$.

Покрытие v пространства X называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств. Множество всех открытых покрытий пространства X обозначается через $\operatorname{cov}(X)$.

3.21. Предложение. *Пусть X — множество и v — произвольное его покрытие. Тогда v является предбазой некоторой однозначно определённой топологии на множестве X.*

Доказательство предоставляется читателю. Оно сводится к тому, что семейство $\mathcal{B}$ всевозможных конечных пересечений элементов из v удовлетворяет условиям Предложения 3.18.

3.1 Некоторые примеры.

3.22. Пример.

1) Простейшими примерами топологических пространств являются $X = \varnothing$ и множество X, состоящее из одной точки a. Единственной топологией на

этих множествах являются пары $(\varnothing, X)$.

2) Сложнее дело обстоит с множеством X, состоящим из двух различных точек a и b. На этом множестве имеются четыре различные топологии. Перечислим их.

$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ — *слипшееся двоеточие*;

$\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$ — *связное двоеточие*;

$\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$ — *связное двоеточие*;

$\mathcal{T}_4 = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\big\}$.

3) Более сложную ситуацию мы получаем в случае множества X, состоящего из n различных точек. Из Определения 3.1 вытекает, что число различных топологий на этом множестве не превосходит 2^{2^n}.

3.2 Топология метрического пространства.

3.23.1. Предложение. *Множество всех ε-окрестностей $O_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, точек x метрического пространства (X, ρ) образует базу некоторой топологии на X.*

Доказательство. Достаточно показать, что множество

$\mathcal{B} = \big\{O_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0, x \in X\big\}$

удовлетворяет условиям Предложения 3.18. Условие 3.18 (1) выполнено очевидным образом. Пусть теперь

$$x \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2). \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекает, что

$$r_i = \rho(x, x_i) < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - r_1, \quad \varepsilon_2 - r_2\}. \tag{3.5}$$

Условие (3.4) влечёт, что $\varepsilon > 0$, а из аксиомы треугольника получаем

$O_\varepsilon(x) \subset O_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_{\varepsilon_2}(x_2)$.

Таким образом, условие 3.18 (2) также выполнено. $\square$

Топологию из Предложения 3.23.1 будем обозначать через $\mathcal{T}_\rho$ и будем называть топологией, *порожденной метрикой* ρ, или *метрической топологией.*

Таким образом, Предложение 3.23.1 можно перефразировать следующим образом.

3.23.2. Предложение. *Множество U открыто в метрической топологии $\mathcal{T}_\rho$, если для всякой точки $x \in U$ найдётся открытый ε-шар $O_\varepsilon(x)$ с центром в x, содержащийся в U.* $\square$

3.23.3. Замечание. Если мы наделяем эвклидово пространство E^n метрикой ρ, определяемой формулой (1.1), то базу топологии $\mathcal{T}_\rho$ образуют:

1) ε-интервалы, т.е. интервалы радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами в точках x прямой $\mathbb{R} = E^1$;

2) ε-круги плоскости E^2;

3) ε-шары пространства E^3.

3.23.4. Предложение. *Если (X, ρ) - метрическое пространство и $Y \subset X$, то топологии $\mathcal{T}_\rho|Y$ и $\mathcal{T}_{\rho|Y}$ на Y совпадают.*

Доказательство сводится к рутинной проверке того, что для всякой точки $y \in Y$ множество $O_\varepsilon(y) \cap Y$ совпадает с ε-окрестностью точки y в метрике $\rho|Y$. $\square$

Метрические пространства дают нам большой запас топологических пространств, но не всякая топология порождается метрикой.

3.23.5. Задача. Доказать, что топологии $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$ из Примера 3.22 2) не являются метрическими топологиями.

Задачи.

3.1. Найти метрику (линейный порядок), которая порождает стандартную (евклидову) топологию на $\mathbb{R}$ (ее базу образуют всевозможные интервалы).

3.2. Доказать, что любое открытое подмножество прямой является объединением сченого числа интервалов.

3.3. Определить иерархию топологий, порожденных метриками из задачи 1.1.

3.4. Пусть $(X, <)$ — линейно упорядоченное множество. Будет ли базой некоторой топологии совокупность подмножеств:

(1) X, $\{x \in X : a < x < b\}$, $\{x \in X : a < x\}$, $\{x \in X : x < b\}$;

(2) $\{x \in X : a \leq x < b\}$, $\{x \in X : a \leq x\}$;

(3) X, $\{x \in X : a \leq x < b\}$,

где $a, b \in X$? Можно ли некоторые подмножества исключить из баз?

3.5. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

3.6. Сравнить на $\mathbb{R}$ евклидову топологию; топологию, базой которой являются множества $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая Зоргенфрея); и топологию, замкнутыми множествами которой являются $\mathbb{R}$ и множества корней многочленов одной переменной (топология Зарисского).

3.7. Доказать:

(1) $\mathrm{Cl}A = A \cup \mathrm{Bd}A$;

(2) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Bd}A$;

(3) $\mathrm{Bd}A = \mathrm{Cl}A \setminus \mathrm{Int}A$;

(4) $X \setminus \mathrm{Bd}A = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \subset A$;

(6) A открыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \cap A = \emptyset$;

(7) $A^d \setminus A = \mathrm{Bd}A \setminus A$, где A^d — предельные точки A (точка x подмножества A называется предельной, если для ее любой окрестности Ox имеем $(Ox \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$);

(8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

3.8. Справедливы ли следующие соотношения:

(1) если $A \subset B$, то $\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}A \subset \mathrm{Cl}B$);

(2) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cap B) = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cap B) = \mathrm{Bd}A \cap \mathrm{Bd}B$);

(3) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$);

(4) $\mathrm{Cl}A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A)$, $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$;

(5) $\mathrm{Bd}(A \cap B) \subset \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$;

(6) $\mathrm{Bd}(X \setminus A) = \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}A) \subset \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Bd}A$;

(7) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3.9. Привести пример метрического пространства и открытого шара в нем таких, что замыкание шара не совпадает с замкнутым шаром того же радиуса.

3.10. Доказать, что подмножество A метрического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда предел всякой сходящейся последовательности точек из множества A принадлежит также множеству A (т.е. точка x принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, когда $\inf\{\rho(x, y) : y \in A\} = 0$).

3.11. Найти внутренность отрезка, канторова множества в $\mathbb{R}$ в топологиях из задачи 3.5.

3.12. Подмножество пространства ℓ_2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \leq x_k \leq 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом.* Доказать, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ_2; внутренность гильбертова куба в ℓ_2 — пустое множество.

Дополнительные задачи.

3.1х. Доказать, что конечномерное подпространство нормируемого линейного пространства замкнуто.

3.2х. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии из $\mathbb{N}$ образуют базу некоторой топологии на $\mathbb{N}$. С ее помощью доказать бесконечность простых чисел.

3.3х. Сравнить евклидову топологию на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и топологию $\mathbb{Q}$, порожденную p-адической метрикой на $\mathbb{Q}$ (Задача 1.2х).

3.4х. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int.

3.5х. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

3.6х. Сколько существует различных топологий на конечном множестве из n элементов?

Лекция 4

Непрерывные отображения топологических пространств.

4.1. Определение. Отображение $f : X \to Y$ пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности Oy точки $y = f(x)$ найдётся такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Oy$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

4.2. Предложение. *Для отображения $f : X \to Y$ следующие условия равносильны*:

1) *f непрерывно*;

2) *прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого в Y множества U открыт в X*;

3) *прообраз $f^{-1}(F)$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X*;

4) $f\big(\mathrm{Cl}(Z)\big) \subset \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$ *для всякого множества $Z \subset X$*.

Доказательство. Проверим последовательность импликаций: 1) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 4). Возьмём $x \in \mathrm{Cl}(Z)$. Надо показать, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$, т.е. что $f(x)$ является точкой прикосновения множества $f(Z)$. В силу непрерывности f, для произвольной окрестности $Of(x)$ существует такая окрестность Ox, что $f(Ox) \subset Of(x)$. Поскольку $x \in \mathrm{Cl}(Z)$, имеем $Ox \cap Z \neq \varnothing$. Возьмём точку $z \in Ox \cap Z$. Тогда $f(z) \in f(Ox \cap Z) \subset f(Ox) \cap f(Z) \subset Of(x) \cap f(Z)$. Следовательно, $Of(x) \cap f(Z) \neq \varnothing$, т.е. $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f(Z)\big)$.

4) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что существует замкнутое множество $F \subset Y$,

прообраз $f^{-1}(F)$ которого не замкнут в X. Существует точка

$$x \in \mathrm{Cl}\big(f^{-1}(F)\big) \setminus f^{-1}(F). \tag{4.1}$$

Из 4) вытекает, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\big(f\big(f^{-1}(F)\big)\big) = \mathrm{Cl}(F) = F$. С другой стороны, $f(x) \notin F$ согласно (4.1). Получили противоречие.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) вытекает из равенства (2.3). Наконец, 2) $\Rightarrow$ 1). Берем точку $x \in X$ и окрестность $Of(x)$. Множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ открыто согласно 2). Поскольку $x \in f^{-1}\big(Of(x)\big)$, множество $f^{-1}\big(Of(x)\big)$ и является окрестностью Ox, для которой $f(Ox) = f\big(f^{-1}\big(Of(x)\big)\big) = Of(x)$. $\square$

Следующее утверждение дополняет Предложение 4.2.

4.3. Предложение. *Для непрерывности отображения $f : X \to Y$ достаточно, чтобы были открыты прообразы $f^{-1}(U)$ элементов U некоторой предбазы $\mathcal{B}$ пространства Y.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, а $Of(x)$ — произвольная окрестность. Существуют такие элементы $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{B}$, что $f(x) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset Of(x)$. Множества $f^{-1}(U_i)$ открыты по условию. Полагая $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i)$, имеем $f(Ox) \subset Of(x)$. $\square$

4.1 Примеры непрерывных отображений.

4.4. Примеры.

1. Постоянное отображение $f = \mathrm{const}_{y_0} : X \to Y$, переводящее всё пространство X в точку $y_0 \in Y$. Прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset Y$ либо пуст, либо равен X.

2. Проектирование $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие точке (x_1, x_2) её первую координату.

3. Любое непрерывное отображение метрических пространств.

4. Произвольному топологическому пространству X можно сопоставить

его дискретный дубликат X_d, т.е. пространство на том же множестве X, наделенное дискретной топологией (см. п. 3.3). Тогда тождественное отображение $\mathrm{id} : X_d \to X$ непрерывно.

Топология пространства X_d порождается метрикой примера 1.1.3 ($x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) = 1$).

Таким образом, имеет место

4.5. Предложение. *Всякое топологическое пространство X является непрерывным образом метрического пространства.* $\square$

Из условия 2) Предложения 4.2 непосредственно вытекает

4.6. Предложение (теорема о сложной функции). *Если отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ непрерывны, то непрерывна и их композиция $g \circ f : X \to Z$.* $\square$

Пусть Z — подпространство пространства X. Обозначим через $i_Z : Z \to X$ отображение вложения, т.е. отображение, ставящее в соответствие точке $z \in Z$ её саму. Из определения подпространства (п.3.4) вытекает

4.7. Предложение. *Отображение вложения $i_Z : Z \to X$ непрерывно.* $\square$

4.8. Предложение. *Ограничение $f|Z$ непрерывного отображения $f : X \to Y$ на подпространство $Z \subset X$ непрерывно.*

Утверждение вытекает из Предложения 4.6 и равенства $f|Z = f \circ i_Z$. $\square$

4.9. Предложение. *Пусть пространство X является объединением конечного числа своих замкнутых подмножеств F_i, $i = 1, \ldots, k$, и пусть $f : X \to Y$ — такое отображение, что $f|F_i$ непрерывно для каждого i. Тогда отображение f непрерывно.*

Доказательство. Возьмём произвольное замкнутое множество $\Phi \subset Y$. Тогда

$$f^{-1}(\Phi) = \bigcup_{i=1}^{k} \big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi).$$

В самом деле, включение $\supset$ очевидно. Пусть теперь $x \in f^{-1}(\Phi)$. Тогда x

принадлежит некоторому F_i и, значит, $x \in \big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi)$. Из условия 3) Предложения 4.2 и непрерывности отображений $f|F_i$ вытекает замкнутость множеств $\big(f|F_i\big)^{-1}(\Phi)$. Поэтому замкнуто и $f^{-1}(\Phi)$. Значит, f непрерывно согласно Предложению 4.2. $\square$

Предложение 4.9 можно переформулировать как теорему о *склейке отображений.*

4.10. Теорема. *Пусть пространство X является объединением своих замкнутых подпространств F_1 и F_2. Предположим, что даны непрерывные отображения $f_i : F_i \to Y,\ i = 1, 2$, удовлетворяющее условию $f_1|F_1 \cap F_2 = f_2|F_1 \cap F_2$. Тогда отображение $f : X \to Y$, определённое равенством*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } \ x \in F_1; \\ f_2(x), & \text{если } \ x \in F_2; \end{cases}$$

непрерывно. $\square$

4.11. Определение. Пусть $f : X \to Y$ — взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y. Пусть, кроме того, непрерывны отображение f и обратное к нему отображение f^{-1}. Тогда f называется *гомеоморфизмом,* а пространства X и Y — *гомеоморфными.*

Из Предложения 4.3 вытекает

4.12. Предложение. *Для того, чтобы взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы некоторая предбаза $\mathcal{B}$ пространства X отображалась на предбазу пространства Y.* $\square$

4.2 Примеры гомеоморфных пространств.

4.13. Примеры.

1. Все отрезки числовой прямой гомеоморфны отрезку $[0, 1]$.
2. Все интервалы числовой прямой гомеоморфны интервалу $(0, 1)$.
3. *Открытым диском* в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ радиуса

r_0 называется множество

$$D^n_{\mathbf{x}_0,r_0} = \Big\{\mathbf{x} = \big(x_1,\ldots,x_n\big) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - x_i^0\big)^2 < r_0^2\Big\}.$$

Открытый диск с центром в начале координат и радиуса 1 будем обозначать через D^n.

Доказать, что все открытые диски в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны диску D^n.

4. Пусть S^{n-1} – сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1 с центром в начале координат, т.е.

$$S^{n-1} = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\big\}.$$

Множество $E_{n-1} = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1} : x_n = 0\big\}$ назовём *экватором* сферы S^{n-1}. Экватор разбивает сферу S^{n-1} на две полусферы S^{n-1}_+ и S^{n-1}_-:

$$S^{n-1}_+ = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1} : x_n > 0\big\};$$

$$S^{n-1}_- = \big\{(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1} : x_n < 0\big\}.$$

Эти полусферы гомеоморфны.

5. Диск D^{n-1} гомеоморфен полусфере S^{n-1}_+. Гомеоморфизм $h : D^{n-1} \to S^{n-1}_+$ определяется равенством

$$h\big(x_1,\ldots,x_{n-1}\big) = \Big(x_1\ldots,x_{n-1},\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\Big).$$

Обратное отображение h^{-1} задаётся равенством

$$h^{-1}\big(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\big) = \big(x_1,\ldots,x_{n-1}\big).$$

6. *Диск D^n гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in D^n$ положим

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{2}\|\mathbf{x}\|\big)\cdot\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \text{ если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, \text{ если } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}.$$

Ясно, что $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ — биекция. Непрерывность f вытекает из непрерывности функции tg, непрерывности нормы $\|\cdot\|$ и непрерывности умножения $(t,\mathbf{x}) \to t\mathbf{x}$.

Обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to D^n$ задаётся следующим образом:

$$f^{-1}(\mathbf{x}) = \Big\{ \tfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\big(\|\mathbf{x}\|\big)\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \text{ если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{0}, \text{ если } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad \Box$$

Непрерывность отображений f и f^{-1} доказывается с помощью следующего утверждения:

4.14. Предложение. *Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда* *отображение* $f = f_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *задаваемое формулой*

$$f(\mathbf{x}) = g\big(||\mathbf{x}||\big) \cdot \mathbf{x}, \tag{4.2}$$

непрерывно.

Доказательство. Проверим непрерывность отображения f в точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Введём для краткости следующие обозначения: $||x_i|| = y_i,\ g\big(||x_i||\big) = z_i$. Пусть последовательность $\mathbf{x}_i,\ i \in \mathbb{N}$, сходится к $\mathbf{x}_0$. Следовательно, $y_i \to y_0$. Это означает, что $y_i = y_0 + a_i$, где a_i - бесконечно малая последовательность (бмп).

Из непрерывности функции g вытекает, что $z_i \to z_0$. Следовательно, $z_i = z_0 + b_i$, где b_i — бмп. Тогда $z_i \cdot y_i = (z_0 + b_i)(y_0 + a_i) = z_0 y_0 + z_0 \cdot a_i + b_i y_0 + b_i a_i = z_0 y_0 + c_i$. Последовательность c_i есть бмп как сумма трёх бмп.

Значит, последовательность $z_i y_i$ сходится к $z_0 y_0$. А отсюда вытекает, что последовательность $g\big(||\mathbf{x}_i||\big) \cdot \mathbf{x}_i$ сходится к $g\big(||\mathbf{x}_0||\big) \cdot \mathbf{x}_0$. $\square$

4.15. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной (вещественной) функцией.*

Множество $U \subset X$ называется *функционально открытым* (соответственно *функционально замкнутым*), если существует такая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, что

$U = f^{-1}(0, +\infty)$ $\big($соответственно $U = f^{-1}[0, +\infty)\big)$.

4.16. Предложение. *Функционально открытое множество открыто. Функционально замкнутое множество замкнуто. Дополнение до функционально открытого множества функционально замкнуто.*

Доказательство. В силу Предложения 4.2, в доказательстве нуждается только третье утверждение. Пусть $U = f^{-1}(0, +\infty)$ для некоторой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда $X \setminus U = f^{-1}(-\infty, 0]$. Функция $g = -f$ непрерывна и $X \setminus U = g^{-1}[0, +\infty)$. $\square$

Из Теоремы 4.10 и Предложения 4.16 вытекает

4.17. Предложение. *Если* $f : X \to \mathbb{R}$ *и* $g : X \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функ-*

ции, то функции $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ *и* $|f| = \max\{f, -f\}$ *также непрерывны.* $\square$

4.18. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *сходящейся* к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для каждой точки $x \in X$ последовательность $\big(f_n(x) : n \in \mathbb{N}\big)$ сходится к $f(x)$.

Сходящаяся последовательность непрерывных функций не обязана сходиться к функции непрерывной. В качестве примера можно рассмотреть следующую последовательность функций $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : f_n(x) = x^n$. Последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к функции f, равной нулю на полуинтервале $[0, 1)$ и единице в точке $x = 1$.

4.19. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходится к функции* $f : X \to \mathbb{R}$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0 \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{4.3}$$

4.20. Теорема. *Если последовательность непрерывных функций* $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$*, равномерно сходится к функции* $f : X \to \mathbb{R}$*, то* f *непрерывна.*

Доказательство. Для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ надо найти такую окрестность Ox_0, что

$$x \in Ox_0 \Rightarrow \big|f(x_0) - f(x)\big| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

В силу равномерной сходимости последовательности (f_n), существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon/3 \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0 \quad \text{и} \quad x \in X. \tag{4.5}$$

Поскольку функция f_{n_0} непрерывна, существует окрестность O_{x_0}, обладающая свойством

$$x \in Ox_0 \Rightarrow \big|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)\big| < \varepsilon/3. \tag{4.6}$$

Тогда для $x \in Ox_0$ имеем

$\left|f(x_0)-f(x)\right| = \left|f(x_0)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f(x)\right| \le \left|f(x_0)-f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| <$ (согласно (4.5) и (4.6)) $<$ $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Таким образом, свойство (4.4) проверено. $\square$

Для дальнейшего нам потребуется утверждение, относящееся к сходимости последовательностей в метрических пространствах.

4.21. Предложение. *Пусть X — метрическое пространство и $M \subset X$. Предположим, что последовательность $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к точке $x \in X$. Тогда $x \in \mathrm{Cl}(M)$.*

Доказательство. Если $x \notin \mathrm{Cl}(M)$, то x принадлежит открытому множеству $X \setminus \mathrm{Cl}(M)$. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus \mathrm{Cl}(M)$, т.е. $O_\varepsilon(x) \cap \mathrm{Cl}(M) = \varnothing$. Но тогда $O_\varepsilon(x)$ не содержит ни одного элемента x_n нашей последовательности, что противоречит сходимости этой последовательности к точке x. $\square$

4.22. Следствие. *Предположим, что $x_n \in O_\varepsilon(x_0)$ и последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится к точке x. Тогда $\rho(x_0, x) \le \varepsilon$.*

Доказательство. Предположим, что $\rho(x_0, x) > \varepsilon$. Положив $\delta = \rho(x_0, x) - \varepsilon$, согласно аксиоме треугольника получаем $O_\varepsilon(x_0) \cap O_\delta(x) = \varnothing$, что противоречит Предложению 4.21. $\square$

Дадим внутренний критерий равномерной сходимости.

4.23. Определение. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$, называется *фундаментальной*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad m, n \ge n_0, \quad n < m, \quad x \in X. \tag{4.7}$$

4.24. Теорема. *Всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к непрерывной функции f.*

Доказательство. При фиксированном $x \in X$ свойство (4.7) является условием фундаментальности числовой последовательности $f_n(x),\ n \in \mathbb{N}$. По критерию Коши эта последовательность сходится к некоторой точке $f(x)$. Итак, функцию f мы определили.

Согласно Теореме 4.20 остаётся проверить, что последовательность $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к f. Возьмём ε', удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда выполняется условие (4.7'), получающееся из (4.7) заменой ε на ε'. Для $m > n_0$ положим $a_m(x) = \bigl|f_m(x) - f_{n_0}(x)\bigr|$. Последовательность $\bigl(a_m(x),\ m \geq n_0\bigr)$ сходится к $\bigl|f(x) - f_{n_0}(x)\bigr|$, поскольку $f_m(x)$ сходится к $f(x)$. Тогда из (4.7') и Следствия 4.22 вытекает, что

$\bigl|f(x) - f_{n_0}(x)\bigr| \leq \varepsilon' < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$.

Итак, условие (4.3) равномерной сходимости проверено. $\square$

4.25. Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha,\ \alpha \in A$, — семейство отображений множества X в пространства Y_α. Тогда семейство

$$\bigl\{f_\alpha^{-1}(U) : U \quad \text{открыто в} \quad Y_\alpha, \quad \alpha \in A\bigr\} \tag{4.8}$$

является покрытием множества X и согласно Предложению 3.22 — предбазой некоторой топологии $\mathcal{T}$ на X. Относительно этой топологии все отображения f_α непрерывны, в силу Предложения 4.3. При этом, $\mathcal{T}$ — наименьшая (слабейшая) топология на X, обладающая этим свойством. Назовём $\mathcal{T}$ *слабой топологией относительно семейства* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Легко видеть, что в определении (4.8) достаточно ограничиться открытыми множествами $U \subset Y_\alpha$ из некоторой базы пространства Y_α.

4.26. Определение. Пусть $f : X \to Y$ — отображение пространства X на множество Y. Тогда семейство

$\mathcal{T} = \bigl\{U \subset Y : f^{-1}(U) \quad \text{открыто}\bigr\}$

является топологией на Y, очевидно, сильнейшей среди всех, для которых отображение $f : X \to Y$ непрерывно. Назовём $\mathcal{T}$ *факторной топологией* (или *фактортопологией*), $(Y, \mathcal{T})$ — *факторпространством* пространства X, а f — *факторным отображением.*

4.27. Факторные отображения естественно возникают при разбиениях пространства X на непересекающиеся множества. В связи с этим напомним определение отношения эквивалентности, известное читателю из курса Высшей алгебры.

Пусть X — множество и $\mathcal{R} \subset X \times X$. Множество $\mathcal{R}$ называется *бинарным отношением* на множестве X. Две точки $x, y \in X$ находятся в отношении $\mathcal{R}$ (обозначение: $x\mathcal{R}y$), если $(x, y) \in \mathcal{R}$. Предположим, что отношение $\mathcal{R}$ обладает следующими свойствами:

1) $x\mathcal{R}x$ для любого $x \in X$ (*рефлексивность*);

2) $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (*симметричность*);

3) $x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (*транзитивность*).

Тогда оно называется отношением *эквивалентности.* Отношение эквивалентности часто обозначается символом $\sim$.

Множество X распадается на попарно непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов — *классы эквивалентности.*

Если $\mathcal{R}$ — отношение эквивалентности на X, то класс эквивалентности элемента $x \in X$ будем обозначать через $\mathcal{R}(x)$. Множество всех классов эквивалентности отношения $\mathcal{R}$ обозначается через $X/\mathcal{R}$ и называется *фактормножеством* пространства X относительно $\mathcal{R}$. Фактормножество $X/\mathcal{R}$ является дизъюнктным покрытием (разбиением) множества X. Наоборот, всякое разбиение множества X определяет на нём отношение эквивалентности.

Факторотображение $f : X \to X/\mathcal{R}$ переводит элемент $x \in X$ в множество $f(x) = \mathcal{R}(x)$, а фактортопология определяется следующим образом: множество $U \subset X/\mathcal{R}$ открыто тогда и только тогда, когда объединение

$$\bigcup\big\{\mathcal{R}(x) \in X/\mathcal{R} : \mathcal{R}(x) \in U\big\}$$

является открытым подмножеством пространства X.

4.3 Примеры факторпространств.

4.28. Примеры.

1. Возьмём разбиения $\mathcal{R}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ на два множества $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ иррациональных и рациональных чисел соответственно. Тогда факторможество $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ состоит из двух точек a и b. Что касается фактортопологии, это топология „слипшегося двоеточия“, т.е. слабейшая топология $\{\varnothing,\ \mathbb{R}/\mathcal{R}\}$ на факторможестве.

2. Разобьём квадрат $Q \subset \mathbb{R}$ с вершинами $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$ на вертикальные отрезки. Получающееся факторпространство гомеоморфно отрезку $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

3. Разбиение $\mathcal{R}$ отрезка $[0,1]$ состоит из одноточечных множеств интервала $(0,1)$ и двухточечного множества $\{0,1\}$. Тогда факторпространство $[0,1]/\mathcal{R}$ гомеоморфно окружности S^1.

4. Разбиение $\mathcal{R}$ замкнутого круга
$B^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$
состоит из одноточечных множеств диска $D^2 \subset B^2$ и бесконечного множества $S^1 = B^2 \setminus D^2$.

Доказать, что факторпространство $B^2/\mathcal{R}$ гомеоморфно сфере S^2.

Задачи.

4.1. Следующие условия на отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — непрерывно;

(d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\mathrm{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}B)$;

(e) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}B)$.

4.2. Показать, что непрерывные функции $f : X \to \mathbb{R}$ образуют линейное пространство по отношению к сложению и умножению на числа и кольцо по отношению к сложению и умножению.

Показать, что функция $(1/f)(x) = 1/f(x)$ непрерывна, если функции f непрерывна, и $f(x) \neq 0$ для любых $x \in X$.

Будет ли непрерывна точная верхняя (нижняя) грань $\sup\{f_n\}(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ $(\inf\{f_n\}(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\})$ счетного семейства f_n, $n \in \mathbb{N}$, непрерывных функций?

4.3. Проверьте, что если тождественное отображение множества X с топологией τ_2 в X с топологией τ_1 непрерывно, то $\tau_1 \subset \tau_2$ (топология τ_2 на X сильнее топологии τ_1).

4.4. Докажите, что любое замкнутое (соответственно открытое) подмножество метрического пространства функционально замкнуто (соответственно функционально открыто).

4.5. Привести пример непрерывного биективного отображения $f : X \to Y$ пространств X и Y, не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли считать $X = Y$?

4.6. Следующие условия на биективное отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — гомеоморфизм;

(b) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f(O)$ открыто;

(c) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f(F)$ замкнуто;

(d) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(O)$ открыто;

(e) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

4.7. Если $f : X \to Y$ — гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ выполнено:

(a) $f(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}(f(A))$;

(b) $f(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}(f(A))$;

(c) $f(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}(f(A))$.

4.8. Доказать, что любое сюръективное изометрическое вложение — гомеоморфизм.

4.9. Постройте гомеоморфизмы:

(a) $[0, 1]$ на $[a, b]$, $a < b$;

(b) $(0, 1]$ на $[0, 1)$;

(c) $(0, 1)$ на $\mathbb{R}$.

Доказать, что $[0, 1]$, $[0, 1)$ и $(0, 1)$ попарно не гомеоморфны.

4.10. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$;

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$;

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\}$;

(g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus (0, 0, 1)$ (сфера S^2 без точки).

4.11. Описать все гомеоморфизмы числовой прямой (отрезка $[0, 1]$).

4.12. Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости гомеоморфна отрезку $[0, 1]$. Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости гомеоморфна окружности S^1.

4.13. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,1]\}$;

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y = 0\}$.

4.14. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.15. Докажите, что квадрат $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.16. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{x_k : k = 1, \dots, n\}$ (все точки различны) гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{D_k : k = 1, \dots, n\}$, где D_k — попарно дизъюнктные замкнутые круги.

4.17. В шаровом слое просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару в пространстве.

4.18. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.

4.19. Дайте полную классификацию (с точностью до гомеоморфизма) открытых подмножеств прямой.

4.20. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не вкладывается в $\mathbb{Z}$.

4.21. Доказать, что прямая в евклидовой топологии, прямая в топологии Зарисского и прямая Зоргенфрея попарно не гомеоморфны. Можно ли вложить одно из пространств в другое?

4.22. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение, и $\mathcal{R}$ разбиение X на множества $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Докажите, что существует непрерывная биекция $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ такая, что $f = \bar{f} \circ q$, где q — факторотображение X на $X/\mathcal{R}$.

4.23. Что является факторпространством прямой $\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$?

4.24. Если S' разбиение пространства X, S'' разбиение пространства X/S', то факторпространство $(X/S')/S''$ гомеоморфно X/T, где T — разбиение пространства X на прообразы элементов разбиения S'' при факторотображении $X \to X/S'$.

4.25. Определите разбиение отрезка I, факторпространство по которому гомеоморфно квадрату I^2.

4.26. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

(a) $\mathbb{R}^n$,

(b) $\mathbb{R}^n/B^n$, $B^n = \left\{\mathbf{x} = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1\right\}$, (стягивание шара в точку),

(c) $\mathbb{R}^n/I^n$ (стягивание куба в точку).

4.27. Докажите, что факторпространства B^2 по следующим отношениям эквивалентности гомеоморфны B^2:

(a) $(x, y) \sim (-x, -y)$,

(b) $(x, y) \sim (x, -y)$.

4.28. Докажите, что факторпространство замкнутого шара B^n по его разбиению на одноточечные подмножества открытого шара D^n и граничную сферу S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Дополнительные задачи.

4.1х. Будет ли невырожденное аффинное отображение нормированного пространства в себя гомеоморфизмом?

4.2х. Пусть X пространство без изолированных точек. Существует ли функция разрывная во всех точках X?

4.3х. Доказать, что для любых метрических пространств X и Y существует метрическое пространство Z, в которое X и Y изометрически вложены. Для любых ли метрических пространств X и Y существуют их вложения в метрическое пространство Z, при котором расстояние Хаусдорфа между их образами в Z конечно?

4.4х. Опишите прообразы точек при непрерывном отображении прямой в топологии Зарисского на себя.

4.5х. Отображение $f : X \to Y$ линейно упорядоченных пространств X и Y строго монотонно возрастает (убывает), если $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$ при $a < b$. Доказать, что сюръективное строго монотонно возрастающее (или убывающее) отображение линейно упорядоченных множеств является гомеоморфизмом относительно интервальных топологий. Можно ли отказаться от условия сюръективности или строгой монотонности для сохранения непрерывности?

4.6х. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$?

4.7х. Всякая ли непрерывная биекция прямой Зоргенфрея (прямой в топологии Зарисского) является гомеоморфизмом?

4.8х. Доказать, что любое счетное метрическое пространство вложимо в $\mathbb{Q}$.

4.9х. Докажите, что в пространство $C_\infty[0,1]$ (Задача 1.5) изометрически вкладывается любое сепарабельное (т.е. содержащее счетное всюду плотное подмножество) метрическое пространство.

4.10x. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.

4.11x. Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1, 1, 1)\})$.

4.12x. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ может не быть его гомеоморфизмом.

4.13x. Докажите, что множество $\{x \in \ell_\infty : |x_n| = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно канторову множеству.

4.14x. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

4.15x. Существует ли непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$?

4.16x. Существует ли геомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$ и замкнутой верхней полуплоскости?

Лекция 5

Аксиомы отделимости.

5.1. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости Колмогорова* или является T_0-*пространством*, если для любых двух различных точек x и y пространства X по крайней мере одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

T_0-пространства играют большую роль в алгебраической геометрии.

Слипшееся двоеточие (пример 3.22.2.) является простейшим примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме T_0.

5.2. Пространство X называется T_1-*пространством*, если для любых различных точек x и y пространства X существуют окрестность Ox, не содержащая точки y, и окрестность Oy, не содержащая точки x.

Из Определения 3.2.(3') вытекает, что пространство X есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

„Связное двоеточие", т.е. пространство $X = \{a, b\}$, в котором открыты множества $\varnothing$, $\{a\}$, X (пример 3.22.2.), есть T_0-пространство, не являющееся T_1-пространством.

5.3. Пространство X называется *хаусдорфовым* или T_2-*пространством*, если для всякой пары различных точек из X существуют непересекающиеся их окрестности.

Бесконечное множество, снабженное топологией, в которой замкнуты лишь конечные подмножества и само множество(минимальной T_1-топологией), является нехаусдорфовым T_1-пространством.

5.4. Пространство X называется T_3-*пространством*, если для всякой точки $x \in X$ и всякого не содержащего её замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности Ox и OF.

Аксиомы T_0, T_1, T_2 идут в порядке усиления и дают всё более узкие, как показывают приведённые примеры, классы пространств. В то же время аксиома T_3 не влечёт даже T_0. Это показывает пример „слипшегося двоеточия“ — двухточечного пространства с наименьшей топологией.

5.5. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_3, называется *регулярным.*

Всякое регулярное пространство X хаусдорфово. В самом деле, пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Для одной из точек, допустим, для x, существует окрестность Ox, не содержащая y. Взяв непересекающиеся окрестности точки x и замкнутого множества $X \setminus Ox$, мы заключим x и y в непересекающиеся окрестности.

Пример хаусдорфова нерегулярного пространства — числовая прямая, базу топологии которой образуют всевозможные множества вида U и $U \setminus \big\{1/n : n \in \mathbb{N}\big\}$, где U — интервал числовой прямой. Множество $F = \big\{1/n : n \in \mathbb{N}\big\}$ замкнуто в этом пространстве и не отделимо от нуля непересекающимися окрестностями.

Следующее утверждение достаточно очевидно.

5.6. Предложение. *Всякое подпространство регулярного пространства регулярно.* $\square$

5.7. Пространство X называется T_4*-пространством*, если любую дизъюнктную пару замкнутых в X множеств можно заключить в непересекающиеся окрестности.

Легко проверить, что это условие эквивалентно следующему: для всякого замкнутого множества F и всякой его окрестности OF существует такая окрестность O_1F, что $\mathrm{Cl}(O_1F) \subset OF$.

Другое равносильное условие: любую дизъюнктную пару замкнутых множеств можно заключить в окрестности с непересекающимися замыканиями.

Пример “слипшегося двоеточия” показывает, что T_4 не влечет T_0. Числовая прямая, на которой открыты лишь бесконечные интервалы вида $(-\infty,\ a)$, показывает, что аксиома T_4 не влечет и T_3.

5.8. Пространство, одновременно удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4, называется *нормальным.*

Всякое нормальное пространство регулярно, поскольку из T_1 и T_4 вытекает T_3. В то же время, как показывает связное двоеточие, из T_0 плюс T_4 не вытекает T_3.

В § 8 мы приведём пример регулярного пространства, не являющегося нормальным.

5.9. Определение. Подмножество Z топологического пространства X называется *всюду плотным* в X, если $\mathrm{Cl}(Z) = X$.

5.10. Предложение. *Пусть* $f_i : X \to Y,\ i = 1, 2,$ *— непрерывные отображения пространства* X *в хаусдорфово пространство* Y. *Предположим, что* $f_1\big|Z = f_2\big|Z$ *для некоторого всюду плотного в* X *множества* Z. *Тогда* $f_1 = f_2$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой точки $x \in X$ точки $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различны. Поскольку пространство Y хаусдорфово, существуют непересекающиеся окрестности $Of_i(x),\ i = 1, 2$. Из непрерывности f_i вытекает существование таких окрестностей $O_i x,\ i = 1, 2$, что $f_i\big(O_i x\big) \subset Of_i(x)$.

Положим $Ox = O_1 x \cap O_2 x$. Поскольку Z всюду плотно в X, существует точка $z \in Z \cap Ox$. Тогда $f_1(z) = f_2(z) \in Of_1(x) \cap Of_2(x)$. Но это противоречит тому, что множества $Of_1(x)$ и $Of_2(x)$ не пересекаются. $\square$

Следующее утверждение имеет многочисленные применения.

5.11. Лемма об ужатии. *Пусть* $u = (U_1, \ldots, U_k)$ *— открытое покрытие нормального пространства* X. *Тогда существует такое открытое покрытие* $v = (V_1, \ldots, V_k)$ *пространства* X, *что* $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i,\ i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Множества V_i строим по индукции. Пусть $F_1 = X \setminus \bigcup\{U_i : i \geq 2\}$. Тогда $F_1 \subset U_1$. В силу нормальности пространства X существует такая окрестность OF_1, что $\mathrm{Cl}(OF_1) \subset U_1$. Положим $V_1 = OF_1$. Из построения вытекает, что семейство

$v_1 = (V_1, U_2, \dots U_k) \in \operatorname{cov}(X)$.

Предположим, что мы построили открытые множества $V_1, \dots, V_m$, $1 \leq m < k$, подчинённые условиям

$$\operatorname{Cl}(V_i) \subset U_i, \quad i = 1, \dots, m; \tag{5.1}$$

$$v_m = (V_1, \dots, V_m, U_{m+1}, \dots, U_k) \in \operatorname{cov}(X). \tag{5.2}$$

Положим

$F_{m+1} = X \setminus V_1 \cup \dots \cup V_m \cup U_{m+2} \cup \dots \cup U_k$.

Тогда множество F_{m+1} замкнуто в X и лежит в U_{m+1}. Существует такая окрестность OF_{m+1}, что $\operatorname{Cl}(OF_{m+1}) \subset U_{m+1}$. Полагая $V_{m+1} = OF_{m+1}$, получаем открытое покрытие $v_{m+1} = (V_1, \dots, V_m, V_{m+1}, U_{m+2}, \dots, U_k)$ пространства X. Покрытие $v_k = (V_1, \dots, V_k)$ и является искомым. $\square$

Задачи.

5.1. Доказать, что среди T_1 топологий на пространстве есть наименьшая. В частности, топология Зарисского — наименьшая T_1 топология на $\mathbb{R}$.

5.2. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность точек не может иметь более одного предела.

5.3. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нем, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

5.4. Докажите, что всякое подпространство T_0 (соответственно T_1, T_2, регулярного) пространства является T_0 (соответсвенно T_1, T_2, регулярным) пространством. Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

5.5. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.6. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии

Зарисского) нормальным пространством? Будет ли прямая в топологии Зарисского регулярным пространством?

5.7. Проверьте верность утверждений:

(a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен в образе;

(b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен в образе.

5.8. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, множество, являющееся решением полиномиального (от координат точки) уравнения $f(P) = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$, или нигде не плотно, или совпадает с $\mathbb{R}^n$.

5.9. Докажите, что канторово множество нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

5.10. Найдите (опишите все) топологии на множестве X, для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

5.11. Будет ли пересечение двух всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?
Будет ли пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно?

5.12. Докажите, что в полном метрическом пространстве пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно (т.е. выполено свойство Бэра).

5.13. Докажите, что граница замкнутого (открытого) множества нигде не плотна. Приведите пример пространства и его подмножества, со всюду плотной границей.

5.14. Докажите, что если A нигде не плотное подмножество, то $\mathrm{Cl}A$ также нигде не плотное подмножество.

5.15. Докажите, что базой топологии метрического пространства является множество открытых шаров рациональных радиусов, центрами которых являются точки произвольного всюду плотного подмножества.

5.16. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

5.17. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

5.18. Если пространство имеет счетную базу, то говорят, что оно удовлетворяет второй аксиоме счетности. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выбрать счетное семейство, являющееся базой.

5.19. Пространство сепарабельно, если оно имеет счетное всюду плотное подмножество. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.

5.20. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тем самым метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.

5.21. Существует ли не сепарабельное метрическое пространство?

5.22. Базой окрестностей точки x пространства X называется совокупность ее окрестностей такая, что всякая окрестность точки x содержит окрестность из этой совокупности. Какова минимальная база в точках дискретного пространства?

5.23. Если пространство имеет счетную базу во всех точках, то говорят, что оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. Доказать, что метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

5.24. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Верна ли обратная импликация?

5.25. Докажите, что пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, хаусдорфово в том и только том случае, если любая последовательность точек в нем имеет не более одного предела.

5.26. Докажите, что в пространстве X, удовлетворяющем первой аксиоме счетности, замыкание любого подмножества A совпадает с множеством пределов всевозможных последовательностей точек множества A.

5.27. Сохраняются ли первая (вторая) аксиома счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.28. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

5.29. Будет ли факторпространство нормального пространства удовлетворять аксиоме T_0?

5.30. Докажите, что факторпространство X удовлетворяет аксиоме T_1 в том и только том случае, если разбиение пространства X состоит из замкнутых множеств.

5.31. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) второй аксиоме счетности? Являются ли они сепарабельными пространствами?

5.32. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) первой аксиоме счетности?

5.33. Докажите, что в любом конечном T_0-пространстве

а) существует изолированная точка;

б) множество изолированных точек всюду плотно.

Дополнительные задачи.

5.1х. Является ли $\mathbb{Q}$ G_δ-множеством, т.е. пересечением счетного числа открытых в $\mathbb{R}$ подмножеств?

5.2х. Найти минимальную мощность всюду плотных подмножеств пространств ℓ_p, $p \geq 1$, ℓ_∞, прямой Зоргенфрея, пространства Бэра, "метризуемого ежа". Докажите, что любое бесконечное подмножество прямой в топологии

Зарисского является всюду плотным.

5.3х. Можно ли в Предложении 5.10 и Задаче 5.15 отказаться от условия хаусдорфовости образа?

5.4х. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

5.5х. Привести пример нормального пространства и его не нормального подмножества.

5.6х. Доказать, что любое замкнутое подмножество A канторова множества C является его ретрактом (т.е. существует непрерывная сюръекция $r : C \to A$ такая, что $r \circ r = r$).

5.7х. Существует ли регулярное пространство X, содержащее более двух точек, на котором любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ постоянна?

5.8х. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

5.9х. Существует ли сепарабельное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности? А если условие сепарабельности заменить на условие счетности пространства?

5.10х. Докажите, что любое сепарабельное метрическое пространство вложимо в ℓ_2.

5.11х. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

5.12х. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

5.13х. Найти необходимые и достаточные условия, когда факторпространство хаусдорфова пространства хаусдорфово.

5.14х. Докажите, что факторпространство нормального пространства X нормально, если прообраз образа (т.е. насыщение) произвольного замкнутого множества при факторотображении замкнут.

Лекция 6

Лемма Урысона. Разбиение единицы. Теорема Брауэра–Титце–Урысона о продолжении функций.

6.1. Лемма Урысона. *Для любых непересекающихся замкнутых подмножеств F_0 и F_1 нормального пространства X существует такая непрерывная функция $f : X \to I$, что*

$f(x) = 0$ *для* $x \in F_0$ *и* $f(x) = 1$ *для* $x \in F_1$.

Доказательство. Выполнение леммы в случае $F_0 = \emptyset$ или $F_1 = \emptyset$ очевидно.

Для каждого двоично-рационального числа $r \in [0, 1]$ мы определим открытое множество Γ_r так, что

$$r < r' \Longrightarrow \mathrm{Cl}(\Gamma_r) \subset \Gamma_{r'}, \tag{6.1}$$

$$F_0 \subset \Gamma_0, \quad F_1 \subset X \setminus \Gamma_1. \tag{6.2}$$

Существует такая окрестность OF_0, что $\mathrm{Cl}(OF_0) \cap F_1 = \varnothing$. Полагаем $\Gamma_0 = OF_0$ и $\Gamma_1 = X \setminus F_1$. Далее, существует такая окрестность $O\mathrm{Cl}\Gamma_0$, что $\mathrm{Cl}(O\mathrm{Cl}\Gamma_0) \subset \Gamma_1$. Полагаем $\Gamma_{\frac{1}{2}} = O\mathrm{Cl}\Gamma_0$. Аналогичным образом строим множества $\Gamma_{\frac{1}{4}}$ и $\Gamma_{\frac{3}{4}}$ так, что

$\mathrm{Cl}(\Gamma_0) \subset \Gamma_{\frac{1}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{4}}\right) \subset \Gamma_{\frac{1}{2}}$;

$\mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right) \subset \Gamma_{\frac{3}{4}} \subset \mathrm{Cl}\left(\Gamma_{\frac{3}{4}}\right) \subset \Gamma_1$.

Продолжая этот процесс, мы строим искомое семейство множеств Γ_r. Определим функцию $f : X \to I$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in \Gamma_r\} & \text{для} \quad x \in \Gamma_1, \\ 1 & \text{для} \quad x \in X \setminus \Gamma_1. \end{cases}$$

Возьмем числа a, b из интервала $(0, 1)$. Покажем, что

$$f^{-1}\big([0, a)\big) = \bigcup\big\{\Gamma_r : r < a\big\}; \tag{6.3}$$

$$f^{-1}\big((b, 1]\big) = \bigcup\big\{X \setminus \mathrm{Cl}(\Gamma_r) : r > b\big\}. \tag{6.4}$$

Равенство (6.3) вытекает из следующего свойства:

$f(x) < a \Longleftrightarrow$ существует такое $r < a$, что $x \in \Gamma_r$.

Далее,

$$f(x) > b \Longleftrightarrow \quad \text{существует такое} \quad r' > b, \quad \text{что} \quad x \notin \Gamma_{r'}. \tag{6.5}$$

Условия (6.1) и (6.5) влекут, что

$f(x) > b \Longleftrightarrow$ существует такое $r > b$, что $x \notin \mathrm{Cl}(\Gamma_r)$.

Таким образом, равенство (6.4) также проверено. Из (6.3) и (6.4) вытекает непрерывность функции f. $\square$

6.2. Замечание. Ясно, что вместо отрезка $[0, 1]$ числовой прямой в формулировке леммы Урысона можно взять произвольный отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

6.3. Определение. Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Функционально открытое множество

$U_\varphi = \big\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\big\}$

будем называть *носителем* функции φ и обозначать через $\mathrm{supp}(\varphi)$.

6.4. Определение. Пусть $u = (U_1, \ldots, U_k) \in \mathrm{cov}(X)$. Семейство непрерывных функций $\varphi_i : X \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$, называется *разбиением единицы, подчинённым покрытию* u, если

$$\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{6.6}$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1. \tag{6.7}$$

6.5. Предложение. *Для всякого конечного открытого покрытия* $u = (U_1, \dots, U_k)$ *нормального пространства* X *существует разбиение единицы* $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$*, подчинённое покрытию* u*.*

Доказательство. По Лемме 5.11 об ужатии существует покрытие $v = (V_1, \dots, V_k) \in \operatorname{cov}(X)$ со свойством $\operatorname{Cl}(V_i) \subset U_i$. Согласно лемме Урысона существуют такие непрерывные функции $\psi_i : X \to [0, 1]$, что

$\psi_i\big(\operatorname{Cl}(V_i)\big) = 1, \quad \psi_i(X \setminus U_i) = 0.$

Тогда семейство функций

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\sum\{\psi_j : j = 1, \dots, k\}}$$

будет искомым разбиением единицы. $\square$

6.6. Теорема Брауэра–Титце–Урысона. *Пусть* F *— замкнутое подмножество нормального пространства* X *и* $\varphi : F \to \mathbb{R}$ *— непрерывная ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция* $\psi : X \to \mathbb{R}$*, что*

$\psi|F = \varphi \quad$ и $\quad \sup|\psi| = \sup\big\{|\psi(x)| : x \in X\big\} = \sup|\varphi| = \sup\big\{|\varphi(x)| : x \in F\big\}.$

Доказательство. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и $\mu_0 = \sup|\varphi_0|$.
Считаем, что $\mu_0 > 0$. В противном случае полагаем $\psi \equiv 0$. Пусть

$P_0 = \big\{x \in F : \varphi_0(x) \leq -\mu_0/3\big\}, \quad Q_0 = \big\{x \in F : \varphi_0(x) \geq \mu_0/3\big\}.$

Множества P_0 и Q_0 замкнуты и не пересекаются. По лемме Урысона и Замечанию 6.2 существует такая непрерывная функция $\psi_0 : X \to [-\mu_0/3,\ \mu_0/3]$, что

$\psi_0(P_0) = -\mu_0/3, \quad \psi_0(Q_0) = \mu_0/3.$

Положим $\varphi_1 = \varphi_0 - \psi_0 : F \to \mathbb{R}$. Функция φ_1 непрерывна и $\sup|\varphi_1| = \mu_1 \leq 2\mu_0/3$.

Теперь полагаем

$P_1 = \big\{x \in F : \varphi_1(x) \leq -\mu_1/3\big\}, \quad Q_1 = \big\{x \in F : \varphi_1(x) \geq \mu_1/3\big\}.$

Строим непрерывную функцию $\psi_1 : X \to [-\mu_1/3,\ \mu_1/3]$ так, что

$\psi_1(P_1) = -\mu_1/3, \quad \psi_1(Q_1) = \mu_1/3.$

Полагаем $\varphi_2 = \varphi_1 - \psi_1$ и т.д.

Получаем последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ непрерывных функций на F и последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ непрерывных функций на X таких, что $\varphi_{n+1} = \varphi_n - \psi_n$, $|\psi_n| \leq \mu_n/3$, $\sup|\varphi_{n+1}| \equiv \mu_{n+1} \leq 2\mu_n/3$. Следовательно,

$|\varphi_n| \leq (2/3)^n \mu_0, \quad |\psi_n| \leq (2/3)^n \mu_0/3.$

Положим $s_n = \psi_0 + \ldots + \psi_n$. Последовательность непрерывных на X функций s_n является фундаментальной. В самом деле, при $m > n$ имеем

$|s_m - s_n| = |\psi_{n+1} + \ldots + \psi_m| \leq |\psi_{n+1}| + \ldots + |\psi_m| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\mu_0}{3} < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\mu_0}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \frac{\mu_0}{3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0.$

Согласно Теореме 4.24 последовательность s_n сходится к непрерывной функции $\psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n$. Имеем $|\psi| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0$. Далее,

$\varphi - s_n = \varphi_0 - \psi_0 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_1 - \psi_1 - \ldots - \psi_n = \varphi_n - \psi_n = \varphi_{n+1}.$

Значит, $|\varphi - s_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu_0$. Поэтому $\psi|F = \varphi$. $\square$

6.7. Замечание. Утверждение теоремы 6.6 имеет место и для неограниченных функций. В самом деле, пусть $\varphi : F \to \mathbb{R}$ — неограниченная функция. Рассмотрим функцию $\varphi_0 : F \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, определяемую следующим образом:

$\varphi_0(x) = \operatorname{arctg}\big(\varphi(x)\big).$

Согласно Теореме 6.6 функция φ_0 продолжается до непрерывной функции $\psi_0 : X \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Положим $F_0 = \psi_0^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$. По лемме Урысона существует такая функция $\psi_1 : X \to [0,1]$, что $\psi_1(F_0) = 0$ и $\psi_1(F) = 1$. Определим функцию $\psi : X \to \mathbb{R}$, полагая

$\psi(x) = \operatorname{tg}\big(\psi_1(x) \cdot \psi_0(x)\big).$

Это и будет искомым продолжением функции φ.

Задачи.

6.1. Постройте непрерывную функцию на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающую значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы

$y = 1/x$.

6.2. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

6.3. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на отрезок является сужением непрерывного отображения отрезка на себя.

6.4. Доказать, что любую равномерно непрерывную функцию на интервале $(0, 1)$ можно продолжить на $\mathbb{R}$.

6.5. Пусть A — замкнутое подмножество метрического пространства X, $f : A \to I$ — непрерывное отображение. Доказать, что отображение

$$g(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 : a \in A\} & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

является непрерывным продолжением f, где d — метрика на X.

Дополнительные задачи.

6.1x. Можно ли в теореме Брауэра–Титце–Урысона рассматривать продолжения отображений в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, в сферы S^n, $n \geq 1$?

6.2x. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на квадрат является сужением непрерывного отображения отрезка на квадрат.

6.3x. Можно ли в задаче 6.4 заменить интервал на произвольное подмножество $\mathbb{R}$?

6.4x. Пусть для любой точки $x \in X$ функция f, определенная на всюду плотном подмножестве $A \subset X$, продолжается до непрерывной функции на $A \cup \{x\}$. Существует ли ее непрерывное продолжение на X?

Лекция 7

Операции над топологическими пространствами и отображениями.

Мы уже знакомы с операциями перехода к подпространству (§3) и фактор-пространству (§4). Продолжим изучение операций.

7.1 Суммы топологических пространств.

Предположим, что дано дизъюнктное семейство $X_\alpha, \alpha \in A$, топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и семейство $\mathcal{T}$ всех таких множеств $U \subset X$, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для всякого $\alpha \in A$. Семейство $\mathcal{T}$ удовлетворяет условиям Определения 3.1 топологии. Множество X с этой топологией называется *суммой пространств* $X_\alpha, \alpha \in A$, и обозначается через $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ или через $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ конечно.

Из определения топологии $\mathcal{T}$ на $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ вытекает

7.1.1. Предложение. *Множество $F \subset \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α для каждого $\alpha \in A$.* $\square$

7.1.2. Следствие. *Все множества X_α открыто-замкнуты в $\oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.* $\square$

Непосредственно из определений вытекает

7.1.3. Предложение. *Любая сумма T_i-пространств является T_i-пространством.* $\square$

7.2 Суммы непрерывных отображений.

7.2.1. Пусть даны суммы $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $Y = \oplus\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств X_α и Y_α и отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Тогда существует единственное отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$f \circ i_{X_\alpha} = i_{Y_\alpha} \circ f_\alpha, \quad \alpha \in A,$

где $i_{X_\alpha} : X_\alpha \to X, \;\; i_{Y_\alpha} : Y_\alpha \to Y$ — отображения вложения. Отображение f называется *прямой суммой* отображений f_α и обозначается через $\oplus\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Непосредственно из определений вытекает

7.2.2. Предложение. *Прямая сумма f непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha,\; \alpha \in A$, непрерывна.* $\square$

7.2.3. Для семейства пространств $X_\alpha,\; \alpha \in A$, и семейства отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y,\; \alpha \in A$, в пространство Y существует единственное отображение $f : \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\} \to Y$, удовлетворяющее соотношениям

$$f \circ i_{X_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha \in A. \tag{7.1}$$

Отображение f называется *суммой отображений* f_α и обозначается через $\sum\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

7.2.4. Предложение. *Отображение $f = \sum\limits_{\alpha\in A}\{f_\alpha : X_\alpha \to Y\}$ непрерывно тогда и только тогда, когда всякое отображение f_α непрерывно.*

Доказательство. Если отображение f непрерывно, то согласно (7.1) каждое отображение f_α непрерывно как композиция непрерывных отображений i_{X_α} и f.

Пусть теперь все f_α непрерывны. Из (7.1) вытекает, что

$f^{-1}(U) = \bigcup\big\{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A\big\}.$

Значит, если множество $U \subset Y$ открыто, то $f^{-1}(U)$ открыто по определению топологии на $\oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Следовательно, f непрерывно. $\square$

7.3 Произведения пространств.

7.3.1. Пусть дано некоторое семейство множеств $X_\alpha, \alpha \in A$. Обозначим через $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *декартово произведение* этих множеств, т.е. множество всех таких отображений

$x : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$.

Для конечного $A = \{1, \ldots, k\}$ произведение пространств $X_1, \ldots X_k$ обозначается через $X_1 \times \ldots \times X_k$.

Если $B \subset A$, то определено естественное проектирование (проекция)

$p_B : \prod\big\{X_\alpha : \alpha \in A\big\} \to \prod\big\{X_\alpha : \alpha \in B\big\}$,

ставящее в соответствие точке x произведения (отображению $x : A \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$), её ограничение на множество B. Если B состоит из одного индекса α, то p_B будем обозначать через p_α.

Точку $x(\alpha) \in X_\alpha$ будем называть *α-координатой* точки $x \in \prod\big\{X_{\alpha'} : \ \alpha' \in A\big\}$ и, как правило, будем обозначать её через x_α.

7.3.2. Пусть теперь сомножители X_α произведения $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ являются топологическими пространствами. Тогда на множестве X можно рассмотреть слабейшую топологию, относительно которой все проекции непрерывны (см. 4.25). Топология эта называется *тихоновской* топологией произведения. Множество X с этой топологией называется *топологическим*, или *тихоновским*, или просто произведением пространств X_α.

Согласно 4.25 предбазу пространства X образуют всевозможные множества вида $p_\alpha^{-1}(U)$, где U берётся из некоторой базы пространства X_α, а базу, следовательно, — всевозможные их конечные пересечения

$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_k)$.

Из определения топологии произведения непосредственно вытекает

7.3.3. Предложение. *Все проекции* $p_\alpha : \prod\big\{X_{\alpha'} : \alpha' \in A\big\} \to X_\alpha$ *непрерывны.* $\square$

7.3.4. Примеры. 1. *Плоскость* $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

числовых прямых.

В случае $\mathbb{R}^2$ базу образуют круги $O_\varepsilon(x)$, а в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — прямоугольники вида $(a,b)\times(c,d)$. Читателю предлагается доказать, что эти базы образуют одну и ту же топологию.

2. Рассмотрим в пространстве E^3 прямоугольную систему координат $Oxyz$ и определим *тор* T^2 как поверхность вращения окружности

$$\begin{cases} (x-2)^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

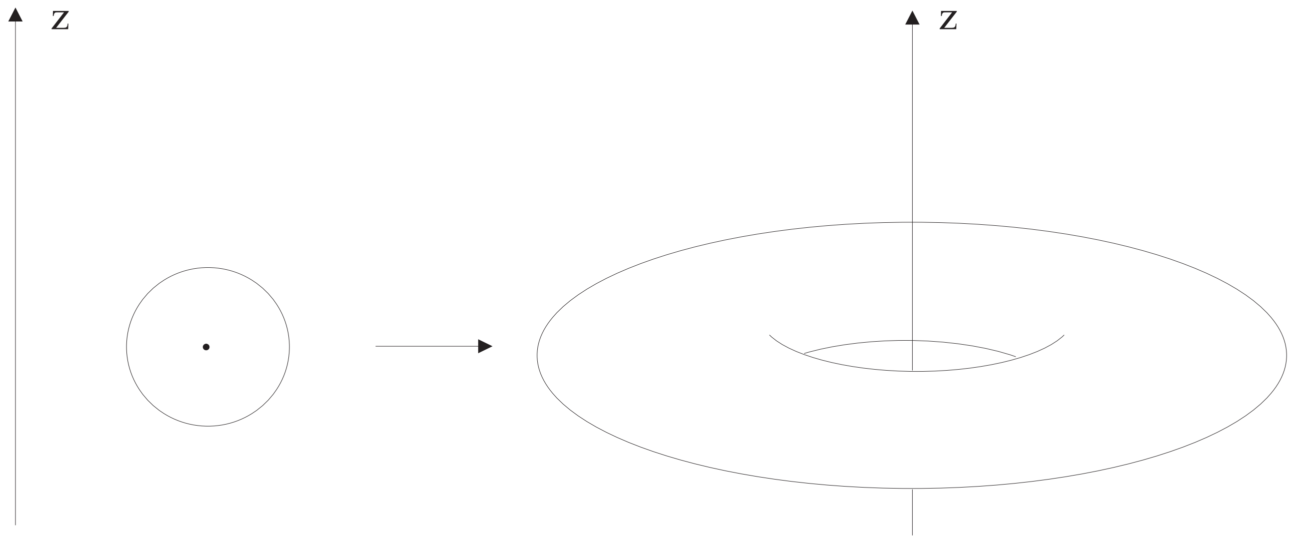

Рис. 7.1:

Докажите, что тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1\times S^1$ окружностей.

7.3.5. Предложение. *Пусть X — произведение пространств $X_\alpha, \alpha\in A$, и пусть $f: Z\to X$ — такое отображение, что все композиции $p_\alpha\circ f: Z\to X_\alpha$ непрерывны. Тогда отображение f также непрерывно.*

Доказательство. Согласно Предложению 4.3 достаточно проверить открытость прообразов $f^{-1}(V)$ элементов V некоторой предбазы пространства X. В качестве такой предбазы можно взять семейство $\{p_\alpha^{-1}(U) : U$ открыто в $X_\alpha, \alpha\in A\}$. $\square$

7.3.6. Предложение. *Произведение подпространств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$, совпадает с подпространством $\bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ произведения $X = \prod\big\{X_\alpha : \alpha \in A\big\}$.*

Доказательство. Имеем

$Y = \prod\big\{Y_\alpha : \alpha \in A\big\} = \{x \in X : x(\alpha) \in Y_\alpha\} = \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$.

Поскольку ограничение $q_\alpha = p_\alpha|Y : Y \to Y_\alpha$ проекции p_α непрерывно, тождественное отображение $\mathrm{id} : \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\} \to Y$ непрерывно согласно Предложению 7.3.5. С другой стороны, предбазу топологии подпространства $\bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ образуют множества $Y \cap p_\alpha^{-1}(U)$, где U открыто в X_α. Но $Y \cap p_\alpha^{-1}(U) = q_\alpha^{-1}(U \cap Y_\alpha)$ открыто в Y. Следовательно, тождественное отображение $Y \to \bigcap\big\{p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) : \alpha \in A\big\}$ непрерывно. $\square$

7.4 Произведения отображений.

7.4.1. Определение. Пусть $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — отображения. Тогда отображение $f : \prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha\big(x(\alpha)\big), \alpha \in A$, называется *произведением отображений* f_α и обозначается через $\prod\big\{f_\alpha : \alpha \in A\big\}$.

Если множество индексов конечно: $A = \{1, \dots, k\}$, то произведение отображений обозначается через $f_1 \times \ldots \times f_k$.

7.4.2. Предложение. *Произведение f непрерывных отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через q_α проекцию произведения $Y = \prod\big\{Y_{\alpha'} : \alpha' \in A\big\}$ на сомножитель Y_α. Из Определения 7.4.1 вытекает равенство

$$q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha. \tag{7.2}$$

Отображение $f_\alpha \circ p_\alpha$ непрерывно как композиция непрерывных отображений. Тогда непрерывность отображения f вытекает из (7.2) и Предложения 7.3.5. $\square$

7.4.3. Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — отображения. Тогда отображение $f : X \to \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, определяемое равенствами $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$, называется *диагональным произведением отображений* f_α и обозначается через $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

В случае конечного множества индексов пишем $f = f_1 \Delta \ldots \Delta f_k$.

7.4.4. Предложение. *Диагональное произведение f непрерывных отображений непрерывно.*

Доказательство. Как и в случае произведения отображений, применяем Предложение 7.3.5, поскольку $q_\alpha \circ f = f_\alpha$. $\square$

7.5 Склеивание пространств.

Мы коснёмся этой темы в самом простом случае. Пусть даны две пары (X_1, F_1) и (X_2, F_2) пространств X_i и их замкнутых подмножеств $F_i, i = 1, 2$. Предполагаем, что множества F_1 и F_2 гомеоморфны и зафиксирован гомеоморфизм $f : F_1 \to F_2$.

Пусть $X = X_1 \oplus X_2$. Определим на X отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ посредством задания на X классов эквивалетности. Все одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X_1 \cup X_2 \setminus F_1 \cup F_2$ являются классами эквивалентности. Также классами эквивалентности являются двухточечные множества $\{x, f(x)\}$, где $x \in F_1$. Факторпространство $X/\mathcal{R}$ называется *склеиванием* пространств X_1 и X_2 посредством гомеоморфизма $f : F_1 \to F_2$.

7.5.1. Пример. Доказать, что склеивая круг B_2 и лист Мёбиуса по окружности S^1, являющейся границей каждого из них, получаем проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$.

7.6. Приклеивание пространств. Пусть X, Y — топологические пространства, A - подмножество пространства X, $f : A \to Y$ — непрерывное отображение. Возьмём сумму $X \oplus Y$ и произведём в ней отождествления точек по отношению эквивалентности: $x \sim y$, если $x \in A$, $y \in Y$ и $f(x) = y$;

$x_1 \sim x_2$, если $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Тем самым на пространстве $X \oplus Y$ возникает разбиение $\mathcal{R}$. Факторпространство $X \oplus Y/\mathcal{R}$ обозначается через $X \cup_f Y$, а описанная процедура его построения называется *приклеиванием* X *к* Y *посредством* отображения f.

7.6.1. Замечание. Множество $f(A)$ естественно вкладывается в $X \cup_f Y$, но топология, индуцируемая на нём пространством $X \cup_f Y$, вообще говоря, слабее фактортопологии на $f(A) \subset Y$.

В качестве примера возьмём $X = A = [0,1] \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $Y = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0,1],\ x_2 \in [0, x_1)\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$. Отображение $f : X \to Y$ определим следующим образом:

$f\big(\{0\} \times [0,1)\big) = \big\{(0,0)\big\}$;

$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 \cdot x_2)$, если $x_1 > 0$.

Пространство Y метрическое, а фактортопология на Y не порождается никакой метрикой, поскольку точка $(0,0)$ не имеет счетной базы окрестностей.

7.7. Цилиндры пространств и отображений. Произведение $X \times I$ пространства X на отрезок I называется *цилиндром* пространства X.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Результат приклеивания цилиндра $X \times I$ к Y посредством отображения $f \times 0 : X \times \{0\} \to Y$ называется *цилиндром отображения* f и обозначается через $\operatorname{Cyl}(f)$.

Как и в п. 7.6.1., топология $f(X) \subset (X \times I) \cup_f Y$, вообще говоря, отличается от фактортопологии на $f(X)$.

7.8. Конусы над пространствами и отображениями. Пусть X — пространство. Если отождествить между собой все точки верхнего основания $X \times \{1\}$ цилиндра $X \times I$ (*профакторизовать* $X \times I$ по $X \times \{1\}$), то получится *конус* $\operatorname{Con}(X)$ *над* X.

Конусы над некомпактными метрическими пространствами неметризуемы.

7.8.1. Задача. Доказать, что конус над интервалом $(0,1)$ неметризуем.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Результат приклеивания конуса $\mathrm{Con}(X)$ к Y посредством отображения $f \times 0 : X \times \{0\} \to Y$ называется *конусом отображения* f и обозначается через $\mathrm{Con}(f)$.

7.8.2. Задача. Пусть $f : S^1 \to S^1$ — двукратное накручивание окружности на себя, задаваемое в полярных координатах формулой $(1, \varphi) \to (1, 2\varphi)$. Доказать, что $\mathrm{Con}(f)$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^2$.

Задачи.

7.1. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Проверьте выполнение равенств:

(a) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}A \times \mathrm{Int}B$;

(b) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}A \times \mathrm{Cl}B$;

(c) $\mathrm{Bd}(A \times B) = \mathrm{Bd}A \times \mathrm{Bd}B$;

(d) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Bd}A \times B) \cup (A \times \mathrm{Bd}B)$;

7.2. Докажите, что n-ая степень прямой $\mathbb{R}$ (отрезка $I = [0, 1]$) гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ (кубу I^n), $n \in \mathbb{N}$.

7.3. Докажите, что при проектировании $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ образ открытого подмножества произведения $X \times Y$ открыт в X (т.е. проектирование — открытое отображение). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения любого количества пространств. Выполнено ли аналогичное утверждение для замкнутых подмножеств?

7.4. Докажите, что пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ произведения замкнута в $X \times X$.

7.5. Для отображения $f : X \to Y$ множество $\{(x, f(x)) \subset X \times Y : x \in X\}$ называется графиком отображения. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \to Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?

7.6. Докажите, что для непрерывного отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y график отображения замкнут в $X \times Y$. Верна ли обратная импликация?

7.7. Докажите, что счетное произведение сепарабельных (удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяющих второй аксиоме счетности) пространств сепарабельно (удовлетворяет первой аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности).

7.8. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ гомеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$, $n, k \in \mathbb{N}$, где S^m — m-мерная сфера.

7.9. $T^k = S^1 \times \cdots \times S^1$ — k-мерный тор. Вложите T^k в $\mathbb{R}^{k+1}$.

7.10. Вложите $S^1 \times B^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, $S^2 \times I$ в $\mathbb{R}^3$, где B^2 — замкнутый круг единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, S^2 — двумерная сфера.

7.11. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I = [0,1] \times [0,1]$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без двух сторон $(0,1) \times I$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}$, $t \in I$, гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$.

7.12. Докажите, что факторпространство

(a) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества $S^1 \times (0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(t,0),(t,1)\}$, $t \in S^1$,

(b) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}$, $\{(t,0)$ $t \in I$,

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

7.13. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}$, $\{(t,0),(1-$ $t,1)\}$, $t \in I$, называется бутылкой Клейна. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times[0,1]$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}$, $t \in I$, называется лентой Мебиуса.

Представьте бутылку Клейна как результат

(a) факторизации цилиндра,

(b) факторизации ленты Мебиуса,

(c) склейки по границам двух копий ленты Мебиуса посредством тождественного отображения,

(d) склейки по границам двух копий цилиндра.

7.14. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1) \times (0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\},\{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, называется проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$.

Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

(a) как результат склейки по границе диска B^2 и ленты Мебиуса,

(b) из конуса окружности, факторизацией основания,

(c) как результат факторизации ленты Мебиуса.

Дополнительные задачи.

7.1x. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Найдите формулу, выражающую $\mathrm{Bd}(A \times B)$ через $\mathrm{Cl}A$, $\mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}B$.

7.2x. Докажите, что счетное произведение счетных дискретных пространств гомеоморфно пространству Бэра. Тем самым счетное произведение счетных дискретных пространств гомеоморфно пространству иррациональных чисел (см. Задачу 4.14x.).

7.3x. Докажите, что конечное произведение пространства рациональных чисел гомеоморфно пространству рациональных чисел.
Докажите, что счетное произведение пространства иррациональных чисел гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

7.4x. Докажите, что несчетное произведение прямых не нормально.

7.5x. Докажите, что произведение континуума сепарабельных пространств сепарабельно. Будет ли сепарабельно произвольное произведение хаусдорфовых пространств?

7.6x. Докажите, что в произведении сепарабельных пространств любое семейство попарно дизъюнктных непустых открытых множеств счетно (произведение сепарабельных пространств удовлетворяет условию Суслина).

7.7x. Пусть $\Pi\{X_s : s \in S\}$ — произведение сепарабельных пространств и $f : \Pi\{X_s : s \in S\} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что существует счетное подмножество $S_0 \subset S$ и непрерывная функция $f_0 : \Pi\{X_s : s \in S_0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $f = f_0 \circ \mathrm{pr}_{S_0}$, где pr_{S_0} — проектирование произведения $\Pi\{X_s : s \in S\}$ на счетное подпроизведение $\Pi\{X_s : s \in S_0\}$ (т.е. функция зависит от счетного множества координат).

7.8x. Представьте ленту Мебиуса как факторпространство цилиндра.

7.9x. Введя естественную топологию на множестве всех прямых на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно ленте Мебиуса.

7.10x. Введя естественную топологию на множестве всех отрезков единичной длины на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

7.11x. Чему гомеоморфно факторпространства B^3 по отношению эквивалентности $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$.

7.12x. Введя естественную топологию на множестве поворотов $\mathbb{R}^3$ вокруг всевозможных прямых, проходящих через начало координат, на всевозможные углы, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Лекция 8

Компактные и паракомпактные пространства.

8.1. Определение. Пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Покрытие u *вписано* в покрытие v, если каждый элемент $U \in u$ содержится в некотором множестве $V \in v$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из Определения 8.1.

8.2. Предложение. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда в любое его открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие.* $\square$

8.3. Определение. Семейство подмножеств множества X называется *центрированным*, если пересечение любого конечного числа его элементов не пусто.

8.4. Теорема. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых подмножеств X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и Φ - центрированная система его замкнутых подмножеств. Если пересечение всех элементов Φ пусто, то множество $\{X \setminus F : F \in \Phi\}$ является открытым покрытием пространства X. Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{X \setminus F_i,\ i = 1, \dots, k\}$. Тогда $F_1 \cap \ldots \cap F_k = \varnothing$, что противоречит центрированности семейства Φ.

Наоборот, пусть в пространстве X всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Возьмём произвольное открытое покрытие u пространства X. Предположим, что покрытие u не содержит конечного подпокрытия. Тогда семейство

$$\{X \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_k : U_i \in u\}$$

центрировано и имеет пустое пересечение. Это противоречие и завершает доказательство. $\square$

Из Теоремы 8.4 вытекает

8.5. Следствие. *Если X — компактное пространство и F_i, $i \in \mathbb{N}$, — такое семейство непустых замкнутых его подмножеств, что*

$F_{i+1} \subset F_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad$ *то* $\quad \bigcap\{F_i : i \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing.$ $\square$

Это утверждение было использовано при построении кривой Пеано.

8.6. Определение. Пространство X называется *локально компактным*, если для произвольной точки x и её окрестности Ox существует такая окрестность O_1x, что $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset Ox$ и пространство $\mathrm{Cl}(O_1x)$ компактно.

8.7. Определение. Семейство u подмножеств пространства X называется *локально конечным*, если для всякой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства u.

8.8. Определение. Пространство X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Следующее простое утверждение предлагается доказать самим.

8.9. Предложение. *Свойства компактности, локальной компактности, паракомпактности наследуются при переходе к замкнутому подпространству.* $\square$

8.10. Задача. *Пусть F — замкнутое подмножество паракомпактного пространства X и пусть u такое семейство открытых подмножеств пространства X, что $F \subset \bigcup u$. Тогда существует такое локально конечное семейство u_0 открытых подмножеств X, что u_0 вписано в u и $F \subset \bigcup u_0$.*

8.11. Определение. Семейство u подмножеств пространства X называется *консервативным*, если

$$\mathrm{Cl}\Big(\bigcup\big\{U \in u_0\big\}\Big) = \bigcup\big\{\mathrm{Cl}(U) : U \in u_0\big\} \tag{8.1}$$

для всякого подсемейства $u_0 \subset u$.

8.12. Предложение. *Всякое локально конечное семейство консервативно.*

Доказательство. Равенство (8.1) складывается из двух включений $\supset$ и $\subset$. Включение $\supset$ вытекает из монотонности операции замыкания. Проверим, что выполнено включение $\subset$. Пусть $x \in \mathrm{Cl}\big(\bigcup\{U \in u_0\}\big)$. Существует окрестность Ox, пересекающаяся с конечным семейством элементов u_0, а именно, с $U_1, \ldots, U_k$. Тогда $x \in \mathrm{Cl}(U_1 \cup \ldots \cup U_k) = \mathrm{Cl}(U_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Cl}(U_k) \subset \bigcup\big\{\mathrm{Cl}(U) : U \in u_0\big\}$. $\square$

8.13. Теорема. *Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство X нормально.*

Доказательство. Сначала покажем, что X регулярно. Пусть даны замкнутое множество $F \subset X$ и точка $x_0 \in X \backslash F$. Для каждой точки $x \in F$ существуют непересекающиеся окрестности $O_x x_0$ и $O_{x_0} x$ точки x_0 и точки x соответственно. В семейство $\big\{O_{x_0} x\big\}$, для которого $F \subset \cup\big\{O_{x_0} x : x \in F\big\}$, в силу 8.10, можно вписать локально конечное открытое в X семейство $v = \{V_\lambda\}$ такое, что $F \subset \cup v$.

Но v — локально конечная и, согласно Предложению 8.12, консервативная система множеств. Поэтому

$$\mathrm{Cl}\big(\bigcup_\lambda V_\lambda\big) = \bigcup_\lambda \mathrm{Cl}(V_\lambda) \subset X \setminus \{x_0\},$$

так что $Ox_0 = X \setminus \mathrm{Cl}\big(\bigcup_\lambda V_\lambda\big)$ есть окрестность точки x_0, а с другой стороны $OF = \bigcup_\lambda V_\lambda$ есть окрестность множества F и, очевидно, $Ox_0 \cap OF = \varnothing$. Регулярность пространства X доказана.

Заменяя пару (F, x_0) парой непересекающихся замкнутых множеств (F_1, F_2) и применяя аналогичную процедуру, доказываем нормальность регулярного паракомпактного пространства X. $\square$

8.14. Следствие. *Всякое хаусдорфово компактное пространство X нормально.* $\square$

8.15. Предложение. *Если F — компактное подпространство хаусдорфова пространства X, то F замкнуто в X.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X \setminus F$. Применяя процедуру первой части доказательства Теоремы 8.13, находим непересекающиеся окрестности Ox_0 и OF. В частности, $Ox_0 \cap F = \varnothing$, т.е. x_0 является внутренней точкой множества $X \setminus F$. $\square$

8.16. Предложение. *Если подмножество X эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно, то оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Замкнутость X вытекает из Предложения 8.15. Если бы X было не ограничено, то из покрытия X открытыми дисками $\mathcal{D}^n_m$, $m \in \mathbb{N}$, радиуса m с центром в начале координат нельзя было бы выделить конечного подпокрытия. $\square$

8.17. Предложение. *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть X компактно и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение на Y. Покажем, что Y компактно. Пусть $u \in \operatorname{cov}(Y)$. В силу непрерывности f, семейство $f^{-1}(u) = \big\{f^{-1}(U) : U \in u\big\}$ является открытым покрытием пространства X. Выделим из него конечное подпокрытие $f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_k)$. Тогда семейство $\{U_1, \dots, U_k\}$ будет конечным покрытием, выделенным из покрытия u. $\square$

Из Предложений 8.16 и 8.17 вытекает

8.18. Следствие. *Всякая непрерывная на компактном пространстве функция ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.* $\square$

8.19. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *замкнутым (открытым)*, если образ $f(A)$ всякого замкнутого (открытого) в X множества A замкнут (открыт) в Y.

8.20. Предложение. *Непрерывное взаимно однозначное отображение*

f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.

Доказательство. Из Предложений 8.15 и 8.17 вытекает замкнутость отображения f, что влечёт непрерывность обратного отображения f^{-1} (см. Предложение 4.2). $\square$

8.21. Определение. Пространство X называется *финально компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

8.22. Теорема. *Всякое регулярное финально компактное пространство X паракомпактно.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{cov}(X)$. Для произвольного множества $U \in u$ и точки $x \in U$ согласно регулярности X существует такая окрестность $O^U x$ точки x, что

$$\mathrm{Cl}\big(O^U x\big) \subset U. \tag{8.2}$$

В силу финальной компактности X из покрытия

$$\Omega = \big\{O^U x : U \in u, x \in X\big\} \in \mathrm{cov}(X) \tag{8.3}$$

можно выделить счётное подпокрытие

$$\Omega_1 = \big\{O^{U_i} x_i : i \in \mathbb{N}\big\}. \tag{8.4}$$

Из (8.2) и (8.4) вытекает, что семейство

$$u_0 = \{U_i, \quad i \in \mathbb{N}\} \tag{8.5}$$

является покрытием пространства X. Определим множества $V_i,\ i \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$V_1 = U_1, \quad V_{j+1} = U_{j+1} \setminus \bigcup\big\{\mathrm{Cl}\big(O^{U_i} x_i\big) : i \leq j\big\}. \tag{8.6}$$

Мы утверждаем, что $v = \{V_j : j \in \mathbb{N}\}$ является открытым локально конечным покрытием, вписанным в покрытие u_0 и, следовательно, в покрытие u.

Начнём с того, что согласно (8.6) семейство v состоит из открытых множеств и вписано в покрытие u_0. Остаётся проверить, что v является локально конечным покрытием пространства X.

Докажем сначала, что $v \in \operatorname{cov}(X)$. Возьмём произвольную точку $x \in X$. Существует наименьшее такое j, что $x = U_j$. Тогда $x \notin \operatorname{Cl}\big(O^{U_i}x_i\big)$ при $i < j$ и, следовательно, $x \in V_j$ согласно (8.6). Итак, v — покрытие. Осталось проверить локальную конечность v. Поскольку Ω_1 — покрытие, x принадлежит некоторому множеству $O^{U_i}x_i$. Тогда из (8.6) вытекает, что $O^{U_i}x_i$ является окрестностью точки x, не пересекающейся с множеством V_j при $j > i$. Значит, покрытие v локально конечно. $\square$

Из Теоремы 8.22 вытекает

8.23. Теорема. *Метрическое пространство со счётной базой, в частности, всякое эвклидово пространство $\mathbb{R}^n$, паракомпактно.*

Доказательство. Всякое пространство со счётной базой финально компактно. Поэтому для применения Теоремы 8.22 достаточно показать, что всякое метрическое пространство X регулярно. Пусть F — замкнутое подмножество пространства X и пусть $x_0 \in X \setminus F$. Поскольку множество $X \setminus F$ открыто, существует такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus F$. Возьмём такое ε', что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда

$$\operatorname{Cl}\big(O'_\varepsilon(x_0)\big) \subset \big\{x : \rho(x, x_0) \le \varepsilon'\big\} \subset O_\varepsilon(x). \tag{8.7}$$

Из (8.7) вытекает регулярность X. $\square$

8.24. Замечание. Имеет место и более общее утверждение: *всякое метрическое пространство паракомпактно.*

Задачи.

8.1. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности. Тем самым компактное хаусдорфово пространство нормально.

8.2. Доказать, что если в произведении пространств X и Y сомножитель Y компактен, то проекция $X \times Y \to X$ — замкнутое отображение.

8.3. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

8.4. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

8.5. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств, U — окрестность $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

8.6. Докажите, что компактное хаусдорфово пространство удовлетворяет свойству Бэра.

8.7. Докажите, что любое некомпактное метрическое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

8.8. Докажите, что на любом некомпактном метрическом пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

8.9. Доказать, что любая непрерывная функция на метрическом компакте X равномерно непрерывна (т.е. для любой функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что образ множества диаметра меньше δ имеет диаметр меньше ϵ).

8.10. (Теорема Лебега о покрытиях) Доказать, что для любого открытого покрытия ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие ω. Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

8.11. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) компактным пространством?

8.12. Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

8.13. Рассмотрите линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

8.14. Докажите, что подмножество $(0,1] \times \{0\} \cup [0,1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

8.15. Докажите, что Определение 8.6 локальной компактности эквивалентно для хаусдорфовых пространств наличию у каждой точки окрестности с компактным замыканием.

8.16. Докажите, что открытое подмножество локально компактного хаусдорфова пространства локально компактно. Можно ли отказаться от условия хаусдорфовости?

8.17. Будет ли объединение локально компактных подмножеств локально компактного пространства локально компактным?

8.18. Будет ли непрерывный хаусдорфов образ локально компактного пространства локально компактным? А если, дополнительно, отображение открыто или замкнуто?

8.19. Привести пример счетного открытого покрытия числовой прямой, из которого нельзя выбрать локально конечное подпокрытие.

8.20. Доказать, что в любое открытое покрытие пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, можно вписать локально конечное покрытие (т.е. пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, паракомпактны).

8.21. Показать, что любое (не обязательно открытое) локально конечное покрытие компакта конечно.

8.22. Будет ли произведение локально компактных (соответственно паракомпактных, финально компактных) пространств локально компактным (соответственно паракомпактным, финально компактным) пространством?

8.23. Будет ли непрерывный образ финально компактного пространства финально компактным?

8.24. Будет ли непрерывный (хаусдорфов) образ паракомпактного пространства паракомпактным пространством?

8.25. Докажите, что непрерывное биективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.

8.26. Докажите, что непрерывное сюръективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является факторотображением.

8.27. Пусть $f : X \to Y$ — замкнутое отображение, $A \subset Y$, U — открытая окрестность $f^{-1}(A)$ в X. Докажите, что существует открытая окрестность V множества A в Y такая, что $f^{-1}(V) \subset U$.

Дополнительные задачи.

8.1x. Будут ли компактами пространство Бэра, метризуемый еж?

8.2x. *"Компактный еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим топологию: на полуинтервалах $(0,1]_\lambda, \lambda \in \Lambda$ — обычная интервальная топология, базисными окрестностями $\{0\}$ являются объединения конечного числа полуинтервалов $[0, a(\lambda))_\lambda, 0 < a(\lambda), \lambda \in \Lambda_{Fin} \subset \Lambda$, и всех отрезков $[0,1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{Fin}$. Показать, что топология корректно задана, компактный еж — компактен. Сравнить топологии метризуемого и компактного ежей.

8.3x. Доказать сепарабельность метрического пространства $C(K)$ (непрерывных функций на метризуемом компакте K с топологией равномерной сходимости).

8.4x. (Теорема Стоуна-Вейерштрасса) Доказать, что кольцо непрерывных вещественных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, содержащее все постоянные функции, разделяющее точки и замкнутые подмножества (т.е. для любых точки x и замкнутого множества F, $x \notin F$ существует непрерывная функция $f : X \to I = [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$, $F \subset f^{-1}(1)$) и замкнутое в топологии равномерной сходимости совпадает с кольцом всех непрерывных функций.

8.5x. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию). Верно ли утверждение для произвольного линейного пространства?

8.6x. Докажите, что одноточечная Александровская компактификация локально компактного хаусдорфова пространства — хаусдорфово компактное пространство.

8.7x. Покажите, что одноточечная Александровская компактификация пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна сфере S^n, $n \in \mathbb{N}$.

8.8x. Докажите, что хаусдорфово пространство паракомпактно в том и только том случае, если для каждого его покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы.

8.9x. Существует ли финально компактное, не сепарабельное пространство?

Существует ли сепарабельное, не финально компактное пространство?

8.10x. Доказать, что для любого компактного подмножества K в $\mathbb{R}^\infty$ существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^\infty$, при котором K отображается в подмножество, проекция которого на один из сомножителей одноточечна.

8.11x. Пусть проекция компакта K в $\mathbb{R}^3$ на плоскость $\mathbb{R}^2$ инъективна. Доказать, что существует гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$, переводящий K в подмножество некоторой плоскости.

8.12x. (Теорема Банаха от открытом отображении) Линейное непрерывное сюръективное отображение банаховых пространств открыто.

Лекция 9

Сохранение компактности и аксиом отделимости декартовыми произведениями.

9.1. Аксиома выбора. *Для каждого множества* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *непустых множеств существует такая функция* $f : A \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, *что* $f(\alpha) \in X_\alpha$ *для каждого* $\alpha \in A$.

9.2. Определение. Пусть X — множество и $\leq$ — бинарное отношение на X. Говорят, что $\leq$ *упорядочивает* X или что $\leq$ является *порядком* на X, если отношение $\leq$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (*транзитивность*).

(2) $x \leq x$ для всякого $x \in X$ (*рефлексивность*).

(3) Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (*антисимметричность*).

Множество X вместе с порядком $\leq$ на нём называется *упорядоченным множеством.* Два элемента X и Y упорядоченного множества X называются *несравнимыми*, если никакое из неравенств $x \leq y$ и $y \leq x$ не выполняется. Упорядоченное множество $(X, \leq)$ называется *линейно упорядоченным*, если оно не содержит несравнимых элементов, т.е. для $x,\ y \in X$ всегда $x \leq y$ или $y \leq x$.

9.3. Предложение. *Пусть* $(X, \leq)$ — *упорядоченное множество и* $Y \subset X$. *Тогда отношение* $\leq |Y$ *есть отношение порядка на* Y. *Если* $\leq$ *есть линейный порядок на* X, *то* $\leq |Y$ *является линейным порядком на* Y. $\square$

9.4. Определение. Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X имеет *верхнюю грань* в X, если существует элемент $x \in X$, для которого $y \leq x$ для всех $y \in Y$.

9.5. Определение. Элемент x упорядоченного множества X называется *максимальным*, если для любого другого элемента $y \in X$ либо $y \leq x$, либо y несравним с x. Элемент $x \in X$ называется *наибольшим*, если $y \leq x$ для всех $y \in X$.

9.6. Пример. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим следующее отношение $\leq$:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \quad \text{и} \quad x_2 \leq y_2. \tag{9.1}$$

Легко видеть, что $\leq$ есть порядок на $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^2$, определяемое следующим образом:

$$X = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq -x_1\big\}. \tag{9.2}$$

Пусть $Y = \big\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\big\}$. Согласно (9.1) и (9.2) $Y \subset X$. Ограничение $\leq |X$ порядка (9.1) является порядком на X согласно Предложению 9.3.

9.7. Задача. Доказать, что Y является множеством всех максимальных элементов упорядоченного множества X и ни один из элементов Y не является наибольшим в X.

9.8. Лемма Куратовского–Цорна. *Пусть $(X, \leq)$ — упорядоченное множество. Предположим, что каждое линейно упорядоченное множество $Y \subset X$ имеет верхнюю грань в X. Тогда X имеет максимальный элемент.* $\square$

Лемма Куратовского–Цорна вытекает из аксиомы выбора (и даже эквивалентна ей). Доказательство можно найти в любом учебнике по теории множеств, а также в монографии[5].

9.9. Лемма Александера. *Если в пространстве X существует такая предбаза $\mathcal{B}$, что из любого покрытия пространства X её элементами можно выделить конечное подпокрытие, то X компактно.*

Доказательство. Предположим, что существует покрытие $u_0 \in \operatorname{cov}(X)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Положим

$$\mathcal{U} = \bigl\{u \in \operatorname{cov}(X) : u_0 \subset u, \quad u \text{ не содержит конечного } \quad u' \in \operatorname{cov}(X)\bigr\}, \tag{9.3}$$

считая все элементы рассматриваемых покрытий попарно различными. Множество $\mathcal{U}$ упорядочено отношением включения.

Пусть $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ — линейно упорядоченное подмножество. Если $\mathcal{U}_0$ имеет максимальный элемент, то он и является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Если же $\mathcal{U}_0$ не имеет максимального элемента, то положим

$$v = \bigcup \bigl\{u : u \in \mathcal{U}_0\bigr\}. \tag{9.4}$$

Возьмём произвольное конечное множество $v' = \{V_1, \ldots, V_n\} \subset v$. Из (9.4) вытекает, что каждое $V_i \in v'$ является элементом некоторого $u_i \in \mathcal{U}_0$. Следовательно, $v' \subset u_1 \cup \ldots \cup u_n \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Из определения (9.3) вытекает, что v' не является покрытием. Значит, $v \in \mathcal{U}$ и является верхней гранью множества $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$. Таким образом, множество $\mathcal{U}$ удовлетворяет условиям Леммы Куратовского–Цорна и, следовательно, имеет максимальный элемент v_0.

Покажем, что $v_0 \cap \mathcal{B}$ — покрытие X. Для произвольной точки $x \in X$ существует содержащий её элемент V покрытия v_0. Существуют такие элементы $G_1, \ldots, G_n$ предбазы $\mathcal{B}$, что

$$x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n \subset V. \tag{9.5}$$

Если $G_i \in v_0$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то по крайней мере один из элементов семейства $v_0 \cap \mathcal{B}$, а именно G_i, содержит точку x и, в силу её произвольности, $v_0 \cap \mathcal{B} \in \operatorname{cov}(X)$.

Предположим, что существует точка x такая, что никакое из множеств G_i не принадлежит v_0. Тогда, в силу максимальности семейства v_0 в $\mathcal{U}$,

$v_0 \cup \{G_i\} \notin \mathcal{U}, \quad i = 1, \ldots, n.$

Значит, $v_0 \cup \{G_i\}$ содержит конечное подпокрытие. Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существуют такие множества

$V_1^i, \dots, V_{j(i)}^i \in v_0,$

что

$$G_i \cup \left(\bigcup \{ V_k^i, \quad k = 1, \dots, j(i) \} \right) = X. \tag{9.6}$$

Из (9.6) вытекает

$$\left(\bigcap_{i=1}^n G_i \right) \cup \left(\bigcup_{i,k} V_k^i \right) = X. \tag{9.7}$$

Значит, в силу (9.5) и (9.7), семейство v_0 содержит конечное подпокрытие $\{V, V_k^i : i, k\}$. Это противоречие показывает, что $v_0 \cap \mathcal{B}$ — покрытие. Из него по свойству предбазы $\mathcal{B}$ можно выделить конечное подпокрытие. Тем более конечное подпокрытие можно выделить из покрытия v_0. Это противоречие и заканчивает доказательство. $\square$

9.10. Первая теорема Тихонова. *Произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство. Пусть $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Согласно лемме Александера достаточно показать, что из покрытия u пространства X, состоящего из множеств вида $p_\alpha^{-1}(V)$, где V открыто в X_α, можно выделить конечное подпокрытие. Для этого, в силу компактности сомножителей X_α, достаточно найти такой индекс α, что для всякой точки $x \in X_\alpha$ имеем

$$p_\alpha^{-1}(x) \subset U \in u.$$

Пусть этого сделать нельзя. Тогда для всякого $\alpha \in A$ найдётся такая точка $x_\alpha \in X_\alpha$, что множество $p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. Отсюда вытекает, что точка $x = (x_\alpha : \alpha \in A)$ не лежит ни в одном из элементов покрытия u. В самом деле, если $x \in p_\beta^{-1}(V) \in u$, где V открыто в X_β, то $p_\beta(x) \in V$ и $p_\beta^{-1}(p_\beta(x)) \subset p_\beta^{-1}(V)$. Это противоречие и завершает доказательство. $\square$

Теперь мы можем обратить Предложение 8.16. А именно, имеет место

9.11. Теорема. *Подмножество X эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость составляет содержание Предложения 8.16. Проверим достаточность. Пусть X замкнуто и ограничено. Из ограниченности X вытекает существование такого замкнутого шара B^n_m радиуса m с центром в начале координат, что $X \subset B^n_m$. Но B^n_m лежит в произведении отрезков $[-m, m]^n$, которое компактно по Теореме 9.10. Тогда X компактно как замкнутое подмножество компактного куба $[-m, m]^n$ (см. Предложение 8.9). $\square$

9.12. Предложение. *Произведение T_i-пространств, $i = 0, 1, 2, 3$, есть T_i-пространство. В частности, произведение регулярных пространств регулярно.*

Доказательство. Проверим последнее утверждение. Известно, что регулярные пространства — это пространства, одновременно удовлетворяющие аксиомам T_0 и T_3. Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и сомножители X_α регулярны. Возьмём различные точки $x, y \in X$. Существует такое α, что $p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$. Поскольку $X_\alpha \in T_0$, одна из точек $p_\alpha(x)$ и $p_\alpha(y)$ имеет окрестность, не содержащую другую точку. Предположим, что открытое множество $V \subset X_\alpha$ содержит $p_\alpha(x)$ и не содержит $p_\alpha(y)$. Тогда $x \in p_\alpha^{-1}(V)$ и $y \notin p_\alpha^{-1}(V)$. Таким образом, X является T_0-пространством.

Чтобы проверить аксиому T_3, надо для произвольной окрестности Ox точки $x \in X$ найти такую окрестность O_1x, что $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset Ox$. По определению топологии произведения существуют такой конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и такие открытые множества $V_i \subset X_\alpha$, что

$$x \in \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset Ox. \tag{9.8}$$

Имеем $x_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}(x) \in V_i$. Поскольку X_{α_i} удовлетворяет T_3, существует такая окрестность Ox_{α_i}, что $\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i}) \subset V_i$. Положим

$$O_1x = \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(Ox_{\alpha_i}) : i = 1, \ldots, k\}.$$

Тогда $\mathrm{Cl}(O_1x) \subset \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Cl}(Ox_{\alpha_i})) : i = 1, \ldots, k\} \subset \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, k\} \subset$ (9.8) $\subset Ox$. $\square$

9.13. Пример *нормального финально-компактного пространства X, квадрат которого не нормален.*

На полуинтервале $[0, 1)$ рассмотрим топологию, базу которой образуют всевозможные интервалы $[a, b)$. Семейство таких полуинтервалов образует базу топологии, поскольку оно содержит все конечные непустые пересечения своих элементов и является покрытием. Полуинтервал $[0, 1)$ с такой топологией и обозначим через X. Это пространство называется „стрелкой“.

1. Пространство X регулярно, поскольку всякий интервал $[a, b)$ одновременно открыт и замкнут в X.

2. Пространство X финально-компактно. В самом деле, предположим, что из некоторого открытого покрытия u пространства X нельзя выбрать счётного подпокрытия. Пусть a - точная нижняя грань таких чисел $b < 1$, что отрезок $[0, b]$ нельзя покрыть счётным числом элементов покрытия u (случай, когда данное множество пусто можно рассмотреть отдельно аналогичным образом). Тогда полуинтервал $[0, a)$ как сумма счётного числа отрезков $[0, r]$ ($r < a$ и r рационально) покрывается счётным подсемейством v покрытия u. Но точка a лежит в каком-нибудь элементе $U \in u$ вместе с некоторым полуинтервалом $[a, c)$. Тогда при любом $d, a < d < c$, отрезок $[0, d]$ покрывается счётным семейством $v \cup \{U\} \subset u$, что противоречит определению a.

3. Пространство X, будучи регулярным и финально-компактным, паракомпактно (Теорема 8.22) и, следовательно, нормально (Теорема 8.13).

4. Квадрат $X \times X$ не нормален. В самом деле, рассмотрим побочную диагональ в квадрате, т.е. множество Y всех точек вида $(a, 1 - a), 0 < a < 1$. Поскольку полуоткрытые прямоугольники вида $[a, b) \times [1 - a, c)$ образуют базу окрестностей точки $(a, 1 - a)$ в $X \times X$, всякая точка $y \in Y$ изолирована в Y, т.е. Y — дискретное подпространство произведения $X \times X$. В то же

время, Y замкнуто в $X \times X$. Поэтому всякое множество $Z \subset Y$ замкнуто в $X \times X$.

Множество Y равномощно интервалу $(0, 1)$ и, следовательно, имеет мощность континуума, которую обозначим через $\mathfrak{c}$. Для каждого множества $Z \in 2^Y$ рассмотрим непрерывную функцию $\varphi_Z : Y \to [0, 1]$, равную 0 на Z и 1 на $Y \setminus Z$. Количество таких функций равномощно множеству 2^Y, т.е. имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$. Если бы пространство $X \times X$ было нормально, то всякую функцию φ_Z можно было бы продолжить до непрерывной функции $f_Z : X \times X \to [0, 1]$ по теореме Брауэра–Титце–Урысона. Но пространство $X \times X$ имеет счётное плотное множество D точек вида (x_1, x_2), где $x_i \in (0, 1)$ — рациональные числа. Согласно Предложению 5.10 всякое непрерывное отображение $f : X \times X \to [0, 1]$ однозначно определяется своими значениями на счётном плотном множестве D. Но множество $[0, 1]^D$ всех (не только непрерывных) отображений $g : D \to [0, 1]$ имеет мощность $\mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^\omega = \mathfrak{c}$. Это противоречие показывает, что квадрат "стрелки" не нормален.

5. Замечание. Напомним, что ω — мощность множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Равенства $\mathfrak{c}^\omega = (2^\omega)^\omega$ и $2^\omega = \mathfrak{c}$ вытекают из Предложения 1.7. Равенство $(2^\omega)^\omega = 2^{\omega \cdot \omega}$, являющееся утверждением арифметики кардинальных чисел, принимаем без доказательства. Наконец, равенство $2^{\omega \cdot \omega} = 2^\omega$ вытекает из простого утверждения: квадрат счетного множества счетен.

6. Пространство X является также примером финально-компактного пространства, квадрат которого не финально-компактен. В самом деле, финальная компактность, как и компактность, наследуется при переходе к замкнутым подмножествам. Но $X \times X$ содержит замкнутое множество Y, которое не финально-компактно, будучи дискретным и несчётным.

7. Согласно Теоремам 8.13 и 8.22 пространство X является примером паракомпакта (хаусдорфова паракомпактного пространства), квадрат которого не паракомпактен.

8. Отметим также, что "стрелка" сепарабельна: всюду плотное множество

образуют рациональные числа.

Задачи.

9.1. Установите гомеоморфность канторова множества и счетного произведения дискретных двоеточий.

9.2. Докажите, что канторово множество C однородно, т.е. для любых точек $x, y \in C$ существует гомеоморфизм $h : C \to C$, при котором $h(x) = y$.

9.3. Пусть X или канторово множество, или гильбертов куб $Q = [0,1]^\infty$. Докажите, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

9.4. Какие из подмножеств пространства матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

9.5. Докажите, что для любого компактного подмножества K метрического пространства X существуют точки $x, y \in K$ такие, что $\mathrm{diam} X = \rho(x, y)$.

9.6. Подмножество A метрического пространства вполне ограничено, если для любого $\epsilon > 0$ из семейства открытых шаров радиуса ϵ, покрывающего A, можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее A. Будут ли вполне ограничены пространства в примерах 1.4 и 1.5?

9.7. Доказать, что подмножество A полного метрического пространства X компактно в том и только том случае, если оно замкнуто и вполне ограничено. Показать, что условие вполне ограниченности нельзя заменить на условие ограниченности.

Дополнительные задачи.

9.1x. Приведите пример пространства X такого, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N}$, а X^∞ не гомеоморфно X.

9.2x. Докажите, что подмножество $X = \{x \in \ell_2 : |x_n| \leq 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ компактно. Гомеоморфно ли оно гильбертову кубу?

9.3x. Какие подмножества прямой Зоргенфрея ей гомеоморфны?

9.4x. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно счетному произведению дискретного счетного пространства.

Лекция 10

Метризуемые пространства.

10.1. Определение. Топологическое пространство X называется *метризуемым*, если на X существует такая метрика ρ, что топология метрического пространства (X, ρ) совпадает с топологией пространства X.

10.2. Пример метризуемого пространства. Дискретное пространство X, т.е. пространство, в котором всякое множество $Y \subset X$ открыто, метризуемо. В самом деле, топология пространства X порождается метрикой ρ из Примера 1.2.3, т.е. такой метрикой, что $\rho(x, y) = 1$ для любых различных точек $x, y \in X$.

10.3. Определение. Пусть даны две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X. Они называются *топологически эквивалентными*, если метрические пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) гомеоморфны.

10.4. Предложение. *Всякая метрика ρ_1 на множестве X топологически эквивалентна метрике ρ_2 диаметра ≤ 1.*

При этом, мы пишем $\mathrm{diam}\rho \leq d$, если $\mathrm{diam}(X, \rho) \leq d$.

Доказательство. Можно положить, например, $\rho_2(x, y) = \min\{\rho_1(x, y), 1\}$. Читателю предлагается проверить, что ρ_2 — метрика, топологически эквивалентная метрике ρ_1. $\square$

Следующее утверждение обобщает Пример 10.2.

10.5. Предложение. *Сумма $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ метризуемых пространств X_α метризуема.*

Доказательство. Пусть ρ_α — метрика на X_α, порождающая топологию пространства X_α. Согласно Предложению 10.4 можно считать, что $\mathrm{diam}\rho_\alpha \leq$

1. Определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ следующим образом:

$\rho(x, y) = \rho_\alpha(x, y)$, если $x, y \in X_\alpha$;

$\rho(x, y) = 1$, если x и y лежат в разных слагаемых.

Легко проверить,что ρ — это метрика на X (здесь важно, что $\mathrm{diam}\rho_\alpha \le 1$). Поскольку $\rho|X_\alpha = \rho_\alpha$, метрика ρ порождает на X_α исходную топологию. Каждое слагаемое X_α открыто в топологии, порождаемой метрикой ρ. В самом деле, если $x \in X_\alpha$ и $\varepsilon < 1$, то $O^\rho_\varepsilon(x) \subset X_\alpha$. Из дизъюнктности слагаемых X_α вытекает, что они открыто-замкнуты в топологии $\mathcal{T}_\rho$. $\square$

10.6. Теорема. *Счётное произведение X метризуемых пространств метризуемо.*

Доказательство. Пусть $X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Согласно Предложению 10.4 пространства X_n можно наделить такими метриками ρ_n, что

$$\mathrm{diam} X_n \le 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наделим X метрикой ρ, принимающей на произвольной паре точек $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ из X значения

$$\rho(x, y) = \Big[\sum\Big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{10.1}$$

Метрическое пространство (X, ρ) обозначим через X_M. Надо доказать, что тождественное отображение $h : X \to X_M$ является гомеоморфизмом.

Докажем сначала, что h непрерывно. Возьмём произвольно точку $x = (x_n) \in X$ и её ε-окрестность $O_\varepsilon(x), \varepsilon > 0$, относительно метрики ρ. Выберем номер N так, чтобы

$$\sum\Big\{\frac{1}{2^n} : n > N\Big\} < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{10.2}$$

Окрестность $Ox \subset X$ точки x определим следующим образом:

$$Ox = \Big\{y = (y_n) \in X : \rho_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}},\ n = 1, \dots, N\Big\}. \tag{10.3}$$

Тогда $\rho^2(x,y) = (10.1) = \sum\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \in \mathbb{N}\big\} = \sum\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \leq N\big\} + \sum\big\{\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n > N\big\} < (10.2) < \sum\frac{1}{2^n}\rho_n^2(x_n,y_n) : n \leq N\big\} + \frac{\varepsilon^2}{2} < (10.3) < \sum\big\{\frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon^2}{2N} : n \leq N\big\} + \frac{\varepsilon^2}{2} < N\frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2$.

Таким образом, $Ox \subset O_\varepsilon(x)$, т.е. отображение h непрерывно.

Теперь докажем непрерывность отображения h^{-1}. Возьмём окрестность $Ox \subset X$ точки x. При необходимости уменьшая её, можно считать, что окрестность Ox элементарна, т.е.

$$Ox = \big\{y = (y_n) \in X : \rho_n(y_n, x_n) < \varepsilon_n, n = 1, \ldots, s\big\}. \tag{10.4}$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2^s}}\min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s\}. \tag{10.5}$$

Пусть $y \in O_\varepsilon(x)$. Тогда из (10.1) получаем

$$\frac{1}{2^n}\rho_n^2(y_n, x_n) < \varepsilon^2$$

или

$$\rho_n(y_n, x_n) < \varepsilon\sqrt{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.6}$$

Условия (10.5) и (10.6) влекут

$$\rho_n(y_n, x_n) < \frac{\varepsilon_n\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^s}} \leq \varepsilon_n, \quad n = 1, \ldots, s.$$

Следовательно, $O_\varepsilon(x) \subset Ox$ согласно (10.4), т.е. отображение h^{-1} непрерывно.
$\square$

10.7. Теорема Урысона. *Всякое нормальное пространство X со счётной базой метризуемо.*

Доказательство. Поскольку подпространство метризуемого пространства метризуемо (см. 1.2.4), достаточно, в силу Теоремы 10.6, построить гомеоморфное вложение $f : X \to I^\omega$ пространства X в гильбертов куб (счётное произведение отрезков). Пусть $\mathcal{B}$ — счётная база пространства X. Пару элементов $\pi = (U, V)$ базы $\mathcal{B}$ назовём *нормальной*, если

$$\mathrm{Cl}(V) \subset U.$$

Множество всех нормальных пар, как и множество всех пар элементов базы $\mathcal{B}$ счётно. Занумеруем их натуральными числами:

$$\pi_n = (U_n, V_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

По лемме Урысона для каждой нормальной пары π_n существует такая непрерывная функция

$\varphi_n : X \to I_n = [0,1]$,

что

$$\varphi_n(V_n) = 1, \quad \varphi_n(X \setminus U_n) = 0. \tag{10.7}$$

Положим

$$f = \mathop{\Delta}_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n = I^\omega. \tag{10.8}$$

Отображение f непрерывно как диагональное произведение непрерывных отображений (см. Предложение 7.4.4).

Докажем инъективность отображения f. Пусть $x, y \in X$ — различные точки. Поскольку X — T_1-пространство, существует такой элемент $U \in \mathcal{B}$, что

$x \in U, \ \ y \in X \setminus U$.

В силу регулярности X существует такая окрестность Ox, что $\mathrm{Cl}(Ox) \subset U$. Далее, существует такое $V \in \mathcal{B}$, что

$x \in V \subset Ox \subset \mathrm{Cl}(Ox) \subset U$.

Ясно, что (U, V) — нормальная пара. Следовательно, $(U, V) = (U_n, V_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (10.7) вытекает, что $\varphi_n(x) = 1 \neq 0 = \varphi_n(y)$. Значит, $f(x) \neq f(y)$ согласно (10.8).

Остаётся показать, что отображение

$f^{-1} : f(X) \to X$

непрерывно. Пусть $y = (y_n) \in f(X)$ и $f^{-1}(y) = x$. Берём произвольную окрестность Ox точки x. Следуя процедуре доказательства инъективности отображения f, находим такую нормальную пару $\pi_n = (U_n, V_n)$, что

$x \in V_n \subset U_n \subset Ox.$

Согласно (10.7) функция $\varphi_n : X \to [0,1]$ обладает свойствами

$$\varphi_n(x) = 1, \quad \varphi_n(x') = 0 \quad \text{для всякого} \quad x' \in X \setminus Ox. \tag{10.9}$$

Пусть $p_n : I^\omega \to I_n$ — проектирование. Тогда, в силу (10.8), коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & I^\omega \arrow[d, "p_n"] \\ & I_n. \end{tikzcd}$$

Из коммутативности этой диаграммы вытекает, что множество $p_n^{-1}(0,1]$ является окрестностью Oy точки y, поскольку $p_n(y) = \varphi_n(x) = (10.9) = 1$. Пусть теперь $z \in f^{-1}\big(Oy \cap f(X)\big)$. Тогда

$$\varphi_n(z) = p_n\big(f(z)\big) > 0, \tag{10.10}$$

так как $f(z) \in Oy$. Следовательно, $z \in Ox$ согласно (10.9) и (10.10). Поэтому $f^{-1}(Oy) \subset Ox$ и, значит, отображение f^{-1} непрерывно. $\square$

Задачи.

10.1. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x,y) \le k_2\rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) \le k_1\rho_1(x,y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

10.2. Пусть (X,ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ и $\rho_2(x,y) = \rho(x,y)/(1+\rho(x,y))$, эквивалентны метрике ρ.

10.3. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

10.4. Исследовать иерархию топологий, порожденных метриками в задачах 1.1, 1.2, 1.5, 1.8.

Исследовать иерархию топологий, порожденных ограничениями метрик на общие подмножества в задаче 1.4.

10.5. Покажите, что любое нормальное пространство со счетной базой является всюду плотным подмножеством метризуемого компакта.

10.6. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.

10.7. Доказать, что для метризуемых пространств условия компактности и секвенциальной компактности (любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность) эквивалентны.

10.8. Доказать, что метризуемый компакт сепарабелен и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

10.9. Доказать, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_1(x, y) < \delta_1$, и $\rho_1(x, y) < \epsilon$ как только $\rho_2(x, y) < \delta_2$.

10.10. Метризуема ли прямая в топологии Зарисского? Прямая Зоргенфрея?

10.11. Доказать, что счетное произведение полно метризуемых пространств — полно метризуемое пространство.

Дополнительные задачи.

10.1х. Покажите, что любой метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества (т.е. является диадическим компактом).

10.2х. Доказать, что регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

10.3х. (Теорема Стоуна) Доказать, что каждое метризуемое пространство паракомпактно.

10.4х. Пространство полно метризуемо, если существует полная метрика, порождающая топологию пространства. Привести пример метризуемого не полно метризуемого пространства.

10.5х. Доказать, что полно метризуемое пространство является G_δ-подмножеством (т.е. пересечением счетного числа открытых подмножеств) любого содержащего его компактного пространства.

10.6х. Докажите, что локально компактное метризуемое пространство полно метризуемо.

10.7х. Докажите, что в полно метризуемом пространстве выполнено свойство Бэра.
Существует ли метризуемое, не полно метризуемое пространство, в котором выполнено свойство Бэра?

10.8х. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена, то пространство компактно.

10.9х. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве полна, то пространство компактно.

10.10х. Верно ли, что одноточечная Александровская компактификация локально компактного метрического пространства — метризуемый компакт?

10.11х. Отображение называется почти непрерывным (почти открытым), если прообраз (образ) любого открытого множества содержится во внутренности замыкания своего прообраза (образа).

Пусть f отображение полно метризуемых пространств. Докажите, что оно непрерывно в том и только том случае, когда оно почти непрерывно и его график замкнут.

10.12х. Докажите, что почти открытое взаимно однозначное отображение полно метризуемого пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

10.13х. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ — линейное топологическое пространство (т.е. естественно определенные операции сложения и умножения непрерывны).

10.14х. Докажите, что любое подпространство $\mathbb{R}^\infty$, содержащее подмножество $\{x \in \mathbb{R}^\infty : |\{x_n \neq 0\}| < \infty\}$, не нормируемо.

10.15х. Докажите, что топология ℓ_2 сильнее топологии на ℓ_2 как на подпространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Лекция 11

Связность и линейная связность. Компоненты связности.

11.1. Определение. Пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых непересекающихся множеств. В противном случае пространство X называется *несвязным.*

11.2. Предложение. *Пространство X несвязно тогда и только тогда, когда X представляется в виде*

$$X = A \sqcup B$$

объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. $\square$

Доказательство предоставляется читателю.

11.3. Примеры. 1. Пустое множество и пространство, состоящее из одной точки, связны.

2. Если пространство X состоит из двух различных точек a и b (Пример 3.22), то топологии $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ („слипшееся двоеточие“), $\mathcal{T}_2 = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$, $\mathcal{T}_3 = \big\{\varnothing, \{b\}, X\big\}$ („связные двоеточия“) связны.

3. Конечное T_1-пространство, содержащее не менее двух точек, несвязно.

4. Подпространства $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) рациональных (соответственно иррациональных) чисел числовой прямой $\mathbb{R}$ несвязны.

11.4. Определение. Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

11.5. Определение. Пространство X называется *индуктивно-нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

11.6. Предложение. *Индуктивно-нульмерное T_0-пространство X регулярно.*

Доказательство. Всякое индуктивно-нульмерное пространство удовлетворяет аксиоме T_3. Поэтому регулярность X вытекает из определения 5.5. $\square$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения подпространства.

11.7. Предложение. *Подпространство индуктивно-нульмерного пространства индуктивно-нульмерно.* $\square$

Из Предложения 11.7 вытекает

11.8. Предложение. *Индуктивно-нульмерное пространство вполне несвязно.* $\square$

11.9. Замечание. Не всякое вполне несвязное пространство индуктивно-нульмерно. Контрпримером является „веер Кнастера-Куратовского“.

Из Предложения 11.2 вытекает

11.10. Предложение. *Если связное подпространство X_0 пространства X пересекается с открыто-замкнутым множеством $U \subset X$, то $X_0 \subset U$.* $\square$

11.11. Предложение. *Пусть в пространстве X имеется такая точка x_0, что для всякой точки $x \in X$ множество $\{x_0, x\}$ содержится в связном множестве $Z_{x_0,x} \subset X$. Тогда X связно.*

Доказательство. Если наше утверждение не верно, то согласно Предложению 11.2 пространство X представляется в виде объединения непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств A и B. Точка x_0 принадлежит одному из этих множеств, например, $x_0 \in A$. Тогда для любой точки $x \in X$ связное множество $Z_{x_0,x} \subset A$ согласно Предложению 11.10. Следовательно, $B = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

Из Предложения 11.11 вытекает

11.12. Предложение. *Пусть Z_α — связное подмножество простран-*

ства X, $\alpha \in A$. *Если* $\bigcap\{Z_\alpha : \alpha \in A\} \neq \varnothing$, *то множество* $Z = \bigcup\{Z_\alpha : \alpha \in A\}$ *связно.* $\square$

11.13. Предложение. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Пусть Z — связное подмножество пространства X. Возьмём непустое открыто-замкнутое подмножество U множества $\mathrm{Cl}(Z)$. Тогда $U \cap Z \neq \varnothing$, так как Z всюду плотно в $\mathrm{Cl}(Z)$. Значит, $U \cap Z$ есть непустое открыто-замкнутое подмножество Z. Из связности Z вытекает, что $U \cap Z = Z$. Следовательно, $U \supset Z$. Поэтому $\mathrm{Cl}(U) \supset \mathrm{Cl}(Z)$. Но U замкнуто в $\mathrm{Cl}(Z)$ и, следовательно, U замкнуто в X. Значит, $U \supset \mathrm{Cl}(Z)$ и поэтому $U = \mathrm{Cl}(Z)$, т.е. $\mathrm{Cl}(Z)$ связно. $\square$

11.14. Определение. Непустое связное множество Z в пространстве X называется *максимальным связным множеством* или *компонентой связности* пространства X, если всякое связное множество Z_1, удовлетворяющее условию

$Z \subset Z_1 \subset X$,

совпадает с Z.

Из Предложения 11.13 вытекает

11.15. Предложение. *Всякая компонента связности пространства* X *замкнута в* X. $\square$

11.16. Предложение. *Всякое пространство* X *является дизъюнктной суммой своих компонент связности.*

Доказательство. Две различные компоненты связности пространства X не пересекаются согласно Предложению 11.12. Из этого же утверждения вытекает, что всякая точка $x \in X$ лежит в некоторой компоненте связности. $\square$

11.17. Примеры. 1. Из Определения 11.4 вытекает, что во всяком вполне несвязном пространстве компоненты связности совпадают с точками этого пространства.

2. В произведении $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ компонентами связности являются вер-

тикальные прямые, задаваемые уравнениями $x = r$, где r — рациональное число.

Из Предложения 11.16 вытекает, что всякая точка $x \in X$ содержится в единственной компоненте связности пространства X. Обозначим её через C_x и назовём *компонентой связности точки* x.

11.18. Определение. Из Предложения 11.16 вытекает, что всякая точка x пространства X лежит в единственной компоненте связности, которая обозначается через C_x.

11.19. Определение. Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

Предложение 11.15 влечет

11.20. Предложение. *Компоненты связности локально связного пространства открыто-замкнуты.* $\square$

11.21. Определение. Пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, содержащих точку $x \in X$, называется *квазикомпонентой точки* x и обозначается через Q_x.

11.22. Предложение. *Для всякой точки $x \in X$ её компонента связности C_x содержится в квазикомпоненте Q_x.*

Доказательство. Пусть U_α — какое-нибудь открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Из Предложения 11.10 получаем, что $C_x \subset U_\alpha$. Тогда $C_x \subset \bigcap\{U_\alpha : x \in U_\alpha\} = Q_x$. $\square$

11.23. Пример *пространства, в котором квазикомпонента не совпадает с компонентой.*

Рассмотрим плоское множество X, которое есть объединение двух вертикальных прямых α и β, задаваемых соответственно уравнениями $x = 0, x = 1$, и контуров прямоугольников q_n, две стороны которых имеют уравнения $x = \frac{1}{n}, x = \frac{n-1}{n}$, а две другие лежат на горизонтальных прямых $y = n, y = -n$.

Докажем, что объединение двух прямых α и β является квазикомпонентой в пространстве X. В самом деле, всякое открыто-замкнутое множество U, пересекающееся с прямой α, содержит всю эту прямую и контуры всех прямоугольников q_n, начиная с некоторого N. Таким образом, квазикомпонента любой точки прямой α содержит всю эту прямую. Но если открыто-замкнутое множество U содержит прямую α, то оно содержит и прямую β. В самом деле, содержа прямую α, множество U содержит контуры q_n со сколь угодно большими номерами и, следовательно, будучи замкнутым, содержит прямую β. Таким образом, квазикомпонента произвольной точки $a \in \alpha$ содержит множество $\alpha \cup \beta$. Но Q_a является пересечением всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку a. Поэтому эта квазикомпонента не может пересекаться ни с одним из контуров q_n, т.е. $Q_a = \alpha \cup \beta$. Но это множество несвязно и, значит, не является компонентой.

11.24. Теорема. *В компактном хаусдорфовом пространстве X компонента C_x любой точки $x \in X$ совпадает с её квазикомпонентой Q_x.*

Доказательство. Согласно Предложению 11.22 достаточно проверить, что

$$C_x \supset Q_x = \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in A\}, \tag{11.2}$$

а для этого достаточно показать, что множество Q_x связно. Если это не так, то Q_x представляется в виде дизъюнктной суммы непустых замкнутых множеств F_1 и F_2. В силу нормальности компакта X, существуют непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2, которые в своей сумме образуют окрестность $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$.

Покажем, что в ней содержится открыто-замкнутая окрестность U. Предположим, что это не так. Тогда семейство

$v = \{V_\alpha = U_\alpha \setminus OQ_x : \alpha \in A\}$

состоит из непустых замкнутых подмножеств компакта $X \setminus OQ_x$. Это семейство центрировано, так как пересечение конечного числа открыто-замкнутых множеств открыто-замкнуто. Тогда $\bigcap v \neq \varnothing$ согласно Теореме 8.4. Но это противоречит равенству из (11.2). Итак, окрестность U существует.

Положим $W_i = U \cap OF_i,\ i = 1, 2$. Из условия $U \subset OF_1 \cup OF_2$ вытекает, что множества W_1 и W_2 открыто-замкнуты в X. Точка x лежит в одном из этих множеств, например, в W_1. Тогда и квазикомпонента Q_x лежит в W_1. Следовательно, $Q_x \cap W_2 = \varnothing$ и поэтому $Q_x \cap F_2 = \varnothing$, поскольку $F_2 \subset U \cap OF_2 = W_2$. Полученное противоречие доказывает связность Q_x. $\square$

11.25. Определение. Непрерывное отображение $\varphi : I \to X$ называется *путём* в пространстве X. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ. Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлёй.*

11.26. Определение. Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём.

11.27. Предложение. *Всякое линейно связное пространство связно.*$\square$

Доказать самим.

Обратить утверждение Предложения 11.27 нельзя, что показывает следующий

11.28. Пример. Возьмём плоский компакт X, являющийся объединением вертикального отрезка $X_1 = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ и графика X_2 функции $\sin\frac{1}{x} : 0 < x \leq 1$.

Это пространство, очевидно, связно. Но оно не линейно связно: никакие две точки a_1 и $a_2,\ a_i \in X_i$, не соединяются путём.

11.29. Определение. Максимальное (по включению) линейно связное подмножество пространства X называется *компонентой линейной связности* пространства X.

11.30. Предложение. *Если Z_1 и Z_2 — пересекающиеся линейно связные подмножества пространства X, то их объединение линейно связно.* $\square$

С применением Леммы Куратовского–Цорна и Предложения 11.30 доказывается

11.31. Предложение. *Всякая точка $x \in X$ содержится в компоненте линейной связности пространства X.* $\square$

Из Предложений 11.30 и 11.31 вытекает

11.32. Предложение. *Пространство X является дизъюнктной суммой своих компонент линейной связности.* $\square$

11.33. Замечание. В отличие от компонент связности компоненты линейной связности не обязаны быть замкнутыми. Так, компакт X из Примера 11.28 имеет две компоненты линейной связности: замкнутую X_1 и незамкнутую X_2.

11.34. Замечание. Теперь мы можем расшифровать названия „канторов дисконтинуум“ и „канторово совершенное множество“. *Дисконтинуум* означает разрывное множество, т.е. в нашей терминологии — вполне несвязное множество.

Канторов дисконтинуум вполне несвязен, так как никакие две его различные точки не содержатся в связном множестве. В самом деле, если $x_0, x_1 \in C$ и $x_0 \neq x_1$ то $\rho(x_0, x_1) > \frac{1}{3^n}$ для некоторого n. Тогда между точками x_0 и x_1 лежит некоторый интервал $J_{i_1 \dots i_n}$ (см. 1.6). Значит, точки x_0 и x_1 лежат в разных компонентах связности множества C_n, тем более, они лежат в разных компонентах связности множества $C = \bigcap\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Канторово множество „совершенно“ означает, что оно не содержит изолированных точек. Это так, поскольку из построения (см. 1.6) вытекает, что во всякой окрестности точки $x \in C$ содержится окрестность вида $I_{i_1 \dots i_n} \cap C$, гомеоморфная C и, следовательно, имеющая мощность континуума.

Задачи.

11.1. Докажите, что объединение семейства попарно пересекающихся связных подмножеств связно.

11.2. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — связные множества. Верно ли, что A и B — связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

11.3. Пусть $A \cap B$ и $A \cup B$ — линейно связные множества. Верно ли, что A и B — линейно связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

11.4. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно?

11.5. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно.

11.6. Будет ли внутренность (линейно) связного множества (линейна) связна?

11.7. Будет ли замыкание линейно связного множества линейно связно?

11.8. Будет ли прообраз при непрерывном отображении связного множества связен, если прообраз любой точки связен?

11.9. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ монотонно, если все прообразы $f^{-1}(y)$ точек связны. Докажите, что при монотонном фактороотображении прообраз открытого связного множества связен.

11.10. Пусть I и O — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта $X =$ "$\sin 1/x$". Докажите, что если при непрерывном отображении $f : X \to X$ существует точка $x \in O$, для которой $f(x) \in I$, то и $f(X) \subset I$.

11.11. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства.

11.12. Доказать связность отрезка, пространств $\mathbb{R}^n$ и сфер S^n, $n \in \mathbb{N}$.

11.13. Доказать, что произведение (линейно) связных пространств (линейно) связно.

11.14. Доказать, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}^1$ имеет счетное число компонент связности.

11.15. Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, не гомеоморфны.

11.16. Докажите, что канторово множество и прямая Зоргенфрея вполне несвязны.

11.17. Докажите, что для подмножеств прямой связность и линейная связность эквивалентны.

11.18. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$;

(c) $\mathrm{Symm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?

Дополнительные задачи.

11.1x. Верно ли утверждение, что функция на отрезке непрерывна в том и только том случае, если образ любого отрезка отрезок?

11.2x. Постройте счетное хаусдорфово связное пространство.

11.3x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существует единственная прямая, параллельная фиксированной прямой l, которая делит A на два множества равной площади.

11.4x. Докажите, что если A и B — открытые связные ограниченные множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из множеств A и B на два множества равной площади.

11.5x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят A на четыре множества равной площади.

11.6x. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств комплексных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^T = E\}$;

(c) $\mathrm{Herm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A^T = \bar{A}\}$?

11.7x. Доказать, что связный компакт нельзя представить в виде объединение счётного числа непустых попарно непересекающихся связных замкнутых подмножеств. Можно ли отказаться от условия компактности?

11.8x. **Веер Кнастера-Куратовского** (см. [6, стр. 184-187]). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$. На отрезке $[0, 1]$ оси Ox рассмотрим стандартное канторово множество $\mathcal{C}$. Соединим прямолинейным отрезком каждую точку x множества $\mathcal{C}$ с точкой $a = (1/2, 1/2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ и обозначим этот отрезок через $[a, x]$. Если точка $x \in \mathcal{C}$ первого рода (т.е. она является концом смежного к $\mathcal{C}$ интервала), то на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата рациональна, в противном случае на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата иррациональна. Все выбранные точки и составляют веер Кнастера-Куратовского, который обозначим через $\mathcal{K}$. Доказать связность построенного пространства. Является ли подмножество $\mathcal{K} \setminus \{a\} \subset \mathcal{K}$ вполне несвязным? а индуктивно-нульмерным?

11.9x. Доказать, что множество точек гильбертова пространства ℓ_2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не индуктивно-нульмерно.

11.10x. Докажите, что любой индуктивно-нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

11.11x. Докажите, что любое счетное метризуемое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел.

11.12x. Точка x связного пространства X называется разбивающей, если $X \setminus \{x\}$ — несвязно. Докажите, что если сепарабельный связный метризуемый компакт имеет ровно две неразбивающие точки, то X гомеоморфно отрезку $[0, 1]$.

11.13x. Построить пространство, все точки которого разбивающие порядка n, $n \in \mathbb{N}$. Может ли пространство быть компактным? метризуемым?

11.14x. Докажите, что связный и локально связный метризуемый компакт линейно связен.

11.15x. Докажите, что любое непрерывное отображение компакта $X =$ "$\sin 1/x$" на себя имеет неподвижную точку.

11.16x. Приведите пример двух связных компактов, каждый из которых нельзя сюръективно и непрерывно отобразить на другой.

11.17x. Докажите, что любое открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, линейно связно. Можно ли отказаться от требования открытости?

11.18x. Существуют ли три связных открытых подмножества плоскости с общей границей?

11.19x. Докажите, что любое связное конечное пространство линейно связно.

Лекция 12

Пространства непрерывных отображений.

12.1. Топология на $C(X,Y)$. Множество $C(X,Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y наделяется компактно-открытой топологией. Предбазу открытых множеств этой топологии образуют множества вида

$$[K,U] = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\},$$

где K - компактное множество в X, а U — открытое множество в Y.

12.2. Примеры. 1. Если X — точка, то $C(X,Y) = Y$.

2. Если X состоит из n изолированных точек, то $C(X,Y) = Y^n$. Последнее равенство служит основанием для того, чтобы обозначать пространство $C(X,Y)$ через Y^X.

3. Если Y — точка, то $C(X,Y)$ — также точка.

4. Если Y состоит из двух изолированных точек ($Y = 2$), а X связно, то $C(X,Y) = 2$.

5. Чему равна мощность пространства $C(X,Y)$, если X — канторово множество, а $Y = 2$?

12.3. Предложение. *Если пространство Y хаусдорфово, то пространство $C(X,Y)$ также хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $f_i : X \to Y$ — различные отображения, $i = 1,2$. Существует точка $x \in X$, для которой $f_1(x) \neq f_2(x)$. Возьмём непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда множества $V_i = \big[\{x\}, U_i\big]$, $i = 1,2$, не пересекаются и $f_i \in V_i$. $\square$

12.4. Отображения $X \times Y \to Z$ и $X \to C(Y,Z)$. Пусть даны пространства X, Y, Z и непрерывное отображение $f : X \times Y \to Z$. Тогда определено отображение $\langle f \rangle : X \to C(Y, Z)$. Оно задаётся формулой

$$\big(\langle f \rangle (x)\big)(y) = f(x, y). \tag{12.1}$$

Теперь пусть дано непрерывное отображение $g : X \to C(Y, Z)$. Тогда определено отображение $)g(: X \times Y \to Z$, задаваемое формулой

$$)g((x, y) = \big(g(x)\big)(y). \tag{12.2}$$

12.5. Предложение. *Отображение* $\langle f \rangle$ *из* (12.1) *непрерывно.*

Доказательство. Согласно Предложению 4.3 достаточно для точки $x_0 \in X$ и предбазисной окрестности G функции $\langle f \rangle (x_0)$ найти такую окрестность Ox_0, что $\langle f \rangle (Ox_0) \subset G$. По определению компактно-открытой топологии (см. 12.1) в качестве множества G можно взять $[K, U]$ при условии

$$\big(\langle f \rangle (x_0)\big)(K) \subset U. \tag{12.3}$$

Для каждой точки $y \in K$ фиксируем такие окрестности V_y и W_y точек x_0 и y соответственно, что

$$f(V_y \times W_y) \subset U. \tag{12.4}$$

Это возможно, в силу (12.1) и (12.3). Из семейства $\{W_y : y \in K\}$ выделим конечное покрытие $W_{y_1}, \ldots, W_{y_k}$ множества K. Тогда $V = \bigcap\big\{V_{y_i} : i = 1, \ldots, k\big\}$ является окрестностью точки x_0 и

$$f(V \times K) \subset \bigcup\Big\{f\big(V_{y_i} \times W_{y_i}\big) : i = 1, \ldots, k\Big\} \subset (12.4) \subset U. \tag{12.5}$$

Из (12.5) вытекает, что $\langle f \rangle (V) \subset [K, U] = G$. Итак, мы нашли такую окрестность $V = Ox_0$, что $\langle f \rangle (Ox_0) \subset G$. $\square$

Ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение

12.6. Предложение. *Пусть Ox — окрестность точки x локально компактного хаусдорфова пространства X. Тогда x обладает окрестностью, замыкание которой компактно и содержится в Ox.*

Доказательство. Пространство Ox локально компактно как открытое подмножество локально компактного пространства. Поэтому x обладает в нём окрестностью U с компактным замыканием. Поскольку Ox открыто, множество U открыто в X. Компактное множество $\mathrm{Cl}_{Ox}(U)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве X по Предложению 8.15. Следовательно, $\mathrm{Cl}_{Ox}(U) = \mathrm{Cl}(U)$. Значит, U — искомая окрестность. $\square$

12.7. Предложение. *Если пространство Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение $)g($ из (12.2) непрерывно.*

Доказательство. Для точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$ и окрестности W точки $)g((x_0, y_0)$ найдём окрестность V точки y_0 с компактным замыканием $\mathrm{Cl}(V)$, содержащимся в $\big(g(x_0)\big)^{-1}(W)$ (см. Предложение 12.6). В силу непрерывности отображения g, существует такая окрестность U точки x_0, что $g(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(U), W\big]$. Тогда $U \times W$ — окрестность точки (x_0, y_0), обладающая свойством $)g((U \times V) \subset W$ согласно определению (12.2) и свойству $g(U) \subset \big[\mathrm{Cl}(V), W\big]$. $\square$

12.8. Теорема. *Отображение*

$F : C(X \times Y, Z) \to C\big(X, C(Y, Z)\big)$,

определяемое условием $F(f) = \langle f \rangle$, непрерывно для любых X, Y, Z. Если же Y хаусдорфово и локально компактно, то это отображение является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть A и B — компактные подмножества X и Y соответственно, а U открыто в Z. Тогда непрерывность отображения F вытекает из легко проверяемого равенства

$$F^{-1}\big([A, [B, U]]\big) = [A \times B, U]. \tag{12.6}$$

Пусть теперь Y хаусдорфово и локально компактно. Тогда из Предложения 12.7 вытекает, что соответствие $g \to)g($ определяет отображение

$G : C\big(X, C(Y, Z)\big) \to C(X \times Y, Z)$.

Это отображение непрерывно. Для этого покажем сначала, что

$$G \circ F = \mathrm{id}_{C(X\times Y,Z)}. \tag{12.7}$$

Пусть $f \in C(X \times Y, Z)$. Тогда

$(G \circ F)(f) = \rangle \langle f \rangle \langle = f$.

В самом деле, $\rangle \langle f \rangle \langle (x, y) =$ (12.2) $= \langle f(x) \rangle (y) =$ (12.1) $= f(x, y)$. Итак, (12.7) проверено.

Далее,

$$F \circ G = \mathrm{id}_{C\big(X,C(Y,Z)\big)}. \tag{12.9}$$

В самом деле, пусть $g \in C\big(X, C(Y, Z)\big)$. Тогда $(F \circ G)(g) = \langle \rangle g \langle \rangle$. Чтобы установить (12.9), надо показать, что

$$\langle \rangle g \langle \rangle = g. \tag{12.10}$$

Имеем $\big(\langle \rangle g \langle \rangle\, (x)\big)(y) =$ (12.1) $= \rangle g \langle (x, y) = \big(g(x)\big)(y)$, откуда (12.10) и вытекает.

Итак, равенства (12.7) и (12.9) показывают, что отображения F и G взаимно обратны. В частности, $G^{-1} = F$. Возьмём предбазисное открытое множество $[A \times B, U] \subset C(X \times Y, Z)$. Тогда $G^{-1}\big([A \times B, U]\big) = F\big([A \times B, U]\big) =$ (12.6) $= \big[A, [B, U]\big]$.

Тем самым, непрерывность отображения G доказана. Таким образом, мы показали, что F и G являются взаимно обратными непрерывными отображениями. Значит, каждое из них является гомеоморфизмом. □

Задачи.

12.1. $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из пространства X в пространство Y. Когда мощность множества $C(X, Y)$ совпадает с мощностью пространства Y?

12.2. Можно ли в определении компактно-открытой топологии на множестве отображений заменить компактные подмножества на конечные подмножества?

12.3. Пусть X — метризуемое пространство. Доказать, что множество путей (петель) в компактно-открытой топологии метризуемо.

12.4. Доказать, что пространство гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ имеет две компоненты связности.

Дополнительные задачи.

12.1х. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, Y — метрическое пространство. Доказать, что компактно-открытая топология на множестве $C(X, Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости.

12.2х. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а Y — полное метрическое пространство. Тогда множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии является полным метрическим пространством.

12.3х. Пусть X — метризуемое компактное пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство. Доказать, что множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии сепарабельно.

12.4х. Семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется равностепенно непрерывным в точке x, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ для любых $f \in \mathcal{F}$, $t \in X$, $\rho(x, t) < \delta$.

(Теорема Арцела–Асколи.) Докажите, что замкнутое подмножество $\mathcal{F} \subset C(K)$, где K — метризуемый компакт, компактно в том и только том случае, когда оно равностепенно непрерывно в каждой точке K и ограничено.

Лекция 13

Гомотопия. Гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства.

13.1. Определение гомотопии. Непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *гомотопными*, ($f \sim_h g$) если существует такое непрерывное отображение $\Phi : X \times I \to Y$, что $\Phi(x, 0) = f(x),\ \Phi(x, 1) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Всякое такое отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей f с g. Оно называется также *гомотопией отображения* f.

Иногда отображение Φ заменяется семейством отображений

$$f_t : X \to Y,\ t \in I,\ f_t(x) = \Phi(x, t) \tag{13.1}$$

Семейство $\{f_t : X \to Y, t \in T\}$ можно рассматривать как отображение

$$F : I \to C(X, Y) \tag{13.2}$$

13.2. Предложение. *Если отображение $\Phi : X \times I \to Y$ непрерывно, то непрерывно и отображение $F : I \to C(X, Y)$.*

Доказательство. Из непрерывности Φ вытекает непрерывность отображения $\Phi' : I \times X \to Y$, задаваемого равенством

$$\Phi'(t, x) = \Phi(x, t) \tag{13.3}$$

По Предложению 12.5 непрерывно отображение $\langle\Phi'\rangle : I \to C(X, Y)$, определяемое равенством (12.1):

$$(\langle\Phi'\rangle(t))(x) = \Phi'(t, x).$$

Но $\langle\Phi'\rangle = F$, так как

$((\langle\Phi'\rangle(t))(x) = \Phi'(t,x) = (13.3) = \Phi(x,t) = (13.1) = f_t(x) = (F(t))(x).$

Таким образом, отображение F непрерывно. $\square$

13.3. Предложенние. *Если отображение $F : I \to C(X,Y)$ непрерывно и пространство X хаусдорфово и локально компактно, то непрерывно отображение*

$$\Phi : X \times I \to Y, \quad \Phi(x,t) = f_t(x).$$

Доказательство. Согласно Предложению 12.7 непрерывно отображение $)F(: I \times X \to Y$, определяемое равенством (12.2), т.е.

$()F()(t,x) = (F(t))(x) = f_t(x) = (13.1) = \Phi(x,t).$ $\square$

13.4. Теорема. *Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X,Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y.*

Доказательство. Рефлексивность. Надо доказать, что всякое отображение $f : X \to Y$ гомотопно самому себе. Рассмотрим *постоянную гомотопию* отображения f, т.е. такое отображение $\Phi_f : X \times I \to Y$, что $\Phi_f(x,t) = f(x)$ для любых $x \in X,\ t \in I$. Покажем, что отображение Φ_f непрерывно. Пусть $a = (x_0, t_0) \in X \times I$ и $b = \Phi_f(a)$. Тогда по определению $b = f(x_0)$. Возьмём произвольную окрестность Ob. Поскольку отображение f непрерывно, существует такая окрестность $Ox_0 \subset X$, что $f(Ox_0) \subset Ob$. Мы утверждает, что $\Phi_f(Ox_0 \times I) \subset Ob$. В самом деле, пусть $(x,t) \in Ox_0 \times I$. Тогда $\Phi_f(x,t) = f(x) \in f(Ox_0) \subset Ob$ по определению окрестности Ox_0. Итак, непрерывность отображения Φ_f доказана и, следовательно, отношение $\sim_h$ рефлексивно.

Симметричность. Пусть отображение $\Phi : X \times I \to Y$ — гомотопия, связывающая отображения f и g. Рассмотрим отображение $\Gamma : X \times I \to Y$, определяемое формулой $\Gamma(x,t) = \Phi(x, 1-t)$. Это отображение, очевидно, непрерывно и является гомотопией, связывающей отображение g и f. Следовательно, отношение $\sim_h$ симметрично.

Транзитивность. Пусть даны отображения $f_i : X \to Y,\ i = 1, 2, 3$. При этом, f_1 гомотопно f_2, а f_2 гомотопно f_3. Надо показать, что f_1 гомотопно f_3. Пусть гомотопия Φ_1 связывает f_1 с f_2, а гомотопия Φ_2 связывает f_2 с f_3. Определим гомотопию $\Phi : X \times I \to Y$ следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi(x,t) = F_1(x,2t) & \text{при}\ \ t \le \frac{1}{2}; \\ \Phi(x,t) = F_2(x,2t-1) & \text{при}\ \ t \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем $\Phi\big(x, \frac{1}{2}\big) = F_1(x,1) = f_2(x)$. С другой стороны $\Phi\big(x, \frac{1}{2}\big) = F_2(x,0) = f_2(x)$. Значит, отображение Φ определено корректно. Оно непрерывно, будучи непрерывным на замкнутых слагаемых $X \times \big[0, \frac{1}{2}\big]$ и $X \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]$. Наконец, $\Phi(x,0) = F_1(x,0) = f_1(x,0)$, $\Phi(x,1) = F_2(x,1) = f_3(x)$. Таким образом, гомотопия Φ связывает f_1 с f_3. $\square$

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами.* В дальнейшем мы вместо $\sim_h$ будем писать $\sim$.

13.5. Пример. Все отображения $X \to I$ гомомотопны между собой. В самом деле, пусть $f_0, f_1 : X \to I$ — два непрерывных отображения. Рассмотрим гомотопию $\Phi : X \times I \to I$, определяемую следующим образом:

$$\Phi(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x). \tag{13.4}$$

Ясно, что отображение из (13.4) соединяет f_0 с f_1. Докажем, что отображение Φ непрерывно. Пусть $\Phi(x_0, t_0) = a \in I$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём такую окрестность $Ox_0 \subset X$ и такое $\delta > 0$, что

$$F\big(Ox_0 \times (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)\big) \subset (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon). \tag{13.5}$$

Предположим, что

$$f_i(x_0) = a_i,\ i = 0, 1. \tag{13.6}$$

Тогда из (13.4) получаем

$$a = \Phi(x_0, t_0) = (1 - t_0)a_0 + t_0 a_1. \tag{13.7}$$

Из непрерывности отображений f_0 и f_1 вытекает существование такой окрестности $Ox_0 \subset X$, что для $x \in Ox_0$ имеем

$$f_i(x) \subset \Big(-\frac{\varepsilon}{2} + a_i,\ \frac{\varepsilon}{2} + a_i\Big),\ i = 1, 2, \tag{13.8}$$

Тогда $|F(x,t) - a| = (13.4) = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - a| = (13.7) = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - (1-t_0)a_0 - t_0a_1| = |(1-t)f_0(x) + tf_1(x) - (1-t)a_0 - ta_1 + (t-t_0)a_0 + (t-t_0)a_1| \leq (1-t)|f_0(x) - a_0| + t|f_1(x) - a_1| + |t-t_0|(a_0 + a_1) \leq (13.8) \leq (1-t)\frac{\varepsilon}{2} + t\frac{\varepsilon}{2} + |t-t_0|2 = \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta$. Поэтому при $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ получаем

$F(Ox_0 \times (t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)) \subset (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Непрерывность отображения (13.4) доказана. $\square$

13.5'. Замечание. Непрерывность отображения $\Phi(x,t) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ можно доказать, установив непрерывность отображений $(1-t)f_0(x) : X \times I \to I$ и $tf_1(x) : X \times I \to I$ (как сумм непрерывных отображений). Остается отметить, что $(1-t)f_0(x) = ((1 - \mathrm{id}) \circ pr_I)(x,t) \cdot (f_0 \circ pr_X)(x,t)$ и $tf_1(x) = (\mathrm{id} \circ pr_I)(x,t) \cdot (f_1 \circ pr_X)(x,t)$.

13.6. Определение. Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами.* Множество гомотопических классов отображений $X \to Y$ обозначается через $\pi(X,Y)$. Гомотопический класс отображения $f : X \to Y$ будем обозначать через $[f]$. А вообще, элементы множества $\pi(X,Y)$ будут обозначаться греческими буквами α, β и т.д. Отображение f, для которого $\alpha = [f]$ или $f \in \alpha$, называется *представителем* класса α в $C(X,Y)$. Как правило представитель определён неоднозначно.

13.7. Примеры. 1. $\pi(X,I)$ состоит из одной точки.

2. Рассуждения из Примера 13.5 показывают, что $\pi(X,V)$ состоит из одной точки для любого выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$, в частности, где $*$ — множество, состоящее из одной точки.

3. Множество $\pi(*,Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства Y.

13.8. Определение. Пусть X, Y_1, Y_2 — пространства и $h : Y_1 \to Y_2$ —

непрерывное отображение. Классу $\alpha \in \pi(X, Y_1)$ поставим в соответствие класс $h_*(\alpha) = [h \circ f] \in \pi(X, Y_2)$, где f — какой-нибудь представитель класса α, т.е. $[f] = \alpha$. Тем самым определено отображение $h_* : \pi(X, Y_1) \to \pi(X, Y_2)$.

13.9. Лемма. *Отображение h_* определено корректно, т.е. класс $h_*(\alpha) = [h \circ f]$ не зависит от выбора представителя $f \in \alpha$.*

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 \in \alpha$. Существует гомотопия $\Phi : X \times I \to Y_1$, соединяющая f_0 с f_1. Рассмотрим композицию $G = h \circ \Phi : X \times I \to Y_2$. Отображение G непрерывно и $G(x, 0) = h\big(\Phi(x, 0)\big) = h(f_0(x))$, а $G(x, 1) = h(\Phi(x, 1)) = h(f_1(x))$. Следовательно, G является гомотопией, соединяющей $h \circ f_0$ и $h \circ f_1$. Таким образом $[h \circ f_0] = [h \circ f_1]$. $\square$

13.10. Теорема. *Пусть даны пространства X, Y_1, Y_2, Y_3 и непрерывные отображения $g : Y_1 \to Y_2,\ \ h : Y_2 \to Y_3$. Тогда следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, Y_1) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, "(h\circ g)_*"'] & \pi(X, Y_2) \arrow[d, "h_*"] \\
& \pi(X, Y_3).
\end{tikzcd} \tag{13.9}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $\alpha = [f] \in \pi(X, Y_1)$. Тогда согласно Определению 13.8 имеем

$(h \circ g)_*(\alpha) = \big[(h \circ g) \circ f\big]$,

$g_*(\alpha) = [g \circ f], \quad h_*\big(g_*(\alpha)\big) = \big[h \circ (g \circ f)\big]$.

Равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ завершает доказательство. $\square$

Из теоремы 13.10 вытекает, что

$$\big(h_k \circ \ldots \circ h_1\big)_* = (h_k)_* \circ \ldots \circ (h_1)_* \tag{13.9}$$

для любых отображений $h_i : Y_i \to Y_{i+1}$.

13.11. Определение. Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* ($X_1 \sim X_2$), если существуют такие непрерывные отображения $f : X_1 \to X_2,\ \ g : X_2 \to X_1$, что композиции $g \circ f : X_1 \to X_1,\ \ f \circ g : X_2 \to X_2$ гомотопны тождественным отображениям $X_1 \to X_1,\ \ X_2 \to X_2$.

Отображения f и g называются *гомотопически взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями.*

13.12. Замечание. Если отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ не просто гомотопны тождественным отображениям, но и являются таковыми, то f и g — взаимно обратные гомеоморфизмы. Таким образом, отношение гомотопической эквивалентности является обобщением отношения гомеоморфности.

13.13. Теорема. *Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе Top всех топологических пространств.*

Доказательство. Фактически в проверке нуждается только транзитивность. Пусть $X_1 \sim X_2$ и $X_2 \sim X_3$. Существуют такие отображения $f_1 : X_1 \to X_2$, $g_1 : X_2 \to X_1$, $f_2 : X_2 \to X_3$, $g_2 : X_3 \to X_2$, что

$$g_1 \circ f_1 \sim \mathrm{id}_{X_1}, \quad f_1 \circ g_1 \sim \mathrm{id}_{X_2}; \tag{13.10}$$

$$g_2 \circ f_2 \sim \mathrm{id}_{X_2}, \quad f_2 \circ g_2 \sim \mathrm{id}_{X_3}. \tag{13.11}$$

Положим

$f = f_2 \circ f_1, \quad g = g_1 \circ g_2.$

Тогда $g \circ f = g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \sim \big((13.9)$ и $(13.11)\big) \sim g_1 \circ \mathrm{id}_{X_2} \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \sim (13.10) \sim \mathrm{id}_{X_1}$. Таким же образом показываем, что $f \circ g \sim \mathrm{id}_{X_3}$. Значит, отображения f и g гомотопически взаимно обратны и $X_1 \sim X_3$. $\square$

13.14. Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом.*

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ гомотопно постоянному отображению $\mathrm{const}_{x_0} : X \to X$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$.

13.15. Упражнения. 1. Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.

2. Конус над любым пространством стягиваем.

3. Цилиндр отображения $X \to Y$ гомотопически эквивалентен пространству Y.

13.16. Замечание. Гомотопически эквивалентные пространства не обязаны быть гомеоморфными.

Примеры. 1. Шары B^n имеют гомотопический тип точки, но B^{n_1} не гомеоморфно B^{n_2} при $n_1 \neq n_2$. Например, $n_1 = 0, n_2 > 0$.

2. Доказать, что отрезок I не гомеоморфен кругу B^2.

3. Диск D^n, $n > 0$, имеет гомотопический тип точки, но D^n не гомеоморфно B^n, поскольку шар B^n компактен, а диск D^n — нет.

4. Докажите, что окружность S^1 и кольцо K имеют одинаковый гомотопический тип, но не гомеоморфны (см. Рис. 13.1).

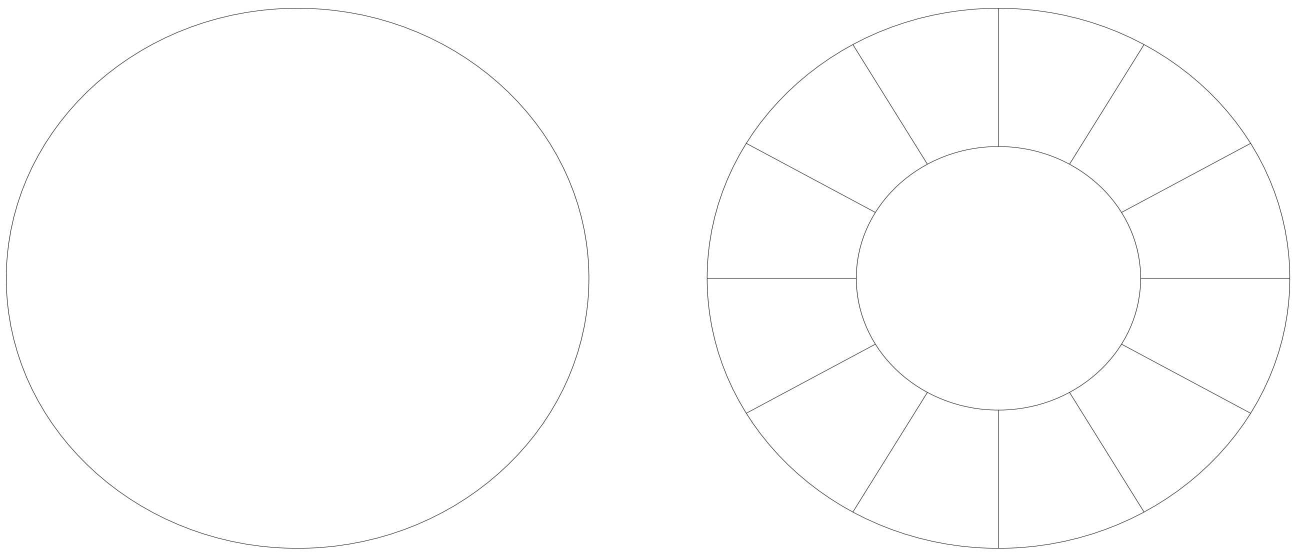

Рис. 13.1:

Задачи.

13.1. Докажите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

13.2. Будут ли гомотопны любые два непрерывных отображения в линейно связное пространство?

13.3. Когда гомотопны два постоянных отображения?

13.4. Если $h : A \to X, f, f' : X \to Y, g : Y \to B$ — непрерывные отображения, и $F : X \times I \to Y$ — гомотопия между f и f', то $g \circ F \circ (h \times id)$ — гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h : A \to B$, где id — тождественное отображение отрезка I.

13.5. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $pr_Y \circ f$, $pr_Y \circ g$ и $pr_Z \circ f$, $pr_Z \circ g$, где pr_Y и pr_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

13.6. Докажите, что все отображения отрезка в сферу S^2 гомотопны.

13.7. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

13.8. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

13.9. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(2) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

13.10. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

13.11. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

13.12. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

13.13. Доказать, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X,Y)$ тривиально для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y,X)$ тривиально для любого пространства Y.

13.14. Сколько гомотопических классов отображений стягиваемого пространства в произвольное пространство?

13.15. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножетелей?

13.16. Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.

13.17. Докажите, что ректракт стягиваемого пространства стягиваем.

13.18. Доказать, что $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

Дополнительные задачи.

13.1x. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(2) пространства невырожденных матриц $GL(n,\mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

13.2x. Докажите, что бесконечномерная сфера S^∞ (сфера в гильбертовом пространстве) стягиваема.

13.3x. Доказать, что любая связная конечномерная группа Ли (множество, на котором заданы согласованные структуры группы и гладкого многообразия) гомотопически эквивалентна компактной группе Ли.

Лекция 14

Фундаментальная группа.

14.1. Пространства с отмеченной точкой. В топологии часто приходится рассматривать пространства с *отмеченной точкой*, т.е. считать, что во всех пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. Одинаковые пространства с разными отмеченными точками считаются разными пространствами. Класс топологических пространств с отмеченными точками и их непрерывных отображений будет обозначаться через Top_b (b — это „base-point“ — отмеченная точка).

14.2.Операции над пространствами с отмеченной точкой. Переход к пространствам с отмеченной точкой в той или иной степени сказывается на рассмотренных выше топологических операциях. Для некоторых из них изменение сводится к тому, что пространство — результат операции — наделяется отмеченной точкой. Например, в произведении $X \times Y$ отмечается точка (x_0, y_0), где x_0, y_0 — отмеченные точки сомножителей.

Некоторые операции модифицируются более серьёзным образом. Так, в конусе $\mathrm{Con}(X)$ отождествляются между собой точки образующей, соответствующей отмеченной точке. При этом, иногда обычный конус $\mathrm{Con}(X)$ не гомеоморфен конусу $\mathrm{Con}_b(X)$ с отмеченной точкой. Например, если X состоит из трёх точек ($X = 3$), то $\mathrm{Con}(X)$ — это триод, а $\mathrm{Con}_b(X)$ гомеоморфно отрезку. Но оба эти пространства имеют один гомотопический тип — тип точки.

14.3. Букет пространств X и Y с отмеченными точками x_0 и y_0, получается из суммы этих пространств посредством отождествления их отмеченных точек. Эта операция есть частный случай склеивания пространств (см. § 7).

Букет пространств X и Y обозначается через $X \vee Y$. Например, букет двух окружностей — „восьмёрка“ (см. Рис. 14.1).

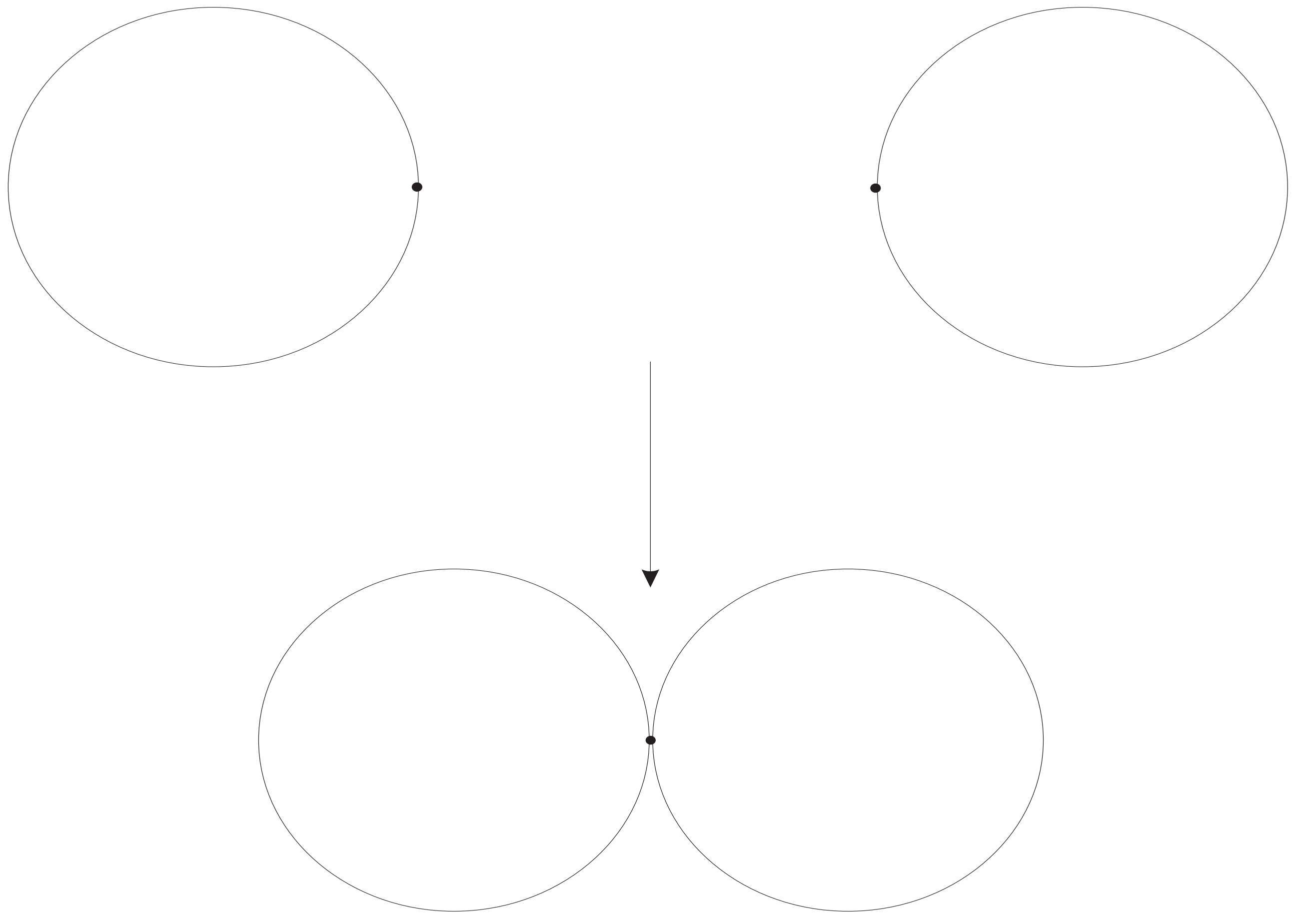

Рис. 14.1:

14.4. Упражнение. Приведите пример, когда топологический тип букета $X \vee Y$ зависит от выбора отмеченных точек.

14.5. Связанные гомотопии. Пусть A — подмножество пространства X. Гомотопия $F : X \times I \to Y$ называется *связанной на A*, или *A-гомотопией*, если $F(x,t) = F(x,0)$ при $x \in A$, $t \in I$. Два отображения, которые можно соединить A-гомотопией называются *A-гомотопными.*

Как и обычная гомотопность, A-гомотопность является эквивалентностью. Как правило, мы будем иметь дело лишь с одноточечными и двухточечными A. Множество гомотопических классов отображений пространств

X с отмеченной точкой в пространство Y с отмеченной точкой будет обозначаться как через $\pi(X, Y)$, так и через $\pi_b(X, Y)$.

14.6. Определение множества $\pi_1(X, x_0)$. Рассматриваются петли пространства X, т.е. такие отображения $\varphi : I \to X$, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, где x_0 — отмеченная точка. Петли φ_0 и φ_1 называются *гомотопными*, если существует гомотопия $F : I \times I \to X$, связанная на $A = \{0, 1\} \subset I$, такая, что $F(x, 0) = \varphi_0(x),\ F(x, 1) = \varphi_1(x)$.

Множество гомотопических классов петель $\varphi : I \to (X, x_0)$ обозначается через $\pi_1(X, x_0)$.

Петля, рассматриваемая как отображение $\varphi : I \to X$ с условием $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, равносильна отображению $\widehat{\varphi} : S_1 \to X$, переводящему точку $0 = \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ в отмеченную точку $x_0 \in X$. При этом, мы отождествляем точку $\varphi(t)$ с точкой $\widehat{\varphi}(2\pi t)$. Поэтому множество $\pi_1(X, x_0)$ можно рассматривать как множество гомотопических классов $\pi_b(S^1, X, x_0)$ с фиксированной отмеченной точкой $0 \in S^1$.

14.7. Умножение в $\pi_1(X, x_0)$. Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ — это петля χ, определяемая следующим образом:

$$\chi(s) = \begin{cases} \varphi(2s) & \text{при} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2}; \\ \psi(2s - 1) & \text{при} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases} \tag{14.1}$$

Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно.

Это умножение порождает умножение и в множестве $\pi_1(X, x_0)$:

$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi\psi]. \tag{14.2}$$

Надо проверить только, что равенство (14.2) не зависит от выбора представителей в гомотопических классах $[\varphi]$ и $[\psi]$.

14.8. Лемма. *Если $\varphi_0 \sim \varphi_1$ и $\psi_0 \sim \psi_1$, то $\varphi_0\psi_0 \sim \varphi_1\psi_1$.*

Доказательство. Пусть $F : I \times I \to X$ — связанная гомотопия, соединяющая φ_0 и φ_1, а $G : I \times I \to X$ — связанная гомотопия, соединяющая ψ_0

и ψ_1. Определим гомотопию $\Phi : I \times I \to X$ следующим образом:

$$\Phi(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & : \ 0 \le s \le \frac{1}{2}; \\ G(2s-1,t) & : \ \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Ясно, что эта гомотопия соединяет $\psi_0\varphi_0$ с $\psi_1\varphi_1$. Для любого $t \in I$ имеем $\Phi(0,t) = F(0,t) = x_0$, $\Phi(1,t) = G(1,t) = x_0$. Тем самым она связна.

Сужение отображения Φ на $[0, \frac{1}{2}] \times I$ и $[\frac{1}{2}, 1] \times I$ совпадает с композициями произведений подобий отрезка на тождественное отображение и отображений F и G соответственно. Тем самым они непрерывны. Так как для любого $t \in I$ $\Phi(\{\frac{1}{2}\} \times I) = F(1,t) = G(0,t) = x_0$, то непрерывность Φ вытекает из Теоремы 4.10. $\square$

Итак, формула (14.1) вместе с Леммой 14.8 определяет умножение в множестве $\pi_1(X, x_0)$, удовлетворяющее равенству (14.2).

14.9. Группа $\pi_1(X, x_0)$. 1. Для отображения const $: I \to \{x_0\} \in X$ имеют место

$$\mathrm{const}\ \varphi \sim \varphi, \quad \varphi\ \mathrm{const} \sim \varphi$$

для любой петли $\varphi : I \to (X, x_0)$. Приведем гомотопию, доказывающую первую эквивалентность

$$F(s,t) = \begin{cases} \varphi(\frac{2s+t-1}{1+t}), & t \ge 1-2s; \\ x_0, & t \le 1-2s. \end{cases}$$

Поэтому гомотопический класс [const] является левой и правой *единицей* в множестве $\pi_1(X, x_0)$.

2. *Обратным* к элементу $[\varphi]$ является элемент $[\varphi^{-1}]$, где петля φ^{-1} определяется следующим образом:

$\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t)$.

Покажем лишь, что $\varphi\varphi^{-1} \sim$ const. Действительно, переводя точку $(s,t) \in$

$I \times I$ в точку

$$\begin{cases} \varphi(2s), & \text{если} \quad 0 \le s \le \frac{1-t}{2}, \\ \varphi(1-t), & \text{если} \quad \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2}, \\ \varphi(2-2s), & \text{если} \quad \frac{1+t}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

получаем гомотопию, связывающую петлю $\varphi\varphi^{-1}$ с постоянной петлёй const.

3. Наконец, умножение в $\pi_1(X, x_0)$ *ассоциативно.* В самом деле, пусть $\varphi, \psi, \chi \in \pi_1(X, x_0)$. Тогда, переводя точку $(s, t) \in I \times I$ в точку

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{4s}{t+1}\right), & \text{если} \quad 0 \le s \le \frac{t+1}{4}, \\ \psi(4s-t-1), & \text{если} \quad \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4}, \\ \chi\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), & \text{если} \quad \frac{t+2}{4} \le s \le 1, \end{cases}$$

получаем гомотопию, соединяющую петлю $(\varphi\psi)\chi$ с петлёй $\varphi(\psi\chi)$.

Зависимость от отмеченной точки.

14.10. Теорема. *Если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ изоморфны для любых точек $x_0, x_1 \in X$.*

Доказательство. Можно перемножать не только петли, но и пути, лишь бы только второй путь начинался там где кончается первый. Кроме того, имеется постоянный путь, обратный путь и верен закон ассоциативности для перемножения путей.

Поскольку X линейно связно, существует путь $\alpha : I \to X$, для которого $\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1$. Путь α определяет отображение $\alpha' : \Omega_{x_0}(X) \to \Omega_{x_1}(X)$, где $\Omega_x(X)$ — множество всех петель, начинающихся и заканчивающихся в точке x, по следующему правилу $\alpha'(\varphi) = \alpha^{-1}\varphi\alpha$. Петля $\alpha'(\varphi)$ начинается и заканчивается в точке x_1.

Положим

$$\alpha_\#([\varphi]) = \left[\alpha^{-1}\varphi\alpha\right]. \tag{14.3}$$

Так же, как Лемма 14.8, доказывается, что отображение не зависит от выбора представителя в гомотопическом классе $[\varphi]$. Поэтому оно определяет отображение

$\alpha_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Равенство

$$\alpha_\#^{-1}([\psi]) = [\alpha\psi\alpha^{-1}] \tag{14.4}$$

определяет отображение

$\alpha_\#^{-1} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$,

являющееся обратным к отображению $\alpha_\#$. В самом деле,

$\alpha_\#^{-1}\big(\alpha_\#([\varphi])\big) = \alpha_\#^{-1}(\big[\alpha^{-1}\varphi\alpha\big]) = \big[\alpha\alpha^{-1}\varphi\alpha\alpha^{-1}\big] = [\varphi]$,

поскольку путь $\alpha\alpha^{-1}$ гомотопен постоянному пути. Аналогичным образом доказывается, что композиция $\alpha_\#\alpha_\#^{-1}$ является тождественным отображением группы $\pi_1(X, x_1)$.

Покажем, что $\alpha_\#$ — гомоморфизм. Возьмём элементы $[\varphi_1], [\varphi_2] \in \pi_1(X, x_0)$. Тогда

$\alpha_\#\big([\varphi_1] \cdot [\varphi_2]\big) = (14.2) = \alpha_\#([\varphi_1\varphi_2] = [\alpha^{-1}\varphi_1\varphi_2\alpha]) = [\alpha^{-1}\varphi_1\alpha\alpha^{-1}\varphi_2\alpha] = (14.2) = [\alpha^{-1}\varphi_1\alpha] \cdot [\alpha^{-1}\varphi_2\alpha] = \alpha_\#([\varphi_1]) \cdot \alpha_\#([\varphi_2])$.

Итак, $\alpha_\#$ — гомоморфизм, для которого имеется обратное отображение. Следовательно, $\alpha_\#$ — изоморфизм. $\square$

14.11. Замечание. Из Теоремы 14.10 следует, что для линейно связного пространства X группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in X$ изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна группа $\pi_1(X)$, которая называется *фундаментальной группой* линейно связного пространства X.

14.12. Определение. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если любые два такие пути $\alpha_1 : I \to X$ и $\alpha_2 : I \to X$, что $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x_0$, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу путей с закреплёнными концами.

14.13. Теорема. *Линейно связное пространство X односвязно тогда и только тогда, когда $\pi_1(X) = 0$.*

Доказательство. Пусть X односвязно. Возьмём произвольный класс $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ и единичный класс $e = [\varphi_0]$, где φ_0 — постоянная петля в точке x_0. Рассмотрим два пути $\alpha_1 = \varphi : I \to (X, x_0)$, $\alpha_2 = \varphi_0 : I \to (X, x_0)$. Эти пути имеют совпадающие начало и конец: $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = x_0$. Следовательно, петля φ гомотопна петле φ_0; откуда следует, что $[\varphi] = e$. Ввиду произвольности $[\varphi]$ получаем, что $\pi_1(X, x_0) = 0$ и, следовательно, $\pi_1(X) = 0$.

Пусть теперь $\pi_1(X, x) = 0$ в точке $x \in X$, которую можно считать произвольной в силу Теоремы 14.10. Рассмотрим два пути α_1 и α_2 в X с общими началом x_0 и концом x_1.

Так как $\alpha_1\alpha_1^{-1}$ и $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ — петли, и $\pi_1(X) = 0$, то они они гомотопным постоянным петлям const_{x_0} и const_{x_1} соответственно. Поэтому

$$\alpha_1 \sim \alpha_1\mathrm{const}_{x_1} \sim \alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_2 \sim \mathrm{const}_{x_0}\alpha_2 \sim \alpha_2$$

при гомотопиях с закрепленными концами. В силу транзитивности гомотопической эквивалентности существует связная гомотопия путей α_1 и α_2. □

Задачи.

14.1. Вычислить фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(3) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

(4) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

14.2. Докажите, что если пространство X односвязно, то любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : D^2 \to X$.

14.3. Доказать, что для любого непрерывного отображения f пространств с отмеченными точками отображение f_* (Определение 13.8) является гомоморфизмом их фундаментальных групп.

Доказать, что для любых гомотопных непрерывных отображений f и g пространств с отмеченными точками $f_* = g_*$.
Доказать, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

14.4. Докажите гомотопическую эквивалентность тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$.

Дополнительные задачи.

14.1х. Пусть множества U и V открыты в X. Докажите, что если множества $U \cap V$ и $U \cup V$ односвязны, то и множества U и V односвязны.

14.2х. Привести пример линейно связного пространства, фундаментальная группа которого не абелева.

14.3х. Докажите формулу:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

14.4х. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

14.5х. Привести пример односвязного линейно связного пространства, которое не стягиваемо.

14.6х. Верно ли, что пространство стягиваемо, если все его гомотопические группы (классы гомотопических эквивалентностей отображений сфер S^n в пространство) тривиальны?

14.7х. Докажите гомотопическую эквивалентность сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$.

14.8х. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

14.9х. Привести пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, которые гомотопны, но не A-гомотопны.

Лекция 15

Вычисление фундаментальных групп.

15.1. Теорема. *Группа* $\pi_1(S^1)$ *изоморфна группе* $\mathbb{Z}$ *целых чисел.*

Доказательство. Каждой точке окружности $S^1 = \{(\cos x, \sin x) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ мы обычным образом (по отображению $q : \mathbb{R} \to S^1$, где $q(x) = (\cos x, \sin x)$ при $x \in [0, 2\pi)$ и $q(x) = q(x - 2\pi n)$ при $x \in [2\pi n, 2\pi(n+1))$) сопоставим вещественные числа, определённые с точностью до слагаемого $2\pi k$. Отмеченной точкой в S^1 считаем $0 = (1, 0)$. Петля $f : I \to S^1$ превращается в многозначную функцию на отрезке I, значение которой в каждой точке определено с точностью до слагаемого $2\pi k$ и $f(0) = f(1) = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Отметим, что отображение q обладает тем свойством, что любой интервал длины меньше π изометрично отображается на дугу окружности, концами которой являются концы интервала.

У этой многозначной функции имеется непрерывная однозначная ветвь — непрерывная функция на отрезке I, значение которой в каждой точке принадлежит множеству значений в этой точке функции f. Такая однозначная функция $f^{\#}$ будет определена однозначно, если наложить на неё дополнительное условие $f^{\#}(0) = 0$. Приведём детали построения функции $f^{\#}$. Разобьём отрезок I на n отрезков $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad k = 0, \dots, n-1$. Выберем n так, чтобы любое множество $f(I_k)$ содержалось в дуге окружности S^1 длины π. Для этого достаточно, чтобы $n > \frac{1}{\epsilon}$, где ϵ — число Лебега покрытия $f^{-1}(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$, $f^{-1}(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$, $f^{-1}(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ (см. Задачу 8.9). Как было отмечено выше, мы полагаем $f^{\#}(0) = 0$. При $x \in I_0$ мы берём в качестве $f^{\#}(x)$ то из значений функции f в точке x, которое отличается от 0 меньше, чем на π. Такой выбор однозначен. Далее, при $x \in I_1$ берём в качестве $f^{\#}(x)$

то из значений функции f, которое меньше, чем на π, отличается от $f^{\#}(1/n)$. И т.д. (см. Рис. 15.1). Непрерывность $f^{\#}$ следует из свойства отображения q.

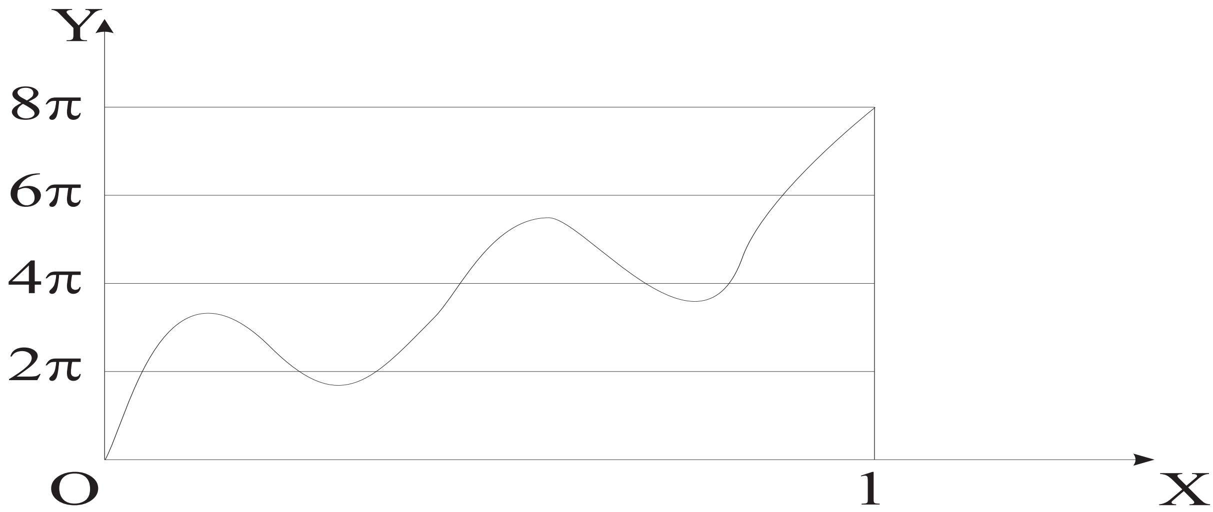

Рис. 15.1:

Выделим два важных свойства функции $f^{\#}$: её значение в точке 1 кратно 2π и она непрерывно зависит от f в том смысле, что если $\{f_t\}$ — гомотопия, то $\{f_t^{\#}\}$ — также гомотопия. По определению гомотопии и Предложению 13.3 достаточно показать, что отображение $F^{\#} : I \to C(I, \mathbb{R})$, определенное семейством отображений $f_t^{\#} : I \to \mathbb{R}$, $t \in I$, непрерывно. Для проверки непрерывности отображения $F^{\#}$ в точке $t_0 \in I$ согласно Задачи 12.1x достаточно для любого $\epsilon > 0$ найти $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что если $|t - t_0| < \delta(\epsilon)$, то $|f_t^{\#}(x) - f_{t_0}^{\#}(x)| < \epsilon$ для любого $x \in I$.

Пусть $I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, — такое разбиение отрезка I, что $f_{t_0}(I_k)$ принадлежит дуге l_k длины π при $k = 0, \ldots, n-1$; a_k — длина дуги $f_{t_0}(I_k)$, $k = 0, \ldots, n-1$; $a = \min\{a - \delta_k : k = 0, \ldots, n-1\}$.

Так как отображение $F : I \to C(I, S^1)$, определенное семейством отображений $f_t : I \to S^1$, $t \in I$, непрерывно по Предложению 13.2, то по Задаче 12.1x существует $\delta > 0$ такое, что если $|t - t_0| < \delta$, то $|f_t(x) - f_{t_0}(x)| < \min\{a, \epsilon\}$ для любого $x \in I$. Тогда, если $|t - t_0| < \delta$, то $f_t(I_k)$ и $f_{t_0}(I_k)$ принадлежат дуге l_k, $k = 0, \ldots, n-1$. Поэтому $|f_t^{\#}(x) - f_{t_0}^{\#}(x)| = |f_t(x) - f_{t_0}(x)| < \epsilon$ для любого $x \in I$.

Из свойства отображения q следует, что всякая непрерывная функция $\tilde{f}$ на отрезке I, такая, что $\tilde{f}(0) = 0$ и $\tilde{f}(1)$ кратно 2π служит функцией $f^{\#}$ для петли $f = q \circ \tilde{f}$.

Для завершения доказательства Теоремы 15.1 осталось сделать несколько простых замечаний. Во-первых, число $k = f^{\#}(1)/2\pi$ не меняется при гомотопии, поскольку область возможных значений $f^{\#}(1)$ дискретна. Таким образом, это число зависит от элемента $[f]$ группы $\pi_1(S^1)$. Во-вторых, всякое число $k \in \mathbb{Z}$ может быть получено таким образом: достаточно взять $f = h_k$, где $h_k^{\#}(x) = 2\pi kx$ (см. Рис. 15.2)

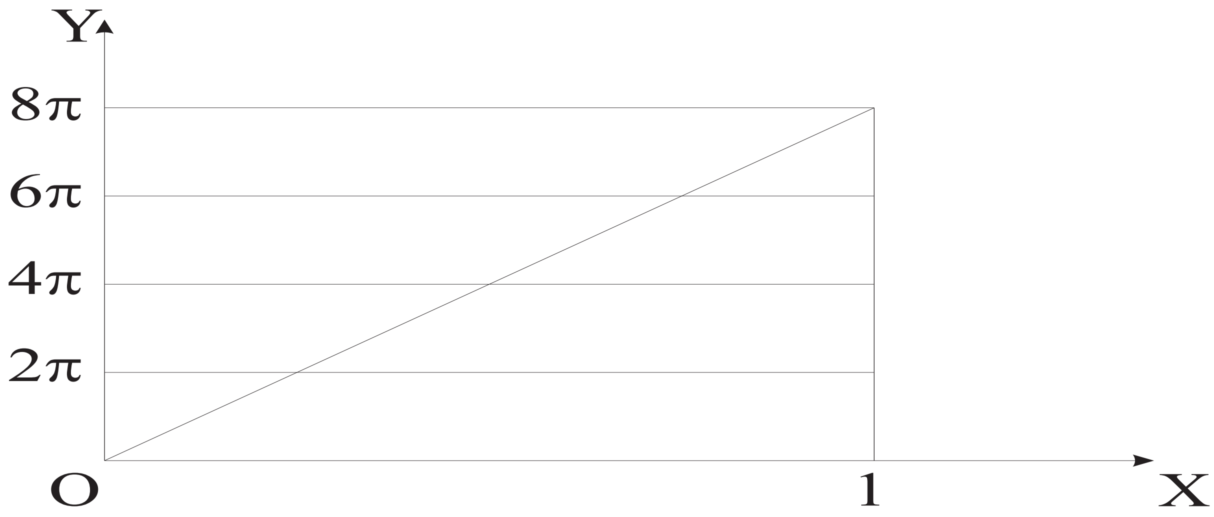

Рис. 15.2:

В-третьих, если $f_1^{\#}(1) = f_2^{\#}(1)$, то $f_1 \sim f_2$. Действительно, функции $f_1^{\#}$ и $f_2^{\#}$ гомотопны в классе функций с заданными значениями в 0 и 1 (так, функции изображённые на Рис. 15.1 и Рис. 15.2, соединяются вертикальной гомотопией:

$f_t^{\#}(x) = (1-t)f^{\#}(x) + th_4^{\#})$.

Семейство f_t, определенное семейством $f_t^{\#}$ — гомотопия f_1 и f_2.

Наконец, в-четвёртых, произведение $h_k h_l$ петель h_k и h_l гомотопно петле h_{k+l}, так как $\big(h_k h_l\big)^{\#}(1) = h^{\#}_{k+l}(1)$. Итак, ставя в соответствие элементу $[f]$ группы $\pi_1(S^1)$ число $k = f^{\#}(1)/2\pi$ получаем отображение $H : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$. Согласно второму замечанию отображение H сюръективно. По третьему замечанию H инъективно. В силу четвёртого замечания, отображение H является гомоморфизмом. Теорема доказана. $\square$

Задачи.

15.1. (Теорема Брауэра о неподвижной точке.) Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого диска B^2 в себя имеет неподвижную точку.

15.2. Доказать, что при любом гомеоморфизме B^2 точки из границы S^1 отображаются в точки из границы.

15.3. Доказать, что не существует ретракции замкнутого диска B^2 на граничную окружность S^1.

15.4. Доказать основную теорему алгебры: любой многочлен над полем комплексных чисел степени ≥ 1 имеет корень.

15.5. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Замкнутое подмножество C называется перегородкой между A и B в X, если $X \setminus C = O \cup U$, где

$O \cap U = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset U$.

Докажите, что любые две перегородки C_1, C_2 между $A_1 = \{0\} \times I$ и $A_2 = \{1\} \times I$, и $B_1 = I \times \{0\}$ и $B_2 = I \times \{1\}$ в I^2 соответственно, пересекаются.

15.6. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^1$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

Дополнительные задачи.

15.1x. Вычислить фундаментальную группу букета окружностей.

15.2x. Вычислить фундаментальные группы двумерных компактных поверхностей.

15.3x. Вычислить фундаментальные группы проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

15.4x. Какие группы реализуются как фундаментальные группы связных конечных графов?

15.5x. Вычислить фундаментальную группу:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$;

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$;

(c) $\mathrm{SU}(n, \mathbb{R})$.

15.6x. Пусть $f : S^1 \to S^1$ такое непрерывное отображение, что $f(t) \neq f(-t)$ для любой точки $t \in S^1$. Докажите, что $f \sim \mathrm{id}$.

15.7x. (Теорема Борсука–Улама.) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^2 \to \mathbb{C}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

15.8x. Докажите, что для любой пары непрерывных функций $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f_1(t) = f_2(-t)$.

15.9x. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$.

15.10x. Докажите, что не существует пространства X такого, что $X \times X$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

15.11x. Докажите, что в любом замкнутом покрытии $\{F, T\}$ окружности S^1 существует элемент, содержащий пару противоположных точек. Сформулируйте и докажите соответствующее утверждении для сферы S^2.

15.12x. Непрерывным касательным векторным полем на сфере $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ называется непрерывное отображение $V : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $x \in S^2$ и $f(x)$ ортогональны.

(Теорема Пуанкаре.) У любого непрерывного касательного векторного поля V на сфере S^2 существует точка $x \in S^2$, в которой $V(x) = (0, 0, 0)$.

15.13x. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : S^2 \to S^2$ или существует неподвижная точка, или точка, для которой $f(x) = -x$.

Литература

[1] П. С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

[2] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1977.

[3] Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко, Введение в топологию. М.: Наука Физматлит, 1995.

[4] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов,. М.: МЦНМО, 2010.

[5] Дж. Келли, Общая топология. Москва, Наука, 1968.

[6] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.

[7] A. Hatcher, Algebraic topology. Cambridge university press, 2002.