Е. Ю. Мычка, В. В. Филиппов

Тривиальное доказательство теоремы Цермело

Теория вполне упорядоченных множеств состоит, в основном, из цепочек простых утверждений. В этом отношении из общего ряда выходит одно из центральных утверждений теории теорема Цермело, все известные доказательства которого относительно сложны. Цель этого текста — привести доказательство теоремы Цермело, построенное на уровне прочих доказательств этой теории.

Теорема Цермело. Всякое множество можно вполне упорядочить.

Доказательство. I. Пусть A обозначает рассматриваемое множество, B — множество всех его подмножеств, $\phi : B \setminus \{\emptyset\} \to A$ — функция выбора, сопоставляющая каждому непустому подмножеству X множества A, принадлежащую ему точку: $\phi(X) \in X$. Функция $\alpha(X) = \phi(A \setminus X)$ определена для всех подмножеств множества A за исключением самого множества A.

II. Подмножество P множества B назовем *правильным*, если

1) оно линейно упорядочено отношением $\subseteq$, то есть, если $p_1, p_2 \in P$, то либо $p_1 \subseteq p_2$, либо $p_2 \subseteq p_1$;

2) оно при этом вполне упорядочено отношением $\subseteq$, то есть, если $\gamma \subseteq P$, то в γ есть наименьший элемент относительно этого порядка (так как речь идет об отношении порядка $\subseteq$, то наименьший элемент есть $\cap\gamma$);

3) $\emptyset \in P$;

4) если множество $q \in P$ непусто, то $q = q_1 \cup \{\alpha(q_1)\}$, где $q_1 = \cup\{p : p \in P, p \subset q\}$.

Правильные множества существуют. Таковыми, например, являются множества $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\alpha(\emptyset)\}\}$, $\{\emptyset, \{\alpha(\emptyset)\}, \{\alpha(\emptyset), \alpha(\{\alpha(\emptyset)\})\}\}$ и т.д. Заметим, что если $p \in P$ и $p+1 \in P$, то $p+1 = p \cup \{\alpha(p)\}$.

III. Пусть P_1 и P_2 — правильные множества.

Положим $P_3 = \{p : p \in P_1 \cap P_2, \{q : q \in P_1, q \subset p\} = \{q : q \in P_2, q \subset p\}\}$.

Покажем, что

$(*)$ $P_3 = P_1$ или $P_3 = P_2$.

Так как в силу определения P_3 имеем: $P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$, то, предположив невыполнение $(*)$, получаем непустоту множеств $P_1 \setminus P_3$ и $P_2 \setminus P_3$. Пусть r_1 — наименьший элемент множества $P_1 \setminus P_3$, r_2 — наименьший элемент множества $P_2 \setminus P_3$. Так как $\{p : p \in P_1, p \subset r_1\} = P_3 = \{p : p \in P_2, p \subset r_2\}$, то в силу 4) $r_1 = \cup P_3 \cup \{\alpha(\cup P_3)\} = r_2$. Следовательно, $r_1 \in P_3$, что невозможно ($r_1 \notin P_3$).

Таким образом, предположение о невыполнении $(*)$ приводит нас к противоречию.

Выполнение же $(*)$ означает, что либо P_1 является начальным отрезком P_2, либо P_2 является начальным отрезком P_1.

IV. Обозначим через Q объединение всех правильных множеств. При этом Q очевидным образом удовлетворяет условиям 1) и 3) из II.

Покажем выполнение условия 2).

Пусть $\gamma \subseteq Q$. Для некоторого правильного множества P пересечение $\gamma \cap P$ непусто. Пусть $m \in \gamma \cap P$. В силу правильности множества P множество

$\{n : n \in \gamma, n \subseteq m\} \subseteq P$ имеет наименьший элемент. Обозначим его через g. Он не больше всех элементов γ, меньших m, по своему определению и не больше всех элементов γ, больших m, в силу того, что $g \subseteq m$.

Покажем выполнение условия 4).

Пусть множество $q \in Q$ непусто. В силу определения Q $q \in P$ для некоторого правильного множества P. Поэтому $q = q_1 \cup \{\alpha(q_1)\}$, где $q_1 = \cup\{p : p \in P, p \subset q\}$ в силу правильности множества P. Для любого множества $r \in Q \setminus P$ выполнено $q \subseteq r$, поэтому $q_1 = \cup\{p : p \in Q, p \subset q\}$.

Таким образом, множество Q правильно. Пусть $Z = \cup Q$.

Если при этом $Z \neq A$, то множество $\tilde{Q} = Q \cup \{Z \cup \{\alpha(Z)\}\}$ является правильным. Это противоречит определению Q как объединению всех правильных множеств, так как $\tilde{Q}$ содержит Q в качестве собственного подмножества.

Таким образом, $\cup Q = A$.

V. Рассмотрим α в качестве отображения из Q в A.

Покажем, что отображение α инъективно.

Пусть $q_1 \neq q_2$. Положим для определенности $q_1 \subset q_2$. Тогда $q_1 + 1 \subseteq q_2$. В силу правильности множества Q имеем $q_1 + 1 = q_1 \cup \{\alpha(q_1)\}$. Поэтому $\alpha(q_1) \in q_1 + 1 \subseteq q_2$, т. е. $\alpha(q_1) \in q_2$. Но $\alpha(q_2) \notin q_2$. Следовательно, $\alpha(q_1) \neq \alpha(q_2)$.

Покажем, что отображение α сюръективно.

В силу того, что $\cup Q = A$ для любого $a \in A$ множество $\{q : q \in Q, q \ni a\}$ непусто. Обозначим через r его наименьший элемент. Тогда в силу правильности множества Q имеем $r = r_1 \cup \{\alpha(r_1)\}$, где $r_1 = \cup\{q : q \in Q, q \subset r\}$. Так как r — наименьший элемент, содержащий точку a, то $a \notin r_1$. Следовательно, $\alpha(r_1) = a$.

Таким образом, функция α индуцирует полный порядок на A. Теорема доказана.