# Содержание

# Обозначения

| | |
|---|---|
| $\mathscr{P}(X)$ | — множество всех подмножеств множества $X$ |
| $\subset$ | — нестрогое включение |
| $\mathbb{N}$ | — множество натуральных чисел |
| $\mathbb{N}_0$ | — множество неотрицательных целых чисел |
| $\mathbb{R}$ | — множество целых чисел |
| $\mathbb{Q}$ | — множество рациональных чисел |
| $\mathbb{R}$ | — множество вещественных чисел |
| $\lvert X\rvert$ | — мощность множества $X$ |
| $2^{\lvert X\rvert}$ | — $\lvert\mathscr{P}(X)\rvert$, мощность множества всех подмножеств множества $X$ |
| $\aleph_0$ | — $\lvert\mathbb{N}\rvert$, мощность множества $\mathbb{N}$ (и любого другого счётного множества) |
| $\beta f(\mathscr{U})$ | — образ ультрафильтра $\mathscr{U}$ при отображении $f\colon X \to Y$, $\beta f(\mathscr{U}) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\}$ |
| $\beta X$ | — пространство всех ультрафильтров на $X$ |
| $X^*$ | — пространство всех неглавных ультрафильтров на $X$ |
| $p_x$ | — главный ультрафильтр, состоящий из всех множеств, содержащих точку $x$ |
| $\overline{A}$ | — замыкание множества $A$ в топологическом пространстве; для $A \subset \beta X$ $\ \overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ |
| $\hat{f}$ | — непрерывное продолжение отображения $f\colon X \to K$ в компакт $K$ на $\beta X$ или отображения $f\colon X \to Y$ в множество $Y$ до отображения $\beta X \to \beta Y$; во втором случае $\hat{f}(p) = \beta f(p)$ |
| $K(S)$ | — объединение всех минимальных левых идеалов полугруппы $S$ |
| $E(S)$ | — множество идемпотентов полугруппы $S$ |
| $\overline{x}$ | — замыкание орбиты точки $x$ в динамической системе |

# Лекция 1
# Фильтры и ультрафильтры. Введение в топологию на языке ультрафильтров

## 1.1. Фильтры и ультрафильтры

Напомним знакомое определение из математического анализа:

Пусть $X$ — множество. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ — *база*, если

1) $\varnothing \notin \mathscr{B}$;
2) для любых $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ существует $B_3 \in \mathscr{B}$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Предел функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по базе $\mathscr{B}$ определяется так: $a = \lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{B}$ такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ для всех $x \in B$.

На множестве всех отмеченных разбиений отрезка $[a, b]$ множества $B_\delta$ разбиений диаметра меньше $\delta$, $\delta > 0$, образуют базу, и интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется как предел по этой базе интегральных сумм Римана функции $f$.

На самом деле в этом определении база — это база фильтра, и предел по базе было бы правильнее называть пределом по фильтру.

**Определение 1.1.** *Фильтром* на множестве $X$ называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

① $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
② если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
③ если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Фильтр $\mathscr{F}$ называется *свободным*, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$.

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является *базой* фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

У фильтра обычно имеется много баз, но каждая база однозначно определяет фильтр, базой которого она является (он состоит из всех надмножеств элементов базы).

*Примеры*

1. Множество всех (не обязательно открытых) окрестностей точки в топологическом пространстве $X$ — несвободный фильтр на $X$.
2. Фильтр всех проколотых окрестностей точки $x$ в топологическом пространстве $X$ — свободный фильтр на $X \setminus \{x\}$.
3. Наименьший свободный фильтр на бесконечном множестве $X$ — *фильтр Фреше*

$$\mathscr{F} = \{Y \subset X : X \setminus Y \text{ конечно}\}.$$

**Определение 1.2.** *Центрированное семейство множеств* — это любое семейство $\mathscr{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \dots, C_n \in \mathscr{C}$, то $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \varnothing$.

Множество всех конечных пересечений элементов семейства $\mathscr{C}$ и их надмножеств — фильтр с базой $\{C_1 \cap \dots \cap C_n : n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathscr{C}\}$.

**Определение 1.3.** Максимальный (по включению) фильтр называется *ультрафильтром*: фильтр $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, если для любого фильтра $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$ имеем $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$.

Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется *главным*, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

*Упражнение.* Докажите, что всякий главный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на множестве $X$ имеет вид

$$\mathscr{U}_x = \{A \subset X : x \in A\}$$

для некоторой точки $x$, причём $\bigcap \mathscr{U}_x = \{x\}$. [Заметьте, что $\mathscr{U}_x$ — фильтр, и что любое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, для которого $x \in \bigcap \mathscr{F}$, содержится в $\mathscr{U}_x$.]

## 1.2. Порядок

*Частичный порядок*, или просто *порядок*, на множестве $X$ — это подмножество $\leqslant$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leqslant y$ вместо $(x, y) \in \leqslant$):

- $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \implies x \leqslant z$ (*транзитивность*);
- $x \leqslant x \quad \forall x \in X$ (*рефлексивность*);
- $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \implies x = y$ (*антисимметричность*).

Множество $X$ вместе с заданным на нём порядком $\leqslant$ (т.е. пара $(X, \leqslant)$) называется (*частично*) *упорядоченным множеством.* Про само множество $X$ говорят, что оно (*частично*) *упорядочено отношением* $\leqslant$. Запись $x \leqslant y$ читается «элемент $x$ не больше элемента $y$» или «элемент $x$ не превосходит элемента $y$», а запись $x \geqslant y$ — «элемент $x$ не меньше элемента $y$».

Два элемента $x$ и $y$ множества $X$, упорядоченного отношением $\leqslant$, *сравнимы*, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Говорят, что $y \in X$ лежит *между* $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leqslant y \leqslant z$. Элемент $x$ множества $Y \subset X$ называется *минимальным* (*максимальным*) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leqslant x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leqslant y) \to (y = x))$). Элемент $x$ *ограничивает* множество $Y \subset X$ *сверху* (*снизу*), или является *верхней* (*нижней*) *гранью* множества $Y$, если $\forall y \in Y (y \leqslant x)$ (соответственно $\forall y \in Y (x \leqslant y)$). Если при этом $x$ принадлежит множеству $Y$, то он называется *наименьшим* (*наибольшим*) элементом $Y$ и обозначается $\min Y$ ($\max Y$). Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*, *ограниченным*). Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества $Y$, если она существует, называется также *точной верхней* (*нижней*) *гранью*, или *супремумом* (*инфимумом*), множества $Y$ и обозначается $\sup Y$ ($\inf Y$).

Порядок $\leqslant$ на $X$ называется *линейным*, если любые два элемента $x$ и $y$ множества $X$ сравнимы. В этом случае пара $(X, \leqslant)$ называется *линейно упорядоченным множеством.*

Порядок $\leqslant$ на $X$ *полон*, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в $Y$) элемент. Пара $(X, \leqslant)$, где $\leqslant$ — полный порядок, называется *вполне упорядоченным множеством.*

На каждом подмножестве $Y$ упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ естественно возникает *индуцированный* порядок, или *сужение* порядка $\leqslant$ на $Y$, — это пересечение порядка $\leqslant$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leqslant$ на $X$. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

## 1.3. Теорема Цермело и лемма Цорна

**Теорема Цермело.** *Любое множество можно вполне упорядочить.*

**Лемма Цорна.** *Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества $Y \subset X$, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в $X$ есть максимальный элемент.*

Теорема Цермело и лемма Цорна равносильны аксиоме выбора в том смысле, что их можно вывести из системы аксиом ZFC (аксиомы Цермело–Френкеля + аксиома выбора), и аксиому выбора можно вывести из аксиом Цермело–Френкеля в предположении справедливости теоремы Цермело или леммы Цорна. Доказательства теоремы Цермело и леммы Цорна можно найти в книге: Н.К. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*, Москва: МЦНМО, 2012.

**Теорема 1.1.** *Любое центрированное семейство $\mathscr{C}$ подмножеств произвольного множества $X$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на $X$.*

**Доказательство.** Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на $X$, содержащих $\mathscr{C}$, отношением включения $\subset$. Если $\mathfrak{L}$ — любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup \mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \dots, F_n \in \bigcup \mathfrak{L}$ найдутся $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathscr{F}_i$ для $i \leqslant n$, и поскольку $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено, без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{F}_1 \subset \dots \subset \mathscr{F}_n$ (мы всегда можем занумеровать $F_1, \dots, F_n$ именно так). Значит, $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \varnothing$. Ясно, что $\mathscr{C} \subset \bigcup \mathfrak{L}$ и $\mathscr{F} \subset \bigcup \mathfrak{L}$ для любого $\mathscr{F} \in \mathfrak{L}$. Следовательно, $\bigcup \mathfrak{L}$ — верхняя грань семейства $\mathfrak{L}$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U}$, содержащее $\mathscr{C}$. Легко видеть, что $\mathscr{U}$ — ультрафильтр. ■

**Теорема 1.2** (основное свойство ультрафильтров). *Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве $X$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр на $X$, и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathscr{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \neq \varnothing$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \varnothing,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathscr{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на $X$. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathscr{U}$ и, значит, $F \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, и из максимальности $\mathscr{F}$ вытекает, что $\mathscr{F} = \mathscr{U}$. Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

*Достаточность.* Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$, и пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F} \neq \mathscr{U}$, то найдется $A \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathscr{F}$, а поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathscr{U}$. Таким образом, $\mathscr{U}$ содержит непересекающиеся множества $A$ и $X \setminus A$ в противоречие со свойствами ① и ② из определения фильтра. Значит, $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, так что $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. ■

**Следствие 1.1** (основное свойство ультрафильтров). *Если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на множестве $X$, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_m \subset X$ и существует элемент $A \in \mathscr{U}$ такой, что $A \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$. В частности, если $A_1, \dots, A_m$ — любые подмножества $X$ со свойством $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$, то $A_i \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$.*

**Доказательство.** Предположим, что $A_i \notin \mathscr{U}$ для всех $i \leqslant m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ для $i \leqslant m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m) \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)) = \varnothing$. ■

На понятии ультрафильтра основана популярная модель нестандартного анализа:

Пусть $\mathscr{U}$ — любой неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ последовательностей вещественных чисел введём отношение эквивалентности $\sim$:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}.$$

На фактормножестве $\mathbb{R}/\sim$ возникает естественный порядок:

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim} \leqslant [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim} \iff \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n\} \in \mathscr{U}.$$

Классы постоянных последовательностей отождествляются с вещественными числами. Классы последовательностей, сходящихся к 0 (к $\infty$), трактуются как бесконечно малые (бесконечно большие) величины. Они отличаются скоростью сходимости.

## 1.4. Отображения фильтров

**Определение 1.4.** Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на $X$. Семейство множеств

$$\beta f(\mathscr{F}) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \text{существует } F \in \mathscr{F}, \text{ для которого } f(F) \subset A\}$$

называется *образом фильтра* $\mathscr{F}$ при отображении $f$.

**Предложение 1.1.** *Образ любого (ультра)фильтра при любом отображении является (ультра)фильтром.*

**Доказательство.** Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, и пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на $X$. То, что $\beta f(\mathscr{F})$ — фильтр, ясно (условие ② из определения фильтра выполнено, так как $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$). Если при этом $\mathscr{F}$ — ультрафильтр, то из основного свойства ультрафильтров и равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что $\beta f(\mathscr{F})$ — тоже ультрафильтр. ■

## 1.5. Ультрафильтры и топология

*Топологическое пространство* $X$ — это множество $X$ с заданной на нём топологией $\mathscr{T}$; при этом семейство $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ — *топология*, если

- $\varnothing, X \in \mathscr{T}$,
- $U \cap V \in \mathscr{T}$ для любых $U, V \in \mathscr{T}$ и
- $\bigcup \mathscr{S} \in \mathscr{T}$ для любого $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$.

Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Любое открытое множество, содержащее точку $x \in X$, называется *открытой окрестностью* точки $x$, а любое множество, содержащее открытую окрестность, называется *окрестностью* точки $x$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* (*предельной точкой*) множества $A \subset X$, если любая её окрестность пересекает $A$ (пересекает $A \setminus \{x\}$). *Замыкание* $\overline{A}$ множества $A$ — это множество всех его точек прикосновения, т.е. наименьшее замкнутое множество, содержащее $A$. Если $\overline{A} = X$, то говорят, что $A$ *всюду плотно* или просто *плотно* в $X$.

**Определение 1.5.** Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве $X$ *сходится* к точке $x \in X$, если любая окрестность точки $x$ принадлежит $\mathscr{F}$. Обозначение: $\mathscr{F} \to x$. Говорят, что фильтр *сходится*, или является *сходящимся*, если он сходится к некоторой точке.

**Теорема 1.3.** *Для топологического пространства $X$, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:*

а) *$x$ является точкой прикосновения множества $A$;*

б) *существует фильтр $\mathscr{F}$ на $X$, который содержит $A$ и сходится к $x$;*

в) *существует ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $X$, который содержит $A$ и сходится к $x$.*

**Доказательство.** а) ⇒ в): Семейство $\mathscr{B}(x)$ всех окрестностей точки $x$ в $X$ центрировано. Поскольку $x$ — точка прикосновения множества $A$, семейство $\{A \cap U : U \in \mathscr{B}(x)\}$ тоже центрировано, а значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Из свойства ③ фильтров следует, что $\mathscr{U}$ содержит $A$ и все окрестности точки $x$.

в) ⇒ б): тривиально.

б) ⇒ а): Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ сходится к точке $x$, он содержит все окрестности $x$. То, что $A \in \mathscr{F}$, означает, что пересечение $A$ с любой окрестностью $x$ непусто (в силу свойства ①), т.е. $x$ является точкой прикосновения множества $A$. ■

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств *непрерывно в точке* $x \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x)$ в $Y$ содержит окрестность точки $x$ в $X$. Отображение $f$ *непрерывно*, если оно непрерывно во всех точках.

*Упражнения*

1. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (замкнутого) подмножества пространства $Y$ открыт (замкнут) в $X$.
2. Покажите, что если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, то для любого $A \subset X$ образ $f(\overline{A})$ замыкания множества $A$ в $X$ содержится в замыкании $\overline{f(A)}$ образа самого́ этого множества в $Y$. [Воспользуйтесь пунктом 1 и тем, что $\overline{A}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $A$.]

**Теорема 1.4.** *Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда образ при $f$ любого ультрафильтра, сходящегося к $x$, сходится к $f(x)$.*

**Доказательство.** Предположим, что образ при отображении $f$ любого сходящегося к $x \in X$ ультрафильтра сходится к $f(x)$, и пусть $V$ — окрестность $f(x)$. Если $f^{-1}(V)$ не является окрестностью (= не содержит ни одной открытой окрестности) точки $x$ в $X$, то семейство

$$\mathscr{F} = \{X \setminus f^{-1}(V)\} \cup \{U : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

центрировано, а значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на $X$. Поскольку $\mathscr{U} \to x$, ультрафильтр $\beta f(\mathscr{U})$ должен сходиться к $f(x)$. Однако из того, что $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U}$, следует, что $f(X \setminus f^{-1}(V)) = Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U})$, откуда $V \notin \beta f(\mathscr{U})$. Это противоречие доказывает, что $f^{-1}(V)$ — окрестность точки $x$ в $X$, т.е. $f$ непрерывно в $x$.

Обратно, пусть $f$ непрерывно в $x \in X$. Рассмотрим любой ультрафильтр $\mathscr{U} \to x$ на $X$. Если $\beta f(\mathscr{U}) \not\to f(x)$, то у $f(x)$ есть окрестность $V \notin \beta f(\mathscr{U})$. По основному свойству ультрафильтров имеем $Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U})$, а по определению отображения ультрафильтров $\beta f$ —

$$f^{-1}(X \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U}$$

в противоречие с тем, что $\mathscr{U} \to x$ и $f^{-1}(V)$ — окрестность точки $x$. ■

## 1.6. Ультрафильтры и компактность

**Определение 1.6.** Пусть $X$ — произвольное множество и $Y \subset X$. *Покрытие* множества $Y$ — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств $X$, которое *покрывает* $Y$, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$. *Подпокрытием* покрытия $\mathscr{C}$ называется любое подсемейство семейства $\mathscr{C}$, которое само является покрытием.

Если $X$ — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют *открытым* (*замкнутым*, *открыто-замкнутым*) покрытием.

Иногда вместо покрытия множества $X$ удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что *семейство $\mathscr{C}$ подмножеств $X$ является покрытием множества $X$ тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.*

**Определение 1.7.** Топологическое пространство *компактно*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

**Определение 1.8** (равносильное)**.** Топологическое пространство *компактно*, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

(Достаточно рассмотреть семейство, двойственное открытому покрытию.)

*Упражнение.* Докажите, что образ компактного пространства при любом непрерывном отображении компактен.

*Базой* топологии $\mathscr{T}$ топологического пространства $X$ называется любое семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ с тем свойством, что всякое открытое множество является объединением некоторого семейства элементов $\mathscr{B}$, или, что равносильно, для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности $U$ существует окрестность $V \in \mathscr{B}$, которая содержится в $U$. Топология однозначно определяется своей базой (но не наоборот).

**Предложение 1.2.** *Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mathscr{B}$ — любая база его топологии. Пространство $X$ компактно тогда и только тогда, когда любое открытое покрытие пространства $X$ элементами базы $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.*

**Доказательство.** В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства $X$. Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathscr{U}$, содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathscr{B}$, который содержит точку $x$ и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства $X$ элементами $\mathscr{B}$. По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество $V_{x_i}$ содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \dots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. ■

**Определение 1.9.** Топологическое пространство $X$ *хаусдорфово* (обозначение: $X \in T_2$), если у любых двух различных точек $x, y \in X$ имеются непересекающиеся окрестности.

Хаусдорфовы компактные пространства называются *компактами.*

*Упражнения*

1. Докажите, что пространство $X$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на $X$ сходится к не более чем одной точке.
2. Докажите, что пространство $X$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда любая точка $x \in X$ совпадает с пересечением замыканий всех своих окрестностей.

**Определение 1.10.** *Подпространство* топологического пространства $X$ с топологией $\mathscr{T}$ — это любое множество $Y \subset X$, снабженное топологией $\mathscr{T}|Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{T}\}$.

**Теорема 1.5.** 1. *Всякое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*
2. *Всякое компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто.*

**Доказательство.** 1. Пусть $K$ — компактное пространство, $F \subset K$ — его замкнутое подпространство и $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства $F$. По определению топологии подпространства для каждого $\alpha \in A$ существует открытое в $K$ множество $V_\alpha$, для которого $U_\alpha = V_\alpha \cap F$. Семейство $\{K \setminus F\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in F\}$ — открытое покрытие пространства $K$. Оно имеет конечное подпокрытие $\mathscr{C}$. Ясно, что семейство $\{U_\alpha : V_\alpha \in \mathscr{C}\}$ является конечным подпокрытием данного покрытия пространства $F$.

2. Пусть $X$ хаусдорфово, $K \subset X$ компактно и $x \notin K$. Поскольку $X$ хаусдорфово, имеем $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U \text{ — окрестность } x\}$. Семейство $\{K \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность } x\}$ — открытое покрытие компакта $K$. Пусть $\{K \setminus \overline{U}_1, \dots, K \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки $x$, не пересекающая $K$. Значит, $x \notin \overline{K}$. ■

**Определение 1.11.** Топологическое пространство $X$ *регулярно* (обозначение: $X \in T_3$), если для любой окрестности $U$ любой точки $x \in X$ существует окрестность $V$ точки $x$ такая, что $\overline{V} \subset U$.

(В определение регулярности часто включается также требование замкнутости всех одноточечных, а значит, и конечных множеств. Здесь мы не будем этого делать.)

**Теорема 1.6.** *Всякое хаусдорфово компактное пространство регулярно.*

**Доказательство.** Пусть $K$ — хаусдорфово компактное пространство и $U$ — открытая окрестность точки $x \in K$ (напомним, что в любой окрестности содержится открытая). Тогда $K \setminus U$ замкнуто и, следовательно, компактно. Для каждой точки $y \notin U$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Пусть $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_y : y \in K\}$ компакта $K$. Ясно, что открытое множество $W = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{y_i}$ содержит $K \setminus U$ и не пересекается с открытой открестностью $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{y_i}$ точки $x$. Имеем $V \subset K \setminus W \subset U$. Поскольку замыкание $\overline{V}$ окрестности $V$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее эту окрестность, имеем $\overline{V} \subset U$. ■

**Теорема 1.7.** *Топологическое пространство $X$ компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве $X$ сходится.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Предположим, что на $X$ существует ультрафильтр $\mathscr{U}$, который не сходится ни к одной точке $x \in X$. Это означает, что у каждой точки $x \in X$ есть открытая окрестность $U_x \notin \mathscr{U}$. Семейство $\{U_x : x \in X\}$ — открытое покрытие компактного пространства $X$; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. В силу основного свойства ультрафильтров имеем $U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех $i$. Противоречие.

*Достаточность.* Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства $X$, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано. Оно содержится в ультрафильтре $\mathscr{U}$ на $X$. По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке $x$. Пусть $x \in V \in \mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Это противоречит свойствам ① и ② в определении фильтра. ■

# Лекция 2
# Топологическое пространство ультрафильтров. Полугруппа ультрафильтров. Теорема Хиндмана

## 2.1. Топологическое пространство ультрафильтров

Пусть $X$ — множество. Обозначим множество всех ультрафильтров на $X$ через $\beta X$. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}.$$

Семейство $\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subset X\}$ является базой некоторой топологии на $\beta X$. В дальнейшем мы будем рассматривать $\beta X$ только с этой топологией. Точки-ультрафильтры пространства $\beta X$ мы будем обозначать строчными латинскими буквами из второй половины алфавита: $p$, $q$, $r$ и т.д.

Для $A \subset X$

$$\overline{A} \text{ — окрестность ультрафильтра } p \text{ в } \beta X \iff A \in p.$$

Множество $X$ можно отождествить с подпространством $\beta X$, состоящим из главных ультрафильтров:

$$X \ni x \equiv p_x = \{A \subset X : x \in A\}.$$

## 2.2. Свойства пространства $\beta X$

**1.** Множество всех главных ультрафильтров (вида $p_x = \{A \subset X : x \in A\}$), которое отождествляется с $X$,

- дискретно:
  для каждого $x \in X$ имеем $\{x\} \in p_x$, и окрестность $\overline{\{x\}} = \{p \in \beta X : \{x\} \in p\}$ ультрафильтра $p_x$ состоит из единственной точки $p_x$;
- открыто:
  $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{p_x\}$, и все множества $\{p_x\}$ открыты;
- всюду плотно:
  любое непустое открытое множество $U$ в $\beta X$ содержит $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ для некоторого непустого множества $A \subset X$ (так как множества такого вида образуют базу топологии). Для $x \in A$ имеем $A \in p_x$. Значит, $p_x \in U$.

**2.** Для любого $A \subset X$ множество $\overline{A} = \{p \in \beta X : A \in p\}$ открыто-замкнуто, так как $\beta X \setminus \overline{A} = \overline{X \setminus A}$ — это открытое множество.

**3.** Для всякого $A \subset X$ множество $\overline{A}$ является замыканием множества $A \equiv \{p_x : x \in A\}$ в $\beta X$, причём $\overline{A} \cap X = A$.

Действительно, из того, что $A \subset \overline{A}$ и $\overline{A}$ замкнуто, следует, что $\overline{A}$ содержит замыкание множества $A$.

Обратно, пусть $p \in \overline{A}$ (т.е. $A \in p$). Любая окрестность $U$ точки $p$ в $\beta X$ содержит окрестность вида $\overline{B}$, где $B \in p$. Для любой точки $x \in A \cap B$ имеем $p_x \in A$ и $A \cap B \in p_x$, т.е. $p_x \in \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \subset U$. Таким образом, любая точка $p$ из $\overline{A}$ является предельной для $A$. Значит, $\overline{A}$ содержится в замыкании множества $A$.

Наконец, $p_x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда $A \in p_x$, т.е. $x \in A$, а значит, $\overline{A} \cap X = A$.

**4.** Пространство $\beta X$ хаусдорфово. Действительно, если $p, q \in \beta X$, $p \neq q$, то найдётся $A \in p$, $A \notin q$. Имеем $X \setminus A \in q$. Множества $\overline{A}$ и $\overline{X \setminus A}$ — непересекающиеся окрестности точек $p$ и $q$.

**5.** Пространство $\beta X$ компактно.

**Доказательство.** Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства $\beta X$. В силу предложения 1.2 можно считать без ограничения общности, что каждое множество $U_\iota$ имеет вид $\overline{A}_\iota$ для $A_\iota \subset X$, т.е. $\mathscr{U} = \{\overline{A}_\iota : \iota \in I\}$. Положим $\mathscr{F} = \{X \setminus A_\iota : \iota \in A\}$.

Предположим, что $\mathscr{F}$ центрировано. Тогда $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $p \in \beta X$. Поскольку $\mathscr{U}$ — покрытие пространства $\beta X$, имеем $p \in \overline{A}_\iota$ (т.е. $A_\iota \in p$) для некоторого $\iota \in I$. С другой стороны, $X \setminus A_\iota \in p$. Противоречие.

Значит, $\mathscr{F}$ не центрировано. Для $A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}$ таких, что $(X \setminus A_{\iota_1}) \cap \dots \cap (X \setminus A_{\iota_n}) = \varnothing$, имеем $A_{\iota_1} \cup \dots \cup A_{\iota_n} = X$. По основному свойству ультрафильтров для всякого $p \in \beta X$ существует номер $i \leqslant n$ такой, что $A_{\iota_i} \in p$, т.е. $p \in \overline{A}_{\iota_\alpha}$. ■

**6.** Любое отображение $f\colon X \to Y$ множества $X$ в хаусдорфов компакт $Y$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta X \to Y$.

**Доказательство.** Для любого ультрафильтра $p \in \beta X$ семейство $\beta f(p) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in p\}$ — ультрафильтр на $Y$. Он сходится к некоторой точке $y \in Y$. Положим $\hat{f}(p) = y$. Ясно, что $\hat{f}$ продолжает $f$: если $p_x \equiv x \in X$, то $\beta f(p_x) = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \ni x\} = \{A \subset Y : f(x) \in A\}$ — это главный ультрафильтр $p_{f(x)}$ на $Y$, он сходится к $f(x)$.

Покажем, что $\hat{f}$ непрерывно. Пусть $O$ — любая окрестность точки $y = \hat{f}(p)$. Она содержит замкнутую окрестность $V$, так как всякий компакт регулярен. Имеем $V \in \beta f(p)$, потому что $\beta f(p) \to y$, и $f^{-1}(V) \in p$ по определению отображения $\beta f$. Значит, $\overline{f^{-1}(V)}$ — окрестность точки $p$ в $\beta X$. Покажем, что $\hat{f}(\overline{f^{-1}(V)}) \subset V$.

Предположим, что $q \in \overline{f^{-1}(V)}$ (т.е. $f^{-1}(V) \in q$) и $\hat{f}(q) \notin V$. Возьмём окрестность $U$ точки $\hat{f}(q)$ в $Y$, которая не пересекается с $V$. По построению $\beta f(q) \to \hat{f}(q)$; значит, $U \in \beta f(q)$ и $f^{-1}(U) \in q$. Однако $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, так как $U \cap V = \varnothing$, а значит, $f^{-1}(V) \notin q$. Противоречие. ■

Для $\hat{f}(p)$ иногда используют обозначение $\lim\limits_p f$ или $p$-$\lim f$.

**7.** Продолжение $\hat{f}\colon \beta X \to \beta X$ всякого отображения $f\colon Y \to X \subset \beta X$ совпадает с $\beta f$.

**Доказательство.** Будем рассматривать $f$ как отображение $Y \to \beta X$; это законно, так как $X \subset \beta X$. По определению отображения $\hat{f}$ для $p \in \beta Y$ имеем $\beta f(p) \to \hat{f}(p)$, т.е. любая окрестность $\overline{A}$ ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в $\beta X$ принадлежит $\beta f(p)$, а это означает, что $f^{-1}(\overline{A}) \in p$ для любого $A \in \hat{f}(p)$. Поскольку $\overline{A} \cap X = A$, имеем $f^{-1}(\overline{A}) = f^{-1}(A)$, т.е. $A \in \beta f(p)$. Значит, $\beta f(p) \in \overline{A}$ для любого $A \in \hat{f}(p)$.

Таким образом, ультрафильтр $\beta f(p) \in \beta X$ принадлежит любой окрестности ультрафильтра $\hat{f}(p)$ в $\beta X$, а потому совпадает с ним в силу хаусдорфовости компакта $\beta X$. ■

**8.** Для любого отображения $f\colon X \to \beta X$ и любого $p \in \beta X$ образ $\hat{f}(p)$ имеет *каноническую базу*, состоящую из всех множеств вида

$$\bigcup\{F_x : x \in P\}, \quad \text{где } P \in p \text{ и } F_x \in f(x). \tag{$*$}$$

**Доказательство.** Все множества вида $(*)$ непусты и пересечение двух таких множеств $\bigcup\{F_x : x \in P\}$ и $\bigcup\{F'_x : x \in P'\}$ содержит множество $\bigcup\{(F_x \cap F'_x) : x \in (P \cap P')\}$, которое тоже имеет вид $(*)$. Значит, множества вида $(*)$ являются базой некоторого фильтра $\mathscr{F}$ — он состоит из всех надмножеств множеств вида $(*)$. Это ультрафильтр в силу основного свойства ультрафильтров: множество $A \subset X$ содержит множество вида $(*)$ тогда и только тогда, когда $\{x \in X : A \in f(x)\} \in p$, т.е. $\{x \in X : X \setminus A \in f(x)\} \notin p$, а это означает, что $A$ содержит множество вида $(*)$ тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ такого множества не содержит. Значит, множества вида $(*)$ — база некоторого ультрафильтра $q$ на $X$. Покажем, что $q \to \beta f(p)$. Если $Q \in q$, то $Q \supset \bigcup\{F_x : x \in P\}$ для некоторых $P \in p$ и $F_x \in f(x)$, $x \in P$. Так как $F_x \subset Q$, имеем $Q \in f(x)$ и $f(x) \in \overline{Q}$ для всех $x \in P$. Значит, $f^{-1}(\overline{Q}) \supset P \in p$, так что $\overline{Q} \in \beta f(p)$. ■

## 2.3. Полугруппы ультрафильтров

Пусть $S$ — полугруппа. Для каждого $s \in S$ определим отображение

$$L_s \colon S \to S \quad (\subset \beta S)$$

правилом

$$L_s(x) = s \cdot x \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Рассмотрим непрерывное продолжение

$$\hat{L}_s \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{L}_s(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $s \cdot p$.

В силу восьмого свойства пространства ультрафильтров ультрафильтр $s \cdot p$ имеет каноническую базу

$$\Big\{ \bigcup \{F_x : x \in P\} : P \in p,\ F_x \in L_s(x) \Big\}.$$

Поскольку $L_s(x) = s \cdot x \in S$ для всякого $s \in P \in p$, все ультрафильтры $L_s(x)$ главные, так что в данном случае эта база имеет вид

$$\{s \cdot P : P \in p\}.$$

Теперь для каждого $q \in \beta S$ рассмотрим отображение

$$R_q \colon S \to \beta S,$$

определённое правилом

$$R_q(x) = x \cdot q \qquad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Существует непрерывное продолжение

$$\hat{R}_q \colon \beta S \to \beta S.$$

Для $\hat{R}_q(p)$ будем использовать (формальное) обозначение $p \cdot q$. Этот ультрафильтр называется *произведением ультрафильтров* $p$ и $q$ в $\beta S$. Он имеет каноническую базу

$$\Big\{ \bigcup \{F_x : x \in P\} : P \in p,\ F_x \in R_q(x) \Big\}.$$

Заменяя $F_x \in R_q(x) = x \cdot q$ на меньшие множества $x \cdot Q_x$, где $Q_x \in q$ (это элементы базы ультрафильтра $x \cdot q$), получим *каноническую базу произведения* $p \cdot q$:

$$\Big\{ \bigcup \{x \cdot Q_x : x \in P\} : P \in p,\ Q_x \in q \Big\}.$$

Умножение непрерывно по первому аргументу, а если первый аргумент — элемент $S$, то и по второму. Покажем, что из этих непрерывностей вытекает ассоциативность.

Пусть $O_1$ — любая окрестность $(p \cdot q) \cdot r$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $V_1 \ni p \cdot q$,
для которой $V_1 \cdot r \subset O_1$,
и существует окрестность $U_1 \ni p$,
для которой $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть $O_2$ — любая окрестность $p \cdot (q \cdot r)$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $U_2 \ni p$,
для которой $U_2 \cdot (q \cdot r) \subset O_2$.

Возьмём $x \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$x \cdot q \in V_1$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $W_1 \ni q$,
для которой $x \cdot W_1 \subset V_1$.

$x \cdot (q \cdot r) \in O_2$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $V_2 \ni q \cdot r$,
для которой $x \cdot V_2 \subset O_2$.
Непрерывность по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $W_2 \ni q$,
для которой $W_2 \cdot r \subset V_2$.

Возьмём $y \in S \cap W_1 \cap W_2$.

$x \cdot y \in V_1$, $V_1 \cdot r \subset O_1 \implies (x \cdot y) \cdot r \in O_1$.
Непрерывность по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $Q_1 \ni r$,
для которой
$(x \cdot y) \cdot Q_1 \subset O_1$.

$y \cdot r \in V_2$, непрерывность
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $Q_2 \ni r$, для
которой $y \cdot Q_2 \subset V_2$.
$x \cdot V_2 \subset O_2 \implies x \cdot (y \cdot Q_2) \subset O_2$.

Возьмём $z \in S \cap Q_1 \cap Q_2$.

Имеем $(x \cdot y) \cdot z \in O_1$ и $x \cdot (y \cdot z) \in O_2$. Из ассоциативности умножения в полугруппе следует, что

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \in O_1 \cap O_2.$$

Таким образом, любые окрестности точек $(p \cdot q) \cdot r$ и $p \cdot (q \cdot r)$ пересекаются. Значит, эти точки совпадают, потому что пространство $\beta S$ хаусдорфово.

*Вывод:* $\beta S$ — компактная правотопологическая полугруппа (*правотопологическая* = умножение непрерывно по первому аргументу).

## 2.4. Две теоремы о компактных полугруппах

**Теорема 2.1** (Эллис–Нумакура). *Любая непустая компактная хаусдорфова правотопологическая (= умножение непрерывно по первому аргументу) полугруппа $S$ содержит идемпотент, т.е. элемент $e$ такой, что $e \cdot e = e$.*

**Доказательство.** К упорядоченному семейству $(\mathscr{H}, \leqslant)$, где $\leqslant = \supset$, непустых замкнутых подполугрупп $S$ применима лемма Цорна. Действительно, пусть множество $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ линейно упорядочено отношением $\supset$. Элементы любого конечного подмножества этого множества можно перенумеровать в порядке $\leqslant$-возрастания, т.е. $\subset$-убывания: $H_1 \supset \dots \supset H_n$. Имеем $\bigcap\limits_{i \leqslant n} H_i = H_n \neq \varnothing$. Значит, любое такое множество $\mathscr{C}$ центрировано. Поскольку все $H \in \mathscr{C}$ замкнуты, а полугруппа $S$ компактна, имеем $\bigcap \mathscr{C} \neq \varnothing$. Ясно, что это пересечение замкнуто и является подполугруппой, т.е. принадлежит семейству $\mathscr{H}$. Кроме того, оно больше (относительно порядка $\leqslant$) всех элементов множества $\mathscr{C}$. Значит, это верхняя грань множества $\mathscr{C}$.

Пусть $H$ — $\leqslant$-максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент $\mathscr{H}$ и $e \in H$. Тогда $H \cdot e$ — подполугруппа: $x \cdot e \cdot y \cdot e = (x \cdot e \cdot y) \cdot e$, причём $x \cdot e \cdot y \in H$, так как $H$ — подполугруппа.

Кроме того, $H \cdot e \subset H$ (по той же причине). Подполугруппа $H \cdot e$ — образ подполугруппы $H$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Подполугруппа $H$ компактна, будучи замкнутым подмножеством компактного пространства $S$. Значит, $H \cdot e$ тоже компактна. Полугруппа $S$ хаусдорфова, а в хаусдорфовом пространстве все компактные подмножества замкнуты. Следовательно, подполугруппа $H \cdot e$ замкнута, и из её минимальности следует, что $H \cdot e = H$.

Положим

$$E = \{x \in H : x \cdot e = e\}.$$

Множество $E$ непусто и является подполугруппой (если $x, y \in H$, т.е. $x \cdot e = y \cdot e = e$, то $(x \cdot y) \cdot e = x \cdot (y \cdot e) = x \cdot e = e$). Множество $E$ — прообраз замкнутого множества $\{e\}$ при непрерывном отображении $x \mapsto x \cdot e$. Следовательно, это замкнутая подполугруппа полугруппы $S$. Из того, что $E \subset H$ и минимальности подполугруппы $H$ следует, что $E = H$. Значит, $e \in E$, т.е. $e \cdot e = e$. ■

Напомним, что непустое подмножество $I$ полугруппы $S$ называется *левым* (*правым*, *двусторонним*) *идеалом* в $S$, если $S \cdot I \subset I$ (соответственно $I \cdot S \subset I$, $S \cdot I \cup I \cdot S subset I$). Пример левого идеала — подмножество вида $S \cdot s$, где $s \in S$, так как $(x \cdot s) \cdot (y \cdot s) = (x \cdot s \cdot y) \cdot s$, однако не все левые идеалы имеют такой вид. Отметим, что все идеалы полугруппы $S$ являются её подполугруппами.

Всюду ниже когда речь идёт о минимальности идеалов имеется в виду минимальность по включению.

**Теорема 2.2.** *Если $S$ — непустая компактная хаусдорфова правотопологическая полугруппа $S$, то любой левый идеал $L$ в $S$ содержит минимальный (по включению) левый идеал и любой минимальный левый идеал замкнут.*

**Доказательство.** Пусть $L$ — левый идеал в $S$, т.е. $S \cdot L \subset L$. Тогда $S \cdot s \subset L$ для каждого $s \in L$. Полугруппа $S$ компактна и хаусдорфова, и она правотопологическая, т.е. все правые сдвиги $x \mapsto x \cdot s$ непрерывны. Значит, любой левый идеал вида $S \cdot s$ замкнут.

Итак, любой левый идеал $L$ содержит замкнутый левый идеал. Рассмотрим множество $\mathscr{L}$ замкнутых левых идеалов, содержащихся в $L$, упорядоченное обратно включению. Дословное повторение рассуждений из доказательства предыдущей теоремы доказывает, что пересечение $\bigcap \mathscr{C}$ элементов любого линейно упорядоченного подмножества $\mathscr{C}$ множества $\mathscr{L}$ непусто. Поскольку пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто и пересечение любого семейства левых идеалов является левым идеалом (проверьте!), множество $\bigcap \mathscr{C}$ является замкнутым левым идеалом, и оно содержится в $L$. Значит, $\bigcap \mathscr{C} \in \mathscr{L}$, так что это верхняя грань множества $\mathscr{C}$. Применима лемма Цорна. Пусть $K$ — $\leqslant$-максимальный элемент семейства $\mathscr{L}$, т.е. минимальный по включению замкнутый левый идеал $K$ среди всех замкнутых левых идеалов, содержащихся в $L$. Он минимален и среди всех левых идеалов: если $K' \subset K$ — другой левый идеал, то для всех $s \in K'$ имеем $S \cdot s \subset K' \subset K$ и $S \cdot s$ — замкнутый левый идеал, причём $S \cdot s \subset L$. В силу минимальности $K$ имеем $S \cdot s = K$, откуда $K' = K$. ■

## 2.5. Теорема Хиндмана

**Определение 2.1.** Пусть $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность элементов полугруппы $S$. Положим

$$FP\big((a_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) = \{a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} : k \in \mathbb{N},\ n_1 < \cdots < n_k\}.$$

Множество $A \subset S$ называется *FP-множеством*, если существует последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов $A$, для которой $FP\big((a_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) \subset A$.

Если полугруппа $S$ коммутативна и операция обозначается $+$, то вместо FP пишут FS.

**Лемма 2.1.** *Если свободный ультрафильтр $p$ на полугруппе $S$ является идемпотентом в $\beta S$, то любой элемент $A \in p$ является FP-множеством.*

**Доказательство.** Положим $A_0 = A$. Напомним, что $\overline{A}_0$ — окрестность точки $p$ в $\beta S$. Поскольку $p \cdot p = p$ и $p \in \overline{A}_0$, из непрерывности умножения по первому агументу вытекает существование окрестности $U$ ультрафильтра $p$, для которой $U \cdot p \subset \overline{A}_0$. Всякая окрестность содержит окрестность вида $\overline{P}$ для $P \in p$, причём $P \cap A_0 \in p$. Значит, существует элемент $B \in p$ такой, что $B \subset A_0$ и $\overline{B} \cdot p \subset \overline{A}_0$. Выберем любой $a_1 \in B$. Имеем $a_1 \cdot p \in \overline{A}_0$ и $a_1 \in S$. Из непрерывности умножения по второму аргументу при условии, что (фиксированный) первый аргумент принадлежит $S$, вытекает существование элемента $A_1 \in p$ такого, что $a_1 \cdot \overline{A}_1 \subset \overline{A}_0$, $A_1 \subset A_0$ и $a_1 \notin A_1$, т.е.

$$a_1 \cdot A_1 \subset A_0, \qquad A_1 \subset A_0, \qquad a_1 \in A_0 \setminus A_1.$$

Продолжая в том же духе, получим множества $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ и $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ такие, что

$$A_n \in p, \quad a_n \cdot A_n \subset A_{n-1}, \quad A_n \subset A_{n-1}, \quad a_n \in A_{n-1} \setminus A_n \qquad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $n_1 < \dots < n_k$. Заметим, что $a_m \cdot a_n \in A_{m-1}$ для $m < n$, поскольку $a_n \in A_{n-1} \subset A_m$. Покажем, что $a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \in A_{n_1 - 1}$. Для $k = 1$ это очевидно. Пусть $k > 1$. Предположим, что для меньших $k$ утверждение верно. Тогда $a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \in A_{n_2 - 1}$. Поскольку $n_2 > n_1$, имеем $A_{n_2 - 1} \subset A_{n_1}$, откуда $a_{n_1} \cdot (a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_k}) \in A_{n_1 - 1}$. ∎

**Теорема 2.3** (Н. Хиндман)**.** *Если бесконечная полугруппа $S$ либо не имеет идемпотентов, либо допускает левые сокращения (т.е. для любых $a, x, y \in S$ равенство $a \cdot x = a \cdot y$ выполнено, если и только если $x = y$ ), то всякое конечное разбиение полугруппы $S$ содержит элемент, являющийся FP-множеством.*

**Доказательство.** В силу леммы достаточно показать, что на $S$ есть свободный ультрафильтр, который является идемпотентом в $\beta S$. Если $S$ не содержит идемпотентов, то идемпотент, который обязан существовать в компактной правотопологической полугруппе $\beta S$ в силу теоремы Эллиса–Нумакуры, автоматически свободен. Если $S$ допускает левые сокращения, то $\beta S \setminus S$ — подполугруппа в $\beta S$. Действительно, для неглавных ультрафильтров $p, q \in \beta S$ базу произведения $p \cdot q$ составляют множества вида $\bigcup\{x \cdot Q_x : x \in P\}$, где $P \in p$ и $Q_x \in q$. Если $q$ неглавный, то все множества $Q_x$ бесконечны, и если $S$ допускает левые сокращения, то все $x \cdot Q_x$ тоже бесконечны. Значит, все элементы ультрафильтра $p \cdot q$ бесконечны, т.е. он неглавный.

Подполугруппа $\beta S \setminus S$ замкнута, так как $S$ открыто в $\beta S$. Следовательно, она компактна, и по теореме Эллиса–Нумакуры в ней есть идемпотент. ∎

**Следствие 2.1** (теорема Шура)**.** *Для любого $m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c \colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, m\}$ уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.*

# Лекция 3
# Топологические группы.
# Существование нетривиальных групповых топологий.
# Теорема Арнаутова о топологиях на кольцах

## 3.1. Топологические группы

Напомним, что *группа $G$* — это множество вместе с заданными на нём ассоциативной бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$, унарной операцией ${}^{-1} \colon G \to G$ и 0-арной операцией 1. При этом должны выполняться условия $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$ и $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$ для всех $g \in G$.

**Определение 3.1.** Группа $G$ с топологией $\mathscr{T}$ называется *топологической группой*, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента ${}^{-1} \colon G \to G$

непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на $G$ и топологии произведения на $G \times G$ (её базу составляют все множества вида $U \times V$, где $U, V \in \mathscr{T}$). При этом топология $\mathscr{T}$ называется *групповой* топологией или *топологией, согласованной с групповыми операциями*.

*Примеры*

1. Дискретная топология на любой группе является групповой.
2. Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топологической группой.
3. Любая тихоновская степень (см. лекцию 4) прямой с покоодинатными умножением и взятием обратного является топологической группой, так что любое тихоновское пространство является подпространством топологической группы.
4. На пространстве $\mathbf{P}$ иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относительно которой $\mathbf{P}$ является топологической группой: $\mathbf{P}$ гомеоморфно тихоновскому произведению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ счётного числа экземпляров дискретной группы $\mathbb{R}$. Операции покоординатного сложения и перехода к обратному непрерывны относительно топологии тихоновского произведения.
5. Канторов дисконтинуум $C$ гомеоморфен счётной тихоновской степени дискретной группы $\mathbb{R}_2 = \{0, 1\}$.

## 3.2. Специфические свойства топологических групп

**1.** Любая топологическая группа $G$ является однородным топологическим пространством, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f\colon G \to G$ такой, что $f(g) = h$. Таким образом, топология любой топологической группы полностью определяется окрестностями единицы в этой группе.

**2.** Если топологическая группа удовлетворяет акиоме отделимости $T_0$ (каковы бы ни были две различные точки, у одной из них есть окрестность, не содержащая другую), то она хаусдорфова. Кроме того, всякая топологическая группа регулярна и даже вполне регулярна, т.е. гомеоморфна подпространству некоторого компактного топологического пространства. (Напомним, что мы договорились не включать требование замкнутости конечных множеств в определение регулярности.) Мы будем называть хаусдорфовы топологические группы просто *отделимыми*.
**3.** Всякая отделимая топологическая группа, в которой единица имеет счётную базу окрестностей, метризуема, т.е. её топология порождается некоторой метрикой (базу составляют всевозможные открытые шары).

**4.** Во всякой $\sigma$-компактной (т.е. являющейся объединением счётного числа компактов) топологической группе любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств не более чем счётно.
**5.** Группы Ли:

**Определение 3.2.** *Группа Ли* — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

Существует компактное триангулируемое многообразие размерности 10 (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^{10}$, и который допускает триангуляцию), которое не гомеоморфно никакому гладкому многообразию.

Всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пространству, допускает структуру группы Ли, и притом единственную. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и чтобы некоторая окрестность единицы не содержала нетривиальных подгрупп.

## 3.3. Проблема топологизируемости групп

Недискретные отделимые групповые топологии существуют на на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются *топологизируемыми*. Вопрос о существовании нетопологизируемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что *всякая бесконечная группа топологизируема*. Проблема Маркова оставалась нерешённой до 1980 г., когда были одновременно построены два принципиально разных примера нетопологизируемых групп, счётный и несчётный.

*Счётная нетопологизируемая группа А.Ю. Ольшанского*

Это группа $G$ с единицей 1, для которой существуют число $N \in \mathbb{N}$ и конечное множество $Z = \{1, z_1, \dots, z_k\} \subset G$ с тем свойством, что всякий элемент $g \in G \setminus \{1\}$ удовлетворяет условию $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$ для некоторого $n_g < N$.

Таким образом, каждый элемент $g \neq 1$ является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leqslant N$ и $j \leqslant k$.

Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на $G$, потому что оно является прообразом замкнутого множества $\{z_j\}$ при отображении $f\colon x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения.

Вывод: $G \setminus \{1\}$ — объединение конечного числа множеств, замкнутых в любой отделимой групповой топологии. Следовательно, множество $\{1\}$ открыто в любой отделимой групповой топологии, а значит (в силу однородности любой группы) для всякого $g \in G$ одноточечное множество $\{g\}$ открыто в любой отделимой групповой топологии. Таким образом, любая отделимая групповая топология на $G$ дискретна.

*Несчётная нетопологизируемая группа С. Шелаха*

Шелах построил свою группу в предположении справедливости континуум-гипотезы, которая состоит в несуществовании несчётных множеств мощности строго меньше континуума (это мощность множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел или, что то же самое, мощность множества $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$). Континуум-гипотеза недоказуема и неопровержима в рамках системы аксиом ZFC теории множеств, лежащей в основе всей современной математики; другими словами, из аксиом ZFC нельзя вывести ни саму континуум-гипотезу, ни её отрицание. Поскольку она не противоречит аксиомам ZFC, предположение о её справедливости можно при необходимости использовать в качестве дополнительного условия в формулировках теорем.

Это группа $G$ с тем замечательным свойством, что

$$S^{10000} = G \text{ для любого несчётного } S \subset G.$$

При этом $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_1} M_\alpha$, где все $M_\alpha$ — счётные подгруппы $G$ со свойством, которое называется *малнормальностью* или *антинормальностью*:

$$g^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g \cap M_\alpha = \{1\} \text{ для любого } g \in G \setminus M_\alpha,$$

причём

$$M_\alpha \subset M_\beta \text{ для } \alpha < \beta.$$

Здесь $(\omega_1, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество наименьшей несчётной мощности с тем свойством, что для всякого $\alpha \in \omega_1$ отрезок $[0, \alpha] = \{\beta \in \omega_1 : \beta \leqslant \alpha\}$ не более чем счётен (через 0 мы обозначаем наименьший элемент множества $\omega_1$). Это множество будет подробнее обсуждаться в лекциях 13–14.

Предположим, что $U$ — окрестность единицы в некоторой недискретной групповой топологии на группе $G$.

Если окрестность $U$ счётна, то она содержится в некоторой подгруппе $M_\alpha$. Действительно, пусть $U = \{u_1, u_2, \dots\}$, и пусть $u_i \in M_{\alpha_i}$ для $i \in \mathbb{N}$. Поскольку все отрезки $[0, \alpha_i]$ счётны, объединение $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[0,\alpha_i]$ тоже счётно, а значит, не совпадает с $\omega_1$. Пусть $\alpha^* = \min\{\alpha \in \omega_1 : \alpha^* \geqslant \alpha_i$ для всех $i \in \mathbb{N}\}$. Тогда $M_{\alpha_i} \subset M_{\alpha^*}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, так что $U \subset M_{\alpha^*}$. Следовательно, для любого $g \in G \setminus M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ является пересечением двух окрестностей единицы, а значит, и само является окрестностью единицы. Получается, что топология дискретна, вопреки предположению. Таким образом, в недискретной групповой топологии на $G$ счётные окрестности единицы не могут существовать.

В силу непрерывности умножения какова бы ни была окрестность единицы $U$, найдётся окрестность единицы $V$, для которой $V^{10000} \subset U$, потому что $1^{10000} = 1$ и операция возведения в 10000-ю степень непрерывна (так как умножение непрерывно). Мы только что показали, что окрестность $V$ должна быть несчётной; значит, $U = G$. Таким образом, всякая недискретная групповая топология на $G$ неотделима.

*Уравнением в группе* $G$ называется любое выражение вида

$$g_1 x^{k_1} g_2 x^{k_2} \dots g_n x^{k_n} g_{n+1} = 1, \tag{$*$}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$ и $k_i \in \mathbb{R}$ для $i \leqslant n+1$. Элемент $g \in G$ называется *решением* уравнения $(*)$, если при подстановке $g$ вместо $x$ получается истинное равенство.

Множество решений уравнения есть прообраз множества $\{1\}$ при отображении

$$x \mapsto g_1 x^{k_1} g_2 x^{k_2} \dots g_n x^{k_n} g_{n+1},$$

которое непрерывно в любой групповой топологии на $G$ в силу непрерывности умножения и взятия обратного элемента. Следовательно, множество решений любого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на $G$.

Скажем, что точка $g$ в группе $G$ *алгебраически изолирована*, если $G \setminus \{g\}$ является объединением конечного числа множеств решений уравнений. Если $G$ содержит алгебраически изолированную точку, то она нетопологизируема (но не наоборот).

Множество $A \neq \varnothing$ вместе с любым набором конечноместных операций $f_\iota \colon A^{n_\iota} \to A$, $\iota \in I$, называется *универсальной алгеброй*. Топология на $A$ *согласована* (с операциями), если все $f_\iota$ непрерывны относительно этой топологии.

*Многочлены* на $A$ определяются по индукции. Выражения

$$x, \quad f_\iota(x, a_2, \dots, a_{n_\iota}), \quad f_\iota(a_1, x, \dots, a_{n_\iota}), \quad \dots, \quad f_\iota(a_1, a_2, \dots, x), \qquad \text{где } a_i \in A,$$

— многочлены. Остальные многочлены получаются из этих многократными подстановками произвольных многочленов вместо символов $x$ и $a_i$. *Уравнение в алгебре* $A$ — выражение вида $p(x) = a$, где $p$ — многочлен и $a \in A$. *Множество решений* — множество всех элементов алгебры, про подстановке которых в уравнение вместо $x$ получается верное равенство. Оно замкнуто в любой согласованной топологии на $A$, в которой все одноточечные множества замкнуты (такие топологии называются $T_1$-топологиями).

**Определение 3.3.** Точка $a \in A$ *алгебраически изолирована*, если $A \setminus \{a\}$ является объединением конечного числа множеств решений уравнений.

Ясно, что если $A$ — универсальная алгебра и все точки $a \in A$ алгебраически изолированы, то на алгебре $A$ не существует согласованной недискретной $T_1$-топологии.

## 3.4. Теорема Арнаутова об алгебраически изолированных точках в кольцах

*Кольцо* — это множество $R$ с операцией сложения, относительно которой $R$ является коммутативной группой, и ассоциативной операцией умножения (на самом деле операций четыре — ещё переход к противоположному элементу и 0).

Следующая теорема легко выводится из теоремы Хиндмана, однако её оригинальное доказательство было трудным и длинным.

**Теорема 3.1** (В. И. Арнаутов)**.** *Никакое бесконечное кольцо $R$ не имеет алгебраически изолированных точек.*

**Доказательство.** Очевидно, точка $x \in R$ алгебраически изолирована в кольце $R$ тогда и только тогда, когда 0 (и все прочие точки) алгебраически изолированы. Поэтому будем доказывать теорему для $x = 0$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $R$ — кольцо, $f(x) \in R[x]$, $\deg f = n > 0$ и $a \in R$. Тогда существует многочлен $g(x) \in R[x]$ такой, что $\deg g < n$ и*

$$f(x+a) = f(x) + f(a) + g_a(x)$$

*для всех $x \in R$.*

**Доказательство.** Будем доказывать лемму индукцией по $n$. Для $n = 1$ утверждение верно. Пусть $n > 1$ и $f(x) = a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Положим $\tilde{f}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n_1} x^{n-2} + \ldots + a_1$. Тогда $f(x) = x\tilde{f}(x) + a_0$ и $f(x+a) = (x+a)\tilde{f}(x+a) + a_0$. По индуктивному предположению $\tilde{f}(x+a) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(a) + \tilde{g}_a(x)$, где $\tilde{g}_a$ — многочлен степени $< n-1$. Следовательно,

$$f(x+a) = x\tilde{f}(x) + a\tilde{f}(a) + a\tilde{f}(x) + x\tilde{f}(a) + (x+a)\tilde{g}_a(x) + a_0 = f(x) + f(a) + x\tilde{f}(a) + (x+a)\tilde{g}_a(x) - a_0.$$

Осталось положить $g_a(x) = x\tilde{f}(a) + (x+a)\tilde{g}_a(x) - a_0$. ■

Для $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset R$ пусть $FS(A) = \{a_{n_1} + \ldots + a_{n_m} : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_m \leqslant k$.

**Лемма 3.2.** *Пусть $f \in R[x]$, $\deg f = n \geqslant 0$, $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset R$ и $f(b) = 0$ для любого $b \in FS(A)$. Тогда $f(0) = 0$.*

**Доказательство.** Применим индукцию по $n$. Если $n = 0$, то $f = \mathrm{const}$ и из того, что $f(a_1) = 0$, вытекает, что $f(0) = 0$.

Предположим, что $n > 0$ и для меньших $n$ утверждение доказано. Положим $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ясно, что $FS(A') \subset FS(A)$ и $FS(A') + a_{n+1} \subset FS(A)$. Рассмотрим многочлен $g_{a_{n+1}}$ из леммы 3.1. Для всякого $b \in FS(A')$ имеем $b + a_{n+1} \in FS(A)$ и

$$f(b + a_{n+1}) = f(b) + f(a_{n+1}) + g_{a_{n+1}}(b). \qquad (**)$$

По условию $f(b + a_{n+1}) = f(b) = f(a_{n+1}) = 0$; значит, $g_{a_{n+1}}(b) = 0$ для всех $b \in FS(A')$. По индуктивному предположению $g_{a_{n+1}}(0) = 0$. Подставляя в формулу $(**)$ 0 вместо $b$, получаем $f(0) = 0$. ■

**Окончание доказательства теоремы.** Предположим, что точка 0 алгебраически изолирована и многочлены $f_1, \ldots, f_m \in R[x]$ таковы, что

$$R \setminus \{0\} = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad \text{где } A_i = \{a \in R : f_i(a) = 0\}.$$

По теореме Хиндмана, применённой к аддитивной группе кольца $R$, найдется $i \leqslant m$, для которого существует бесконечная последовательность $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных элементов $R$ такая, что $FS((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset A_i \cup \{0\}$. Пусть $\deg f_i = k$. Если $a_1 \neq 0$, положим $a'_1 = a_1$. Если $a_1 = 0$, положим $a'_1 = a_2$. Предположим, что $a'_1, \ldots, a'_r$ определены. Выберем $a_s$ с наименьшим номером $s > r$, для которого $-a_s \notin FS(\{a'_1, \ldots, a'_r\})$ и положим $a'_{r+1} = a_s$. В результате мы получим множество $A = \{a'_1, \ldots, a'_{k+1}\}$ такое, что $FS(A) \subset A_i$, т.е. $f_i(b) = 0$ для всех $b \in FS(A)$. По лемме 3.2 имеем $f_i(0) = 0$. Противоречие. ■

# Лекция 4
# Теоремы ван дер Вардена, Рамсея и Тихонова. Конечные версии комбинаторных теорем

## 4.1. Теорема ван дер Вардена

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим декартову степень $S = (\beta\mathbb{N})^m$. Элементы $S$ — векторы $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ с координатами-ультрафильтрами.

Будем рассматривать $\mathbb{N}$ как полугруппу с операцией сложения. Тогда $S$ — компактная хаусдорфова правотопологическая полугруппа относительно покоординатного сложения и топологии произведения, базу которой составляют множества вида $U_1 \times \ldots \times U_m$, где все $U_i$ открыты в $\beta\mathbb{N}$. Непрерывность сложения по первому аргументу и хаусдорфовость легко проверить непосредственно. Компактность тоже нетрудно доказать, и она вытекает из теоремы Тихонова о компактности произведений (она обсуждается дальше в этой лекции).

Положим
$$E^* = \{(a, a+d, \dots, a+(m-1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$
$$I^* = \{(a, a+d, \dots, a+(m-1)d) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}\},$$
$$E = \overline{E^*} \qquad \text{и} \qquad I = \overline{I^*}.$$

**Лемма 4.1.** *Множество $E$ — подполугруппа в $S$ и $I$ — двусторонний идеал в $E$.*

**Доказательство.** Покажем, что $E$ — подполугруппа.

Пусть $\vec{p}, \vec{q} \in E$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$. Нам надо показать, что любая элемент $\vec{p}+\vec{q}$ принадлежит множеству $E$, т.е. любая его окрестность в $S$ пересекает $E^*$. Возьмём любую окрестность элемента $\vec{p}+\vec{q}$ в $S$. Она содержит окрестность вида $U_1 \times \dots \times U_m$. Поскольку сложение в $\beta\mathbb{N}$ непрерывно по первому аргументу, существует окрестность $V_1 \times \dots \times V_m$ элемента $\vec{p}$, для которой $V_1 \times \dots \times V_m + \vec{q} \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

Пользуясь тем, что элемент $\vec{p}$ принадлежит замыканию множества $E^*$, т.е. любая его окрестность пересекает $E^*$, выберем $a \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(a, a+d, \dots, a+(m-1)d) = \vec{x} \in V_1 \times \dots \times V_m$. Из того, что $\vec{x}+\vec{q} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $a, a+d, \dots, a+(m-1)d \in \mathbb{N}$, вытекает существование окрестности $W_1 \times \dots \times W_n$ элемента $\vec{q}$, для которой $\vec{x}+W_1 \times \dots \times W_m \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

Пользуясь тем, что $\vec{q}$ тоже принадлежит замыканию множества $E^*$, выберем $b \in \mathbb{N}$ и $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(b, b+e, \dots, b+(m-1)e) = \vec{y} \in W_1 \times \dots \times W_m$. Имеем $\vec{x}+\vec{y} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $\vec{x}+\vec{y} = (a+b, a+b+d+e, \dots, a+b+(m-1)(d+e) \in E^*$. Поскольку окрестность $U_1 \times \dots \times U_m$ была выбрана произвольно, заключаем, что $\vec{x}+\vec{y} \in E^*$ и $\vec{p}+\vec{q} \in E$.

Мы показали, что $E$ — подполугруппа в $S$. То, что $I$ является левым идеалом, доказывается точно так же:

Пусть $\vec{p} \in E$, $\vec{q} \in I$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$, и пусть $U_1 \times \dots \times U_m$ — окрестность элемента $\vec{p}+\vec{q}$ в $S$. Надо показать, что она пересекает $I^*$. Поскольку сложение в $\beta\mathbb{N}$ непрерывно по первому аргументу, существует окрестность $V_1 \times \dots \times V_m$ элемента $\vec{p}$, для которой $V_1 \times \dots \times V_m + \vec{q} \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

Выберем $a \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, что $(a, a+d, \dots, a+(m-1)d) = \vec{x} \in V_1 \times \dots \times V_m$. Из того, что $\vec{x}+\vec{q} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $a, a+d, \dots, a+(m-1)d \in \mathbb{N}$, вытекает существование окрестности $W_1 \times \dots \times W_n$ элемента $\vec{q}$, для которой $\vec{x}+W_1 \times \dots \times W_m \subset U_1 \times \dots \times U_m$.

Теперь выберем числа $b, e \in \mathbb{N}$ так, что $(b, b+e, \dots, b+(m-1)e) = \vec{y} \in W_1 \times \dots \times W_m$ (они существуют, так как $\vec{q}$ принадлежит замыканию множества $I^*$). Имеем $\vec{x}+\vec{y} \in U_1 \times \dots \times U_m$ и $\vec{x}+\vec{y} = (a+b, a+b+d+e, \dots, a+b+(m-1)(d+e)) \in I^*$, потому что $d+e > 0$. Поскольку окрестность $U_1 \times \dots \times U_m$ была выбрана произвольно, заключаем, что $\vec{x}+\vec{y} \in I^*$ и $\vec{p}+\vec{q} \in I$.

Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что $I$ является также и правым идеалом. ■

**Лемма 4.2.** *Если $p \in \beta\mathbb{N}$, то $\vec{p} = (p, \ldots, p) \in E$.*

**Доказательство.** Любая окрестность точки $\vec{p}$ в $S$ содержит окрестность вида $U_1 \times \cdots \times U_m$. Пересечение $U = \bigcap\limits_{i \leqslant m} U_i$ является окрестностью точки $p$ в $\beta\mathbb{N}$. Для $a \in \mathbb{N} \cap U$ имеем $\underbrace{(a, \ldots, a)}_{m \text{ раз}} \in (U_1 \times \cdots \times U_m) \cap E^*$. ∎

**Лемма 4.3.** *Если $L$ — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$, $p \in L$ и $\vec{p} = (p, \ldots, p)$, то $\vec{p} \in I$.*

**Доказательство.** В силу леммы 4.1 $E$ является замкнутой подполугруппой компактной полугруппы $S$. По второй теореме о компактных полугруппах в левом идеале $E + \vec{p}$ этой полугруппы содержится минимальный левый идеал $F \subset E + \vec{p}$, причём он замкнут. Значит, по первой теореме о компактных полугруппах существует идемпотент $\vec{q} \in F$. Поскольку $\vec{q} \in E + \vec{p}$, имеем $\vec{q} = \vec{r} + \vec{p}$ для некоторого $\vec{r} \in E$.

Пусть $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ и $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_m)$. Тогда $q_i = r_i + p \in \beta\mathbb{N} + p$ для $i \leqslant m$. Из того, что $L$ — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$ и $p \in L$, вытекает, что $\beta\mathbb{N} + p = L$.

Имеем $q_i \in L$ и $\beta\mathbb{N} + q_i \subset L$. Поскольку левый идеал $L$ минимален, имеем также $\beta\mathbb{N} + q_i = L$, ведь $\beta\mathbb{N} + q_i$ — это тоже левый идеал. Значит, существует $t_i \in \beta\mathbb{N}$, для которого $t_i + q_i = p$.

Из равенств $t_i + q_i + q_i = t_i + q_i = p$ для $i \leqslant m$ следуют равенства $p + q_i = p$, $i \leqslant m$. Значит, $\vec{p} + \vec{q} = \vec{p}$.

По лемме 4.2 $\vec{p} \in E$. Из того, что $\vec{q} \in F$ и $F$ — левый идеал в $E$, следует, что $\vec{p} = \vec{p} + \vec{q} \in F$.

Покажем, что $F \subset I$. Поскольку $F$ — левый идеал в $E$, имеем $I + F \subset F$, а поскольку $I$ — правый (и даже двусторонний) идеал в $E$, имеем $I + F \subset I$, откуда $I + F \subset F \cap I \neq \varnothing$.

Из того, что $F$ и $I$ — левые идеалы в $E$, следует, что $F \cap I$ — левый идеал в $E$, а из минимальности левого идеала $F$ в $E$ следует, что $F = F \cap I \subset I$. ∎

**Теорема 4.1** (Б. Л. ван дер Варден). *Если $L$ — минимальный левый идеал в $\beta\mathbb{N}$ и $p \in L$, то любое множество $A \in p$ содержит произвольно длинные арифметические прогрессии. Более подробно, для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют $a, d \in \mathbb{N}$ такие, что $a, a + d, \ldots, a + (m-1)d \in A$.*

**Доказательство.** Рассмотрим окрестность $\overline{A} \times \cdots \times \overline{A}$ элемента $\vec{p} = (p, \ldots, p)$ в $(\beta\mathbb{N})^m$.

По лемме 4.3 существует $\vec{x} \in I^* \cap (\overline{A} \times \cdots \times \overline{A})$. По определению множества $I^*$ $\vec{x} = (a, a + d, \ldots, a + (m-1)d)$ для некоторых $a, d \in \mathbb{N}$. Как мы знаем, $\overline{A} \cap \mathbb{N} = A$. Значит, арифметическая прогрессия $a, a + d, \ldots, a + (m-1)d$ содержится в $A$. ∎

## 4.2. Теорема Рамсея

Для произвольного множества $X$ и числа $k \in \mathbb{N}$ через $[X]^k$ обозначается множество всех $k$-элементных подмножеств $X$.

**Определение 4.1.** Пусть $c\colon [X]^k \to \{1, \ldots, m\}$ — любая раскраска. Множество $A \subset X$ называется *однородным* (относительно этой раскраски), если $c|_{[A]^k} \equiv \mathrm{const}$.

**Теорема 4.2** (Ф. П. Рамсей). *Для любого счётного множества $X$, любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon [X]^k \to \{1, \ldots, m\}$ существует бесконечное однородное множество $A \subset X$.*

**Доказательство.** Индукция по $k$. Для $k = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что $n \geqslant 1$ оно верно для $k \leqslant n$. Пусть $k = n + 1$. Выберем $x_0 \in X$ и рассмотрим раскраску $c_0\colon [X \setminus \{x_0\}]^n \to \{1, \ldots, m\}$, определённую правилом $c_0(\{x_1, \ldots, x_n\}) = c(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$.

Поскольку теорема верна для $k = n$, существуют бесконечное множество $A_0 \subset X$ и число $i_0 \leqslant m$, для которых $F \in [A_0]^n \Rightarrow c(\{x_0\} \cup F) = i_0$. Выберем $x_1 \in A_0$.

Повторив то же рассуждение для $A_0$ вместо $X$ и $x_1$ вместо $x_0$, найдём бесконечное множество $A_1 \subset A_0$, однородное относительно раскраски $c_1\colon [A_0 \setminus \{x_1\}]^n \to \{1, \ldots, m\}$, определённой правилом $c_1(\{y_1, \ldots, y_n\}) = c(\{x_1, y_1, \ldots, y_n\})$.

Продолжая в том же духе, получим бесконечные множества $A_0 \supset A_1 \supset \dots$, точки $x_i \in A_{i-1}$ и числа $i_0, i_1, \dots \leqslant m$ такие, что для каждого $F \in [A_j]^n$ имеем $c(\{x_j\} \cup F) = i_j$. Найдём число $i \leqslant m$ и бесконечное множество $J \subset \mathbb{N}$ такие, что $i_j = i$ для всех $j \in J$. Ясно, что множество $A = \{x_j : j \in J\}$ бесконечно и $c|_{[A]^k} \equiv i$. ■

## 4.3. Топологическое произведение

Декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f \colon A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A\};$$

элементы $f \colon A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$; для каждого $\alpha \in A$ точка $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ называется *$\alpha$-й координатой* элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

*Каноническая проекция* произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель $X_\beta$, где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta \colon \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\bigl((x_\alpha)_{\alpha \in A}\bigr) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

*Диагональное произведение*, или *диагональ*, *семейства отображений* $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — это отображение $f = \mathop{\Delta}\limits_{\alpha \in A} f_\alpha \colon X \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, определённое правилом $f(x) = \bigl(f_\alpha(x)\bigr)_{\alpha \in A}$.

В случае, когда множества $X_\alpha$ снабжены топологией, на произведении $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ тоже возникает топология. Её определение согласовано с определением произведения в теории категорий.

*Категория* определяется аксиоматически как класс *объектов*, связанных *морфизмами* («стрелками»), удовлетворяющими естественным условиям (существование и ассоциативность композиции морфизмов и существование тождественных морфизмов). Категории придумали, чтобы рассматривать конструкции, отношения и отображения, сохраняющие структуру математических объектов, независимо от того, что́ это за объекты и какова их структура. Обычно (но не всегда) роль объектов играют множества, а роль морфизмов — отображения множеств. Например, в категории множеств объекты — это произвольные множества, а морфизмы — любые отображения множеств, в категории топологических пространств объекты — топологические пространства, а морфизмы — непрерывные отображения, а в категории групп объекты — группы, а морфизмы — групповые гомоморфизмы.

В теории категорий *произведение объектов* $X_\alpha$, $\alpha \in A$, определяется как объект $X$ вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ (называемых *каноническими проекциями*) с тем свойством, что для любого объекта $Y$ этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f \colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha \in A} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Топология произведения топологических пространств вводится согласно этому категорному определению. Она называется *топологией произведения*, или *тихоновской топологией*, и определяется как наименьшая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Такая топология существует на произведении любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств; она порождена базой, состоящей из всех конечных пересечений множеств вида

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой фиксированный индекс, а $U_\beta$ — любое открытое множество в $X_\beta$. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются *топологическими*, или *тихоновскими, произведениями*.

**Предложение 4.1.** *Для любого семейства пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ все множества вида $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, где каждое $U_\alpha$ — открытое подмножество $X_\alpha$ и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\alpha$, образуют базу топологического произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

**Доказательство.** Из определения тихоновской топологии вытекает, что семейство всех множеств вида $\bigcap\limits_{i \leqslant k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ и каждое $U_{\alpha_i}$ открыто в $X_{\alpha_i}$, является базой топологического произведения $\prod X_\alpha$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно заметить, что для любых $\beta \in A$ и $U_\beta \subset X_\beta$

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\beta \in U_\beta\} = \prod U_\alpha, \quad \text{где } U_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha \neq \beta,$$

и что $\prod A_\alpha \cap \prod B_\alpha = \prod (A_\alpha \cap B_\alpha)$ для любых $A_\alpha, B_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$. ■

## 4.4. Теорема Тихонова о компактности произведений

**Теорема 4.3.** *Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все $X_\alpha$ компактны.*

**Доказательство.** Необходимость немедленно вытекает из непрерывности всех канонических проекций $\pi_\beta \colon \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$ и очевидного замечания, что образ компактного пространства при любом непрерывном отображении компактен.

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием компактности в терминах ультрафильтров. Пусть $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение семейства компактных пространств и $\mathscr{U}$ — любой ультрафильтр на множестве $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Нам нужно показать, что $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке. Для каждого $\alpha \in A$ положим

$$\mathscr{U}_\alpha = \beta\pi_\alpha(\mathscr{U}) = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathscr{U}\}.$$

Для каждого $\alpha \in A$ семейство $\mathscr{U}_\alpha$ является ультрафильтром на $X_\alpha$, и поскольку $X_\alpha$ компактно, $\mathscr{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ и покажем, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ сходится к точке $\mathbf{x}$, т.е. содержит любую окрестность этой точки в качестве элемента.

Пусть $U$ — любая окрестность точки $\mathbf{x}$ в $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$. По определению канонической окрестности найдётся конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ такое, что $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (и $V_{\alpha_i}$ — окрестность точки $x_{\alpha_i}$ для $i \leqslant n$).

Для каждого $i \leqslant n$ ультрафильтр $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ сходится к $x_{\alpha_i}$; поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$. Из того, что пересечение конечного числа элементов любого фильтра принадлежит этому фильтру, вытекает, что $\prod\limits_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcap\limits_{i \leqslant n} \pi_{\alpha_i}^{-1} V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}$, а из того, что вместе с каждым своим элементом всякий фильтр содержит все бóльшие множества — что $U \in \mathscr{U}$.

Мы показали, что любая окрестность точки $\mathbf{x}$ принадлежит ультрафильтру $\mathscr{U}$, а это и означает, что $\mathscr{U}$ сходится к $\mathbf{x}$. ■

## 4.5. Теорема компактности для разбиений

**Определение 4.2.** Пусть $X$ — множество, $Y \subset X$ и $m$ — натуральное число. Семейство $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ называется *$m$-регулярным относительно* $Y$, если для всякого разбиения $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ множества $Y$ найдутся $k \leqslant m$ и $A \in \mathscr{A}$ такие, что $A \subset Y_k$.

**Теорема 4.4** (компактности для разбиений)**.** *Если семейство $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ $m$-регулярно относительно $X$ и любой его элемент конечен, то существует конечное множество $Y \subset X$ такое, что $\mathscr{A}$ $m$-регулярно относительно $Y$.*

**Доказательство.** Пусть $M = \{1, \ldots, m\}$ и $M_x$ — копия множества $M$ для каждого $x \in X$. Рассмотрим тихоновское произведение

$$M^X = \prod_{x \in X} M_x$$

дискретных конечных пространств $M_x$. Предположим, что теорема неверна. Тогда для всякого конечного множества $Y \subset X$ существует разбиение $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ множества $Y$, для которого нарушается условие $m$-регулярности. Положим $h(x) = i$, если $x \in Y_i$. Продолжим $h$ до отображения $f_Y : X \to M$ и зафиксируем такое отображение $f_Y$ для каждого $Y$. Для всякого конечного множества $K \subset X$ положим

$$F_K = \{f_Y : K \subset Y,\ Y \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Ясно, что семейство $\mathscr{F} = \{F_K : K \text{ — конечное подмножество множества } X\}$ центрировано, поскольку для любых конечных множеств $K, K' \subset X$ найдётся конечное множество $Y \subset X$, которое содержит оба эти множества. Расширим $\mathscr{F}$ до ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $M^X$. По теореме Тихонова $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке $f \in M^X$ . Рассмотрим разбиение

$$X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_m, \qquad \text{где } X_i = f^{-1}(\{i\}).$$

По условию теоремы существуют число $k \leqslant m$ и множество $A \in \mathscr{A}$ такие, что $A \subset X_k$, т.е. $f(x) = k$ для всех $x \in A$. Поскольку $\mathscr{U} \to f$, любая окрестность точки $f$ принадлежит ультрафильтру $\mathscr{U}$. В частности, ему принадлежит множество $U$ всех отображений $g \in M^X$, для которых $g(x) = k$ при всех $x \in A$. Это множество действительно является окрестностью $f$: оно содержит $f$ и открыто по предложению 4.1 (множество $\{k\}$ открыто в $M$, так как $M$ дискретно). Кроме того, поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, всякая такая окрестность пересекает каждое множество вида $F_K$, так как любые элементы любого (ультра)фильтра пересекаются. Значит, для конечного множества $A \subset X$ существует конечное множество $Y \supset A$, для которого $f_Y \in F_A \cap U$, т.е. $f_Y(x) = f(x)$ $\forall x \in A$. По определению отображения $f_Y$ сужение $f_Y|_Y$ определяет разбиение $Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_m$ множества $Y$, для которого нарушается условие $m$-регулярности, причём $f_Y|_{Y_i} \equiv i$ для $i \leqslant m$. Однако $f_Y(x) = k$ для всех $x \in A$, откуда $A \subset Y_k$, что свидетельствует о выполнении условия регулярности для данного разбиения. Это противоречие доказывает теорему. ■

Из доказанной теоремы следует, что все доказанные выше комбинаторные теоремы имеют конечные версии. Например, в теореме Хиндмана роль множества $X$ играет полугруппа $S$, а роль $m$-регулярного (для всех $m$) семейства $\mathscr{A}$ — семейство всех $FP$-множеств; в теореме ван дер Вардена $X$ — это $\mathbb{N}$, а $\mathscr{A}$ — семейство всех множеств, содержащих сколь угодно длинные арифметические прогрессии; в теореме Рамсея применительно к раскраскам множества $[X]^k$ роль $X$ играет это множество, а роль семейства $\mathscr{A}$ — семейство всех множеств $[A]^k$ для бесконечных $A \subset X$. В качестве ещё одного примера сформулируем конечную версию теоремы Шура:

**Теорема 4.5** (конечная версия теоремы Шура)**.** *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует число $S(m) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geqslant S(m)$ и любой раскраски $c\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение в множестве $\{1, \ldots, n\}$, т.е. существуют $x, y, z \leqslant n$, удовлетворяющие условиям $x + y = z$ и $c(x) = c(y) = c(z)$.*

**Следствие 4.1.** *Для любого числа* $m \in \mathbb{N}$ *и любого простого* $p > S(m)$ *тождество* $x^m + y^m = z^m \pmod p$ *имеет нетривиальное решение.*

**Доказательство.** Пусть $\mathbb{F}_p^* = \{1, \ldots, p-1\}$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$, и пусть $g$ — её порождающий элемент. Для каждого $k \in \mathbb{F}_p^*$ существует единственное $t \leqslant p-1$, для которого $k \equiv g^t \pmod p$. Представим $t$ как $t = i + mj$, где $0 \leqslant i < m$, и рассмотрим раскраску

$$c\colon \mathbb{F}_p^* \to \{0, \ldots, m-1\}, \quad c(k) = i, \text{ если } k = g^{i+mj} \pmod p.$$

Из конечной версии теоремы Шура вытекает существование элементов $a, b, c \in \mathbb{F}_p^*$ таких, что $a + b = c$ и $c(a) = c(b) = c(c) = i$ для некоторого $i < m$, т.е.

$$a \equiv g^{i+mj_a} \pmod p, \quad b \equiv g^{i+mj_b} \pmod p, \quad c \equiv g^{i+mj_c} \pmod p,$$
$$g^{i+mj_a} + g^{i+mj_b} \equiv g^{i+mj_c} \pmod p.$$

Умножая это тождество на $g^{-i}$ в группе $\mathbb{F}_p^*$, получим требуемое решение $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$, $z = g^{j_c}$. ■

# Лекция 5
# Минимальные идеалы и идемпотенты. Большие множества в полугруппах

## 5.1. Идеал $K(S)$

Пусть $S$ — произвольная полугруппа.

Напомним, что левый идеал — это непустое множество $L \subset S$ с тем свойством, что $S \cdot x \subset L$ для любого $x \in L$ или, что равносильно, $s \cdot L \subset L$ для любого $s \in S$. Левый идеал минимален, если $S \cdot x = L$ для любого $x \in L$. Аналогично определяются правые и двусторонние идеалы.

**Определение 5.1.** Для произвольной полугруппы $S$

$$K(S) = \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\}.$$

*Замечание* 5.1. Если $K(S) \neq \varnothing$, то $K(S)$ — левый идеал: любой элемент $x \in K(S)$ содержится в некотором минимальном левом идеале $L \subset K(S)$, и $S \cdot x \subset L \subset K$.

**Теорема 5.1.** *Если $K(S) \neq \varnothing$, то $K$ — наименьший двусторонний идеал в полугруппе $S$.*

**Доказательство.** Мы уже знаем, что $K(S)$ — левый идеал. Покажем, что $K(S)$ — правый идеал. Надо проверить, что $K(S) \cdot s \subset K(S)$ для всякого $s \in S$.

Заметим, что если $L$ — минимальный левый идеал, то для каждого $s \in S$ множество $L \cdot s$ тоже является минимальным левым идеалом. Действительно, то, что это левый идеал, ясно. Докажем минимальность.

Пусть $L'$ — левый идеал, $L' \subset L \cdot s$. Если $x \in L$ и $x \cdot s \in L'$, то $S \cdot x \cdot s \subset L'$, так как $L'$ — левый идеал. С другой стороны, поскольку $S \cdot x = L$ (так как $L$ минимален), имеем $S \cdot x \cdot s = L \cdot s$. Значит, $L \cdot s \subset L'$.

Таким образом,

$$K(S) \cdot s = \bigcup \{L \cdot s : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} \subset K(S)$$

для всякого $s \in S$. Значит, $K(S)$ — правый идеал, а потому и двусторонний идеал.

Любой минимальный левый идеал $L$ содержится в любом двустороннем идеале $I$. Действительно, из очевидных включений $I \cdot L \subset L$ и $I \cdot L \subset I$ следует, что $I \cdot L \subset I \cap L$, откуда $L \cap I \neq \varnothing$. Пересечение $I \cap L$ — левый идеал, и из минимальности левого идеала $L$ вытекает, что $L = L \cap I$. Значит, $L \subset I$.

Вывод: $K(S)$ содержится в любом двустороннем идеале. ■

Положим

$$K'(S) = \bigcup \{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}.$$

Дословное повторение доказательства теоремы с заменой «левый» $\leftrightarrow$ «правый» приводит к заключению, что если $K'(S) \neq \varnothing$, то $K'(S)$ — тоже наименьший двусторонний идеал.

**Следствие 5.1.** *Если в полугруппе $S$ существуют и левые, и правые минимальные идеалы, то*

$$\bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} = \bigcup \{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}.$$

**Теорема 5.2.** *Пусть $S$ — полугруппа, $L$ — минимальный левый идеал в $S$, $e$ — идемпотент и $e \in L$. Тогда*

1) *$e \cdot S \cdot e$ — группа с единицей $e$ (относительно операции в $S$);*
2) *$R = e \cdot S$ — минимальный правый идеал в $S$ и $e \in R$.*

**Доказательство.** 1) Очевидно, что $G \subset L$, $e \in G$ и $G \cdot G \subset G$.

Для всякого $x \in G$ имеем $x = e \cdot s \cdot e$, откуда $e \cdot x = e \cdot e \cdot s \cdot e = x$, а значит, $x \cdot e = e \cdot s \cdot e \cdot e = x$. Таким образом, $e \cdot x = x \cdot e = x$.

Для всякого $x \in G$ существует левый обратный — элемент $y \in G$, для которого $y \cdot x = e$. Действительно, поскольку $x \in L$ и левый идеал $L$ минимален, имеем $L = S \cdot x$, а значит, $e = s \cdot x$ для некоторого $s \in S$. Пусть $y = e \cdot s \cdot e$. Тогда $y \in G$ и $y \cdot x = e \cdot s \cdot e \cdot x = e \cdot s \cdot x = e \cdot e = e$.

Элемент $y$ является также и правым обратным. Действительно, мы знаем, что существует $z \in G$, для которого $z \cdot y = e$. Имеем $x \cdot y = e \cdot x \cdot y = z \cdot y \cdot x \cdot y = z \cdot e \cdot y = z \cdot y = e$.

2) Множество $e \cdot S$ — правый идеал. Пусть $J \subset e \cdot S$ — другой правый идеал, и пусть $t \in J$. Имеем $t \in e \cdot S$ и $t \cdot e \in e \cdot S \cdot e = G$. Возьмём $y \in G$, для которого $t \cdot e \cdot y = e$. Имеем $e \in J$, потому что $J$ — правый идеал и $t \in J$. Значит, $R = e \cdot S \subset J$. Ясно, что $e = e \cdot e \in R$. ∎

Это рассуждение остаётся верным при замене «левый» $\leftrightarrow$ «правый». Значит, *идемпотент $e$ принадлежит некоторому минимальному левому идеалу тогда и только тогда, когда $e$ принадлежит некоторому минимальному правому идеалу.*

**Следствие 5.2.** *Если полугруппа $S$ имеет минимальный левый или правый идеал, содержащий идемпотент, то*

$$K(S) = \bigcup\{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } S\} = \\ = \bigcup\{R : R \text{ — минимальный правый идеал в } S\}.$$

**Доказательство.** В силу предыдущей теоремы полугруппа $S$ имеет минимальный правый идеал, и в силу предыдущего следствия $K(S) = \bigcup\{R : R$ — минимальный правый идеал в $S\}$. ∎

## 5.2. Естественный порядок на множестве идемпотентов

**Определение 5.2.** Через $E(S)$ обозначается множество всех идемпотентов полугруппы $S$. Для $e, f \in E(S)$ будем писать $e \leqslant f$, если $e \cdot f = f \cdot e = e$. Отношение $\leqslant$ называется *естественным порядком* на $E(S)$.

Это действительно порядок:

- рефлексивность очевидна;
- антисимметричность очевидна;
- проверим транзитивность: если $e \leqslant f$ (т.е. $e \cdot f = f \cdot e = e$) и $f \leqslant g$ (т.е. $f \cdot g = g \cdot f = f$), то $e \cdot g = e \cdot f \cdot g = e \cdot f = e$ и $g \cdot e = g \cdot f \cdot e = f \cdot e = e$, т.е. $e \leqslant g$.

*Пример.* Пусть $X$ — множество. Множество $\mathscr{P}(X)$ всех его подмножеств — полугруппа относительно операции $\cap$. Все её элементы — идемпотенты. Для $A, B \subset X$ имеем $A \leqslant B$ (относительно естественного порядка) тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

## 5.3. Теорема о минимальных идемпотентах

**Предложение 5.1.** *Пусть $S$ — компактная правотопологическая полугруппа и $e \in E(S)$. Тогда каждый минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$ содержит идемпотент $f \leqslant e$.*

**Доказательство.** Согласно второй теореме о компактных полугруппах левый идеал $L$ замкнут, а значит, является компактной правотопологическая полугруппой. По первой теореме о компактных полугруппах существует идемпотент $\varepsilon \in L$.

Поскольку $\varepsilon \in L \subset S \cdot e$, для некоторого $s \in S$ выполнено равенство $\varepsilon = s \cdot e$, откуда $\varepsilon \cdot e = s \cdot e \cdot e = s \cdot e = \varepsilon$.

Положим $f = e \cdot \varepsilon$. Из того, что $L$ — левый идеал и $\varepsilon \in L$ следует, что $f \in L$.

Элемент $f$ является идемпотентом: $f \cdot f = e \cdot \varepsilon \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$.

Проверим, что $f \leqslant e$: $e \cdot f = e \cdot e \cdot \varepsilon = e \cdot \varepsilon = f$ и $f \cdot e = e \cdot \varepsilon \cdot e = e \cdot \varepsilon = f$. ∎

**Теорема 5.3** (о минимальных идемпотентах). *Пусть $S$ — компактная правотопологическая полугруппа и $e$ — идемпотент (т.е. $e \in E(S)$).*

1) *Идемпотент $e$ минимален в $E(S)$ тогда и только тогда, когда $e \in K(S)$.*
2) *Идемпотент $e$ минимален в $E(S)$ тогда и только тогда, когда $L = S \cdot e$ — минимальный левый идеал.*

**Доказательство.** 1) Пусть $e$ — минимальный идемпотент и $L \subset S \cdot e$ — минимальный левый идеал (он существует по второй теореме о компактных полугруппах). В силу предложения 5.1 существует идемпотент $f \in L$, $f \leqslant e$. Из минимальности идемпотента $e$ следует, что $f = e$, откуда $e \in L$. По определению множества $K(S)$ имеем $L \subset K(S)$.

Обратно, пусть $L$ — минимальный левый идеал, $e \in L$ и $x \in E(S)$, $x \leqslant e$. Покажем, что $x = e$.

Выполнено включение $S \cdot x \subset S \cdot e$, потому что $x \leqslant e \implies x = x \cdot e$ и, значит, $x \in S \cdot e$.

Поскольку левый идеал $L$ минимален и $e \in L$, имеем $L = S \cdot e$, а поскольку $x \in S \cdot e$, имеем $S \cdot x = S \cdot e$, откуда $e = e \cdot e = s \cdot x$ для некоторого $s \in S$.

В силу неравенства $x \leqslant e$ имеем $x = e \cdot x$, а значит, $x = s \cdot x \cdot x = s \cdot x = e$.

2) Если $L$ — минимальный левый идеал, то $L \subset K(S)$, так что если $e \in L$, то $e \in K(S)$, и $e$ минимален согласно пункту 1).

Обратно, если $e$ минимален, то из пункта 1) вытекает, что $e \in K(S)$, т.е. $e \in L$ для некоторого минимального левого идеала $L$. Поскольку идеал $L$ минимален и $e \in L$, выполнено равенство $S \cdot e = L$. ∎

**Следствие 5.3.** *Для компактной правотопологической полугруппы $S$ минимальные идемпотенты — это в точности идемпотенты из $K(S)$, т.е. идемпотенты, принадлежащие минимальным левым (или правым) идеалам.*

**Следствие 5.4.** *Пусть $S$ — компактная правотопологическая полугруппа и $e \in E(S)$. Тогда существует минимальный идемпотент $f \leqslant e$.*

**Доказательство.** Из компактности полугруппы $S$ и непрерывности умножения по первому аргументу следует, что $S \cdot e$ — компактная подполугруппа; значит, существует минимальный левый идеал $L \subset S \cdot e$. В силу предложения 5.1 существует идемпотент $f \in L$ такой, что $f \leqslant e$. Он минимален по теореме 5.3. ∎

## 5.4. Толстые и синдетические множества в полугруппах

### Толстые множества

Пусть $S$ — произвольная полугруппа. Для $x \in S$ и $A \subset S$

$$x \cdot A = \{x \cdot a : a \in A\}, \quad A \cdot x = \{a \cdot x : a \in A\}, \quad x^{-1} \cdot A = \{s \in S : x \cdot s \in A\}.$$

Если $p$ — ультрафильтр на $S$, то

$$x^{-1} \cdot A \in p \iff x \cdot W \subset A \quad \text{для некоторого } W \in p \iff$$

$$\iff A \in x \cdot p \iff x \cdot p \in \overline{A}.$$

**Определение 5.3.** Подмножество $T \subset S$ называется *толстым*, если семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

Если $S$ — группа, то множество $T \subset S$ толстое тогда и только тогда, когда семейство $\{x \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

*Замечание* 5.2. 1. Для любого $p \in \beta S$ замыкание $\overline{S \cdot p}$ множества $S \cdot p$ в $\beta S$ равно $\beta S \cdot p$:

$$\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p.$$

Действительно, умножение непрерывно по первому аргументу, и при непрерывном отображении образ замыкания содержится в замыкании образа; значит, $\overline{S} \cdot p \subset \overline{S \cdot p}$. Поскольку $\overline{S} = \beta S$, выполнено включение $\beta S \cdot p \subset \overline{S \cdot p}$. Из непрерывности умножения по первому аргументу следует также, что $\beta S \cdot p$ компактно и потому замкнуто в $\beta S$, откуда $\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p$.

2. Для любого $x \in S$

$$\overline{x^{-1} \cdot S} = x^{-1} \cdot \beta S$$

(в полугруппе $\beta S$). Действительно, для $x \in S$ умножение на $x$ слева непрерывно, $x^{-1} \cdot \beta S$ — прообраз множества $\beta S$ и $\beta S = \overline{S}$. Поскольку прообраз замыкания равен замыканию прообраза, имеем $\overline{x^{-1} \cdot S} = x^{-1} \cdot \beta S$.

**Теорема 5.4** (о толстых множествах). *Для подмножества $T$ полугруппы $S$ следующие условия равносильны:*

1) *$T$ толстое;*
2) *для любого конечного множества $F \subset S$ найдётся $y \in S$, для которого $F \cdot y \subset T$;*
3) *для некоторого $p \in \beta S$ левый идеал $\beta S \cdot p$ полугруппы $\beta S$ содержится в $\overline{T} = \{q \in \beta S : T \in q\}$;*
4) *существует минимальный левый идеал $L$ в $\beta S$, для которого $L \subset \overline{T}$.*

**Доказательство.** Докажем эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2). Множество $T$ толстое тогда и только тогда, когда для любого конечного множества $F \subset S$ существует $y \in \bigcap\limits_{x \in F} x^{-1} \cdot T$. Это означает, что для всех $x \in F$ имеем $x \cdot y \in T$, т.е. $F \cdot y \subset T$.

Покажем, что 1) $\Leftrightarrow$ 3). Семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ (как и любое другое семейство) центрировано тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором ультрафильтре $p$ на $S$. Покажем, что $\beta S \cdot p \subset \overline{T}$.

Для любых $x \in S$ и $A \in p$ имеем $A \cap x^{-1} \cdot T \neq \varnothing$, т.е. $x \cdot A \cap T \neq \varnothing$. Это означает, что $T \in x \cdot p$ (иначе ультрафильтр $x \cdot p$ можно было бы расширить, добавив $T$, но это невозможно в силу его максимальности), т.е. $x \cdot p \in \overline{T}$. Из произвольности элемента $x$ вытекает, что $S \cdot p \subset \overline{T}$.

Поскольку множество $\overline{T}$ замкнуто в $\beta S$, замыкание $\overline{S \cdot p} = \beta S \cdot p$ множества $S \cdot p$ в $\beta S$ содержится в $\overline{T}$.

Обратно, если $\beta S \cdot p \subset \overline{T}$, то $S \cdot p \subset \overline{T}$. Это означает, что $x \cdot p \in \overline{T}$, т.е. $T \in x \cdot p$, для всех $x \in S$. Следовательно, для каждого $x \in S$ существует $A \in p$ такое, что $T = x \cdot A$, т.е. $x^{-1} \cdot T \supset A$. Ультрафильтр $p$ — центрированное семейство; значит, и семейство $\{x^{-1} \cdot T : x \in S\}$ центрировано.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) вытекает из второй теоремы о компактных полугруппах (что в любом левом идеале содержится минимальный левый идеал).

Импликация 4) $\Rightarrow$ 3) следует из того, что $\beta S \cdot p \subset L \subset \overline{T}$ для всякого $p \in L$. ■

*Пример.* Рассмотрим аддитивную полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.

Любое конечное множество $F \subset \mathbb{N}$ содержится в начальном интервале $I_k = \{1, \ldots, k\}$ натуральных чисел для некоторого $k$, и для $y \in \mathbb{N}$ $I_k + y$ — это интервал длины $k$. Любой интервал длины $k$ имеет такой вид. По доказанной теореме (эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2)) множество $A \subset \mathbb{N}$ толстое тогда и только тогда, когда оно содержит произвольно длинные конечные интервалы.

●○●●●●●○○○○○●●●●●●●●●●●●●●○○○○○○○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Толстое множество с толстым дополнением

●○●●●○○●●●●●●○●●●●●●●●●●○○○●●●●●●●●●●●●●●○○●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●○●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Толстое множество с нетолстым дополнением

### Синдетические множества

**Определение 5.4.** Подмножество $A$ полугруппы $S$ называется *синдетическим*, если существует конечное множество $F \subset S$, для которого

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S.$$

Множество $A \subset S$ синдетическое тогда и только тогда, когда существует конечное множество $F \subset S$ такое, что для всякого $s \in S$ имеем $t \cdot s \in A$ для некоторого $t \in F$.

Если $S$ — группа, то множество $A \subset S$ синдетическое тогда и только тогда, когда существует конечное множество $F \subset S$, для которого $F \cdot A = S$.

*Полезное равенство:* для всех $x \in S$ и $X \subset S$

$$S \setminus x^{-1} \cdot X = x^{-1} \cdot (S \setminus X). \tag{$\star$}$$

Действительно, $s \notin x^{-1} \cdot X \iff x \cdot s \notin X \iff x \cdot s \in S \setminus X$.

**Теорема 5.5** (о двойственности)**.** *Пусть $S$ — произвольная полугруппа и $A, T \subset S$.*

1) *Множество $A$ синдетическое тогда и только тогда, когда $A$ пересекает все толстые множества.*
2) *Множество $T$ толстое тогда и только тогда, когда $T$ пересекает все синдетические множества.*

**Доказательство.** 1), 2), *необходимость:* Пусть $T \subset S$ толстое и $A \subset S$ синдетическое.

Поскольку $A$ синдетическое, существует конечное множество $F \subset S$, для которого

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S. \tag{$*$}$$

Поскольку $T$ толстое, существует

$$s \in \bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T. \tag{$**$}$$

Из ($*$) следует, что $s \in t^{-1} \cdot A$ для некоторого $t \in F$. Имеем $t \cdot s \in A \cap T$.

1), *достаточность:* Если множество $A$ не синдетическое, то для любого конечного $F \subset S$ имеем $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A \neq S$. Значит, $S \setminus (\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A) \neq \varnothing$, откуда $\bigcap\limits_{t \in F} (S \setminus t^{-1} \cdot A) \neq \varnothing$. Из полезного равенства ($\star$) следует, что $\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus A) \neq \varnothing$ для любого конечного множества $F \subset S$, а значит, $S \setminus A$ толстое.

2), *достаточность:* Если множество $T$ не толстое, то для некоторого конечного множества $F \subset T$ имеем $\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T = \varnothing$. Для этого множества $F$

$$S \setminus (\bigcap_{t \in F} t^{-1} \cdot T) = \bigcup_{t \in F} (S \setminus t^{-1} \cdot T) = S.$$

Из полезного равенства ($\star$) следует, что $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \setminus T) = S$, т.е. $S \setminus T$ синдетическое. ■

**Теорема 5.6** (о синдетических множествах)**.** *Для множества $A \subset S$ следующие условия равносильны:*

1) *$A$ синдетическое;*
2) *$\overline{A}$ пересекает все левые идеалы в $\beta S$;*
3) *$\overline{A}$ пересекает все минимальные левые идеалы в $\beta S$.*

**Доказательство.** По теореме 5.5 о двойственности множество $A$ синдетическое тогда и только тогда, когда $S \setminus A$ не толстое. По теореме 5.4 о толстых множествах, пункт 4), никакой левый идеал не содержится в $\overline{S \setminus A} = \beta S \setminus \overline{A}$, а это означает, что любой левый идеал пересекает $\overline{A}$.

По второй теореме о компактных полугруппах любой левый идеал в $\beta S$ содержит минимальный левый идеал. ■

*Пример.* Рассмотрим полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.

Для $A \subset \mathbb{N}$ $n^{-1}+A = (A-n)\cap\mathbb{N}$, и для конечного множества $F \subset \mathbb{N}$ $\bigcup\limits_{x\in F}(x^{-1}+A) = (A-F)\cap\mathbb{N}$.

Множество $A \subset \mathbb{N}$ синдетическое тогда и только тогда, когда существует конечное множество $F \subset \mathbb{N}$, для которого $A - F \supset \mathbb{N}$, т.е. существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $A - I_k \supset \mathbb{N}$ (здесь $I_k = \{1, \ldots, k\}$). Это равносильно тому, что для любого натурального $n$ имеем $n \in A - I_k$, т.е. $(I_k + n) \cap A \neq \varnothing$ для любого $n$, а это означает, что всякий интервал длины $k$ пересекает $A$, или, другими словами, расстояние между любыми соседними числами $x, y \in A$ не больше $k$.



Синдетическое множество с синдетическим дополнением



Синдетическое множество с несиндетическим дополнением

# Лекция 6
# Кусочно синдетические множества. Теорема Хейлса–Джуитта

## 6.1. Кусочно синдетические множества

**Определение 6.1.** Подмножество $A$ полугруппы $S$ называется *кусочно синдетическим*, если найдётся конечное множество $F \subset S$, для которого множество $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое в $S$.

**Предложение 6.1.** *Всякое синдетическое множество является кусочно синдетическим. Всякое толстое множество является кусочно синдетическим.*

**Доказательство.** Для любого $s \in S$ имеем $s^{-1} \cdot S = \{x \in S : s \cdot x \in S\} = S$. Следовательно, всякая полугруппа $S$ является толстым синдетическим множеством в самой себе.

Пусть $A \subset S$ — синдетическое множество. По определению существует конечное множество $F \subset S$, для которого $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A = S$. Поскольку $S$ — толстое множество, $A$ является кусочно сидетическим.

Пусть теперь $A$ толстое. Это означает по определению, что семейство $\{x^{-1} \cdot A : x \in S\}$ центрировано. Из того, что

$$t^{-1} \cdot (s^{-1} \cdot A) = \{x \in S : t \cdot x \in s^{-1} \cdot A\} = \{x \in S : s \cdot (t \cdot x) \in s^{-1} \cdot A\} = (s \cdot t)^{-1} \cdot A,$$

следует, что семейство $\{x^{-1} \cdot (s^{-1} \cdot A) : x \in S\}$ тоже центрировано для всякого $s \in S$, т.е. $s^{-1} \cdot A$ толстое. Значит, $A$ удовлетворяет условию в определении кусочно синдетического множества для $F = \{s\}$, где $s$ — любой элемент полугруппы $S$. ■

Наша ближайшая цель — доказать, что бывают ультрафильтры, состоящие из кусочно синдетических множеств.

**Предложение 6.2.** *Если $A$ — кусочно синдетическое множество в полугруппе $S$, то существуют $t \in S$ и минимальный идемпотент $e$ в $\beta S$ такие, что $t^{-1} \cdot A \in e$. При этом $e$ и $t \cdot e$ содержатся в идеале*

$$K(\beta S) = \bigcup \{L : L \text{ — минимальный левый идеал в } \beta S\}$$

*и $t \cdot e \in \overline{A}$, т.е. $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \varnothing$.*

**Доказательство.** Зафиксируем конечное множество $F \subset S$, для которого объединение $T = \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A$ толстое. По теореме 5.4 о толстых множествах существует минимальный левый идеал $L$ в $\beta S$, для которого $L \subset \overline{T}$. По второй теореме о компактных полугруппах идеал $L$ замкнут, а значит, и компактен; следовательно, существует идемпотент $e$ в $L$. Он минимален по теореме 5.3 о минимальных идемпотентах. Поскольку $\overline{t^{-1} \cdot A}$ — замыкание множества $t^{-1} \cdot A$ в $\beta S$, имеем

$$e \in L \subset \overline{T} = \bigcup_{t \in F} \overline{t^{-1} \cdot A},$$

так что $e \in \overline{t^{-1} \cdot A}$ для некоторого $t \in F$. Это означает, что $t^{-1} \cdot A \in e$, т.е. $A \in t \cdot e$. При этом $t \cdot e \in t \cdot L \subset L \subset K(\beta S)$. ■

**Теорема 6.1** (о кусочно синдетических множествах)**.** *Подмножество $A$ полугруппы $S$ является кусочно синдетическим тогда и только тогда, когда $A \in p$ для некоторого ультрафильтра $p \in K(\beta S)$, т.е. $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \varnothing$.*

**Доказательство.** *Необходимость* вытекает из предложения.

*Достаточность.* Пусть $A \in p \in K(\beta S)$, и пусть $L \ni p$ — минимальный левый идеал. Тогда $L = \beta S \cdot p$ и $L \subset \bigcup\limits_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A}$ для некоторого конечного $E \subset S$. Действительно, пусть $q \in L$. Поскольку $L$ минимален, имеем $L = \beta S \cdot q$. Имеем также $p \in L$, $L = \overline{S \cdot q}$ и $\overline{A}$ — окрестность $p$. Значит, $\overline{A} \cap S \cdot q \neq \varnothing$, т.е. $t \cdot q \in \overline{A}$ для некоторого $t \in S \implies q \in t^{-1} \cdot \overline{A} = \{x \in \beta S : t \cdot x \in \overline{A}\}$ $= = \overline{t^{-1} \cdot A}$ (в силу частичной непрерывности умножения по второму аргументу). $L \subset \beta S$ компактно, множества $\overline{t^{-1} \cdot A}$ открыты и покрывают $L \implies \exists$ конечное $E \subset S$, для которого $L \subset \bigcup\limits_{t \in E} \overline{t^{-1} \cdot A} = \overline{\bigcup\limits_{t \in E} t^{-1} \cdot A}$.

По теореме 5.4 о толстых множествах множество $\bigcup\limits_{t \in E} t^{-1} \cdot A$ толстое; значит, $A$ кусочно синдетическое. ■

*Упражнения*

1. Пусть $G$ — группа или одна из полугрупп $(\mathbb{N}, +)$ и $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$. Если множество $A \subset G$ кусочно синдетическое, то $A = S \cap T$, где $S$ синдетическое и $T$ толстое.
2. Пусть $G$ — произвольная полугруппа. Если $A = S \cap T$, где $S$ синдетическое и $T$ толстое, то $A$ кусочно синдетическое.

**Решение.** 1. Пусть $F \subset G$ — конечное множество, для которого $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A = T'$ толстое. В группе (в полугруппе $\mathbb{N}$) $t^{-1} \cdot A$ — обычное произведение (пересечение $(A - t) \cap \mathbb{N}$); значит, $A \subset \bigcap\limits_{t \in F} t \cdot T'$. Для любого конечного множества $E \subset G$ имеем

$$\bigcap_{s \in E} s^{-1} \cdot \Big(\bigcap_{t \in F} t \cdot T'\Big) = \bigcap_{s \in E} \bigcap_{t \in F} s^{-1} \cdot t \cdot T' = \bigcap_{\substack{t \in F \\ s \in E}} (t^{-1} \cdot s)^{-1} \cdot T'.$$

Последнее пересечение непусто, поскольку это пересечение конечного числа обратных сдвигов толстого множества $T'$. Следовательно, первое пересечение тоже непусто, а это значит, что множество $T = \bigcap\limits_{t \in F} t \cdot T'$ толстое. Для множества $S = A \cup \big(G \setminus \bigcap\limits_{t \in F} t \cdot T'\big)$ в силу $(\star)$ выполнены равенства

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1}\big(G \setminus \bigcap_{t \in F} t \cdot T'\big) =$$
$$= T' \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \big(\bigcup_{t \in F} (G \setminus t \cdot T')\big) = T' \cup \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \big(\bigcup_{t \in F} (t \cdot (G \setminus T')\big) = G.$$

Следовательно, множество $S$ синдетическое.

2. Пусть $A = S \cap T$, где $S$ синдетическое и $T$ толстое. Возьмём конечное множество $F \subset G$, для которого $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot S = G$. Положим $T' = \bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T$. Множество $T'$ толстое. Чтобы убедиться в этом, заметим, что, во-первых, для любых $x, y \in G$ $\;x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$, потому что $y^{-1} \cdot T = \{s : y \cdot s \in T\}$ и $x^{-1} \cdot (y^{-1} \cdot T) = \{s : x \cdot s \in y^{-1} \cdot T\} = \{s : y \cdot x \cdot s \in T\} = (y \cdot x)^{-1} \cdot T$. Во-вторых, $s^{-1}\big(\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T\big) = \bigcap\limits_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$, потому что $x \in s^{-1} \cdot \big(\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T\big)$ тогда и только тогда, когда $s \cdot x \in \bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T$, т.е. $t \cdot s \cdot x \in T$ для всех $t \in F$, а это равносильно включению $x \in \bigcap\limits_{t \in F} (t \cdot s)^{-1} \cdot T$.

Следовательно, для любого конечного множества $E \subset G$ имеем $\bigcap\limits_{s \in E} \big(\bigcap\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot T\big) = \bigcap\limits_{\substack{t \in F \\ s \in E}} (t \cdot s)^{-1} \cdot T \neq \varnothing$.

Покажем, что $\bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot A \supset T'$:

$$\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot A = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot (S \cap T) = \bigcup_{t \in F} (t^{-1} \cdot S \cap t^{-1} \cdot T) \supset \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot S \cap \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot T = G \cap T' = T'. \quad ■$$

●○●○●○○○○○○○●●○●○○●●●○●○●○○○○○○○○○○○○○○○●○●●○●○○●○●●○●○●●○●○●●○●●○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Кусочно синдетическое множество

## 6.2. Теорема Хейлса–Джуитта

### Замечания о полугруппах $\beta S$

Пусть $S$ — полугруппа.

Напомним, что для $A \subset S$ $\overline{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}$ и для $p, q \in \beta S$ ультрафильтр $p \cdot q$ имеет базу, состоящую из всех множеств

$$\bigcup \{x \cdot Q_x : x \in P\}, \quad \text{где } P \in p,\ Q_x \in q. \qquad (\bullet)$$

Напомним также, что для множеств $X$ и $Y$ и отображения $f\colon X \to K$ через $\hat{f}$ мы обозначаем непрерывное продолжение $\hat{f}\colon \beta X \to \beta Y$ отображения $f$.

**Предложение 6.3.**
1. *Для любых $A, B \subset S$ имеет место включение $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A \cdot B}$.*
2. *Если $H \subset S$ — подполугруппа в $S$, то $\overline{H}$ — подполугруппа в $\beta S$.*
3. *Если $I \subset S$ — левый (правый, двусторонний) идеал в $S$, то $\overline{I}$ — левый (правый, двусторонний) идеал в $\beta S$.*

**Доказательство.** 1. Надо показать, что если $A \in p \in \beta S$ и $B \in q \in \beta S$, то $A \cdot B \in p \cdot q$. Для этого достаточно в $(\bullet)$ положить $P = A$ и $Q_x = B$ для всех $x \in P = A$.

Утверждение 2 немедленно вытекает из 1.

Проверим утверждение 3 для левого идеала: $\beta S \cdot \overline{I} = \overline{S} \cdot \overline{I} \subset \overline{S \cdot I} \subset \overline{I}$. Для остальных проверка аналогична. ■

**Предложение 6.4.** *Если $X$ — множество и $Y \subset X$, то существует гомеоморфизм $\varphi\colon \overline{Y} \to \beta Y$. Если при этом $X$ — полугруппа и $Y$ — её подполугруппа, то $\varphi$ — изоморфизм полугрупп.*

**Доказательство.** Пусть $\varphi$ — отображение, которое каждому ультрафильтру $p \in \overline{Y}$ (т.е. такому, что $Y \in p$) ставит в соответствие семейство

$$\varphi(p) = \{A \subset Y : A \in p\}.$$

Очевидно, $\varphi(p)$ — ультрафильтр на $Y$. Получилось отображение $\varphi\colon \overline{Y} \to \beta Y$. Ясно, что оно взаимнооднозначно.

Отображение $\varphi$ является гомеоморфизмом: базу топологии подпространства $\overline{Y}$ пространства $\beta X$ составляют множества $\overline{A} \cap \overline{Y} = \overline{A \cap Y} = \{p \in \beta X : A \cap Y \in p\}$, где $A \subset X$, т.е. множества $\{p \in \beta X : B \in p\}$, где $B \subset Y$, а базу топологии $\beta Y$ — множества $\overline{B} = \{p \in \beta Y : B \in p\}$, где $B \subset Y$. Отсюда немедленно вытекает непрерывность отображений $\varphi$ и $\varphi^{-1}$.

Если $X$ — полугруппа и $Y$ — её подполугруппа, то из соотношения $(\bullet)$ видно, что $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$ для любых $p, q \in \overline{Y}$. Значит, $\varphi$ — взаимнооднозначный гомоморфизм, т.е. изоморфизм. ■

**Предложение 6.5.** *Если $S$ и $H$ — полугруппы и $h\colon S \to H$ — гомоморфизм, то $\hat{h}\colon \beta S \to \beta H$ — гомоморфизм полугрупп $\beta S$ и $\beta H$.*

**Доказательство.** Пусть $\hat{h}(p \cdot q) \neq \hat{h}(p) \cdot \hat{h}(q)$.

Поскольку топологическая полугруппа $\beta H$ хаусдорфова, у точек $\hat{h}(p \cdot q)$ и $\hat{h}(p) \cdot \hat{h}(q)$ есть непересекающиеся открытые окрестности $U$ и $V$ в $\beta H$. Из непрерывности умножения на элемент $\hat{h}(q)$ справа вытекает существование открытого множества $W \ni \hat{h}(p)$ такого, что $W \cdot \hat{h}(q) \subset V$. Из непрерывности умножения на $q$ справа и отображения $\hat{h}$ следует существование открытого множества $O_p \ni p$ (в $\beta S$) такого, что $O_p \cdot q \subset \hat{h}^{-1}(U)$ и $O_p \subset \hat{h}^{-1}(W)$, т.е. $\hat{h}(O_p) \cdot \hat{h}(q) \subset V$. Пусть $s \in O_p \cap S$. Тогда $\hat{h}(s \cdot q) \in U$, $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(q) \in V$ и $\hat{h}(s) = h(s) \in H$. Умножение на $s$ слева тоже непрерывно, так как $s \in S$. Отсюда и из непрерывности отображения $\hat{h}$ вытекает существование открытого множества $O_q \ni q$ такого, что $s \cdot O_q \subset \hat{h}^{-1}(U)$ и $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(O_q) \subset V$. Пусть $t \in O_q \cap S$. Тогда $\hat{h}(s \cdot t) \in U$ и $\hat{h}(s) \cdot \hat{h}(t) \in V$. Это противоречит тому, что $\hat{h}(s) = h(s)$, $\hat{h}(t) = h(t)$, $\hat{h}(s \cdot t) = h(s \cdot t)$ и $h(s \cdot t) = h(s) \cdot h(t)$ (так как $h$ — гомоморфизм). ■

**Определение 6.2.** *Ретракция* полугруппы $S$ на её подполугруппу $H$ — это полугрупповой гомоморфизм $r\colon S \to H$, сужение которого на $H$ — тождественное отображение (т.е. $r(h) = h$ для $h \in H$).

**Предложение 6.6.** *Если $r\colon S \to H$ — ретракция, то $\hat{r}\colon \beta S \to \overline{H}$ — тоже ретракция.*

**Доказательство.** Мы уже знаем, что $\hat{r}$ — непрерывный гомоморфизм (см. предложение 6.5). Обозначим сужение $\hat{r}|_{\overline{H}}\colon \overline{H} \to \overline{H}$ через $\tilde{r}$. Множество $H$ всюду плотно в $\overline{H}$, $\tilde{r}$ непрерывно и $\tilde{r}$ совпадает с (непрерывным) тождественным отображением $\mathrm{id}_{\overline{\mathrm{H}}}\colon \overline{\mathrm{H}} \to \overline{\mathrm{H}}$ на $H$, причём $\overline{H}$ хаусдорфово; следовательно, $\tilde{r} = \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{H}}}$. ■

### Теорема Хейлса–Джуитта

**Теорема 6.2** (Hales–Jewett). *Пусть $S$ — полугруппа, $H \subset S$ — подполугруппа такая, что $I = S \setminus H$ — двусторонний идеал в $S$, и пусть $\mathfrak{R}$ — конечное множество ретракций из $S$ на $H$. Тогда для любого кусочно синдетического множества $A$ в $H$ найдётся $s_A \in I$ такое, что $r(s_A) \in A$ для всех $r \in \mathfrak{R}$.*

**Доказательство.** Из основного свойства ультрафильтров следует, что $\beta S \setminus \overline{H} = \overline{S \setminus H}$. В силу доказанных предложений $\overline{H}$ — подполугруппа в $\beta S$, $\overline{I} = \beta S \setminus \overline{H}$ — двусторонний идеал в $\beta S$ и $\hat{r}\colon \beta S \to \overline{H}$ — ретракции для всех $r \in \mathfrak{R}$.

В силу предложения 6.2 существует элемент $s_0 \in H$, для которого $s_0^{-1} \cdot A \in e$, где $e$ — минимальный идемпотент в $\beta H = \overline{H}$. По предложению 5.1 существует минимальный идемпотент $f$ в $\beta S$, для которого $f \leqslant e$.

Итак, у нас есть минимальный идемпотент $e$ в $\overline{H}$, элемент $s_0 \in H$, для которого $s_0^{-1} \cdot A \in e$, и минимальный идемпотент $f \leqslant e$ в $\beta S$.

По теореме 5.3 о минимальных идемпотентах имеем $f \in K(\beta S)$, а поскольку $K(\beta S)$ — наименьший двусторонний идеал (см. теорему 5.1), имеем также $f \in \overline{I}$.

Покажем, что $\hat{r}(f) = e$ для всех $r \in \mathfrak{R}$. Заметим, что $\hat{r}(f)$ — идемпотент, так как $f$ — идемпотент и $\hat{r}$ — гомоморфизм.

Из того, что $f \leqslant e$, следует, что $f \cdot e = e \cdot f = f$, откуда

$$\hat{r}(f) = \hat{r}(f \cdot e) = \hat{r}(f) \cdot \hat{r}(e) = \hat{r}(f) \cdot e, \quad \hat{r}(f) = \hat{r}(e \cdot f) = e \cdot \hat{r}(f),$$

т.е. $\hat{r}(f) \leqslant e$. Поскольку идемпотент $e$ минимален в $\beta H$, заключаем, что $\hat{r}(f) = e$.

Отсюда и из того, что $s_0^{-1} \cdot A \in e$, следует, что $r^{-1}(s_0^{-1} \cdot A) \in f$ для всех $r \in \mathfrak{R}$. Имеем также $I \in f$, так как $f \in \overline{I}$.

Вспомним, что $f$ — ультрафильтр; в частности, это центрированное семейство множеств. Значит, найдётся

$$s \in I \cap \bigcap_{r \in \mathfrak{R}} r^{-1}(s_0^{-1} \cdot A).$$

Имеем $s \in I$ и $r(s) \in s_0^{-1} \cdot A$, т.е. $s_0 \cdot r(s) \in A$ для всех $r \in \mathfrak{R}$.

В качестве $s_A$ можно взять множество $s_0 \cdot s$. Действительно, $s_A \in I$ (потому что $s \in I$ и $I$ — идеал) и $r(s_A) = r(s_0 \cdot s) = r(s_0) \cdot r(s) = s_0 \cdot r(s) \in A$, так как $r$ — гомоморфизм, $s_0 \in H$ и $r(x) = x$ для $x \in H$. ■

**Следствие 6.1.** *Пусть $(S_0, +)$ — коммутативная полугруппа, $A \subset S_0$ — кусочно синдетическое множество и $F$ — конечное подмножество $S_0$. Тогда найдутся $s \in S_0$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $\{s + nf : f \in F\} \subset A$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $S = S_0 \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, $H = S_0 \times \{0\}$ и $\mathfrak{R} = \{r_f : f \in F\}$, где $r_f(s, n) = (s + nf, 0)$.

Согласно теореме Хейлса–Джуитта существует $(s, n) \in S_0 \times \mathbb{N}$, для которого $r_f(s, n) \in A$ при всех $f \in F$. ■

**Следствие 6.2.** *Любое кусочно синдетическое подмножество полугруппы* $(\mathbb{N}, +)$ *содержит арифметические прогрессии произвольной длины.*

**Следствие 6.3.** *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $A$ *— кусочно синдетическое множество в* $(\mathbb{N}^k, +)$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $A$ *содержит гомотетичный образ* $k$*-мерного куба* $\{1, \ldots, n\}^k$.

# Лекция 7
# Топологическая динамика

## 7.1. Динамические системы

**Определение 7.1.** Пусть $X$ — любое множество и $S$ — моноид (полугруппа с единицей $1_S$). *Действие* моноида $S$ на $X$ — это отображение $\alpha\colon S \times X \to X$ (вместо $\alpha(s, x)$ будем писать $s \cdot x$ или $sx$) со свойствами

- $1_S \cdot x = x$ для всех $x \in X$;
- $s \cdot (t \cdot x) = (s \cdot t) \cdot x$ для всех $x \in X$ и $s, t \in S$ (ассоциативность).

Если задано действие $\alpha$ моноида $S$ на $X$, то мы говорим, что моноид $S$ *действует* на $X$ посредством $\alpha$.

Таким образом, действие $\alpha$ порождает гомоморфизм из $S$ в полугруппу $X^X$ всех отображений $X \to X$ с операцией композиции. Этот гомоморфизм каждому элементу $s \in S$ ставит в соответствие отображение $s\boldsymbol{\cdot} : X \to X$, определённое правилом $s\boldsymbol{\cdot}(x) = s \cdot x$ («умножение» на $s$ слева).

**Определение 7.2.** Пусть $S$ — моноид. *Динамическая система над* $S$, или $S$-*система*, — это пара $(X, \alpha)$, где

- $X$ — непустой хаусдорфов компакт;
- $\alpha$ — действие $S$ на $X$;
- отображение $s\boldsymbol{\cdot} : X \to X$, $x \mapsto s \cdot x$, непрерывно для всех $s \in S$.

Пространство $X$ называется *фазовым пространством* $S$-системы.

Для топологического пространства $X$ через $C(X, X)$ обозначается полугруппа всех непрерывных отображений $X \to X$ с операцией композиции $\circ$. Это подполугруппа полугруппы $(X^X, \circ)$ всех отображений $X \to X$. Пара $(X, \alpha)$, где $X$ — компакт и $\alpha$ — действие $S$ на $X$, является динамической системой, если образ гомоморфизма $h\colon S \to X^X$, $h(s) = s\boldsymbol{\cdot}$, который порождается действием $\alpha$, содержится в $C(X, X)$.

Элементы $S$ часто интерпретируют как моменты времени.

## 7.2. Подсистемы динамических систем

**Определение 7.3.** Пусть $(X, \alpha)$ — $S$-система.

Подмножество $Y \subset X$ *инвариантно*, если $S \cdot Y \subset Y$, т.е. $s \cdot y \in Y$ для всех $s \in S$ и $y \in Y$.

Для $Y \subset X$ пара $(Y, \alpha|_{S \times Y})$ — *подсистема* системы $X$ над $S$, или $S$-*подсистема*, если $Y$ непусто, замкнуто и инвариантно. Всякая $S$-подсистема сама является $S$-системой над $S$.

*Орбита* точки $x \in X$ — это множество $\mathrm{orb}(x) = S \cdot x = \{s \cdot x : s \in S\}$.

Наименьшая подсистема, содержащая точку $x \in X$, обозначается $\overline{x}$.

Динамическая система $X$ *транзитивна*, если $X = \overline{x}$ для некоторого $x \in X$.

*Замечание* 7.1.

1. Пересечение инвариантных множеств инвариантно.
2. $\mathrm{orb}\, x$ — наименьшее инвариантное множество, содержащее $x$.
3. Подсистема $\overline{x}$ совпадает с замыканием $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ в $X$ орбиты $\mathrm{orb}(x)$: $\overline{\mathrm{orb}\, x} \subset \overline{x}$ по определению подсистемы, и замыкание $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ инвариантно, потому что при непрерывных отображениях $s\boldsymbol{\cdot} : x \mapsto s \cdot x$ образ замыкания содержится в замыкании образа.

**Определение 7.4.** Пусть $X$ — $S$-система и $M$ — её $S$-подсистема. Говорят, что $M$ *минимальна*, если любая $S$-подсистема системы $M$ совпадает с $M$.

Пример минимальной подсистемы — *неподвижная точка* действия, т.е. точка $x \in X$, для которой $S \cdot x = \{x\}$.

**Теорема 7.1.** *Всякая $S$-система $X$ содержит минимальную $S$-подсистему.*

**Доказательство.** Пусть $(\mathscr{S}, \supset)$ — множество всех $S$-подсистем системы $X$, частично упорядоченное обратно включению. Для любого линейно упорядоченного подмножества $\mathscr{C}$ множества $\mathscr{S}$ множество $M = \bigcap\limits_{C \in \mathscr{C}} C$ является $S$-подсистемой: оно замкнуто и непусто как пересечение центрированного (ввиду линейной упорядоченности) семейства замкнутых подмножеств компакта $X$. Инвариантность очевидна. Это верхняя (относительно обратного включения) грань множества $\mathscr{C}$. По лемме Цорна в $\mathscr{S}$ есть максимальный (т.е. минимальный по включению) элемент. ∎

Для $U \subset X$ и $s \in S$ полагаем $s^{-1} \cdot U = \{x \in X : s \cdot x \in U\}$.

**Теорема 7.2** (о минимальных подсистемах)**.** *Для $S$-подсистемы $M$ $S$-системы $X$ следующие условия равносильны:*

1) *$M$ — минимальная $S$-система;*
2) *для любого $x \in M$ орбита $\operatorname{orb}(x)$ плотна в $M$ (т.е. $\overline{x} = M$);*
3) *для любого открытого множества $U \subset X$, пересекающего $M$, существует конечное множество $F \subset S$, для которого $M \subset \bigcup\limits_{s \in F} s^{-1} \cdot U$.*

**Доказательство.** Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) очевидна (так как $\overline{x}$ является подсистемой системы $M$ для всякого $x \in M$ и любая подсистема $Y \subset M$ должна содержать $\overline{y}$ для всякого $y \in Y$).

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $x \in M$. Условие 2) выполнено тогда и только тогда, когда любая открытая окрестность $U$ любой точки $y \in M$ пересекает множество $\operatorname{orb}(x) = S \cdot x$, а это равносильно существованию элемента $s \in S$, для которого $s \cdot x \in U$, т.е. $x \in s^{-1} \cdot U$. Из произвольности точки $x$ вытекает, что $M \subset \bigcup\limits_{s \in S} s^{-1} \cdot U$. Поскольку $s^{-1} \cdot U = (s\boldsymbol{\cdot})^{-1}(U)$ и отображение $s\boldsymbol{\cdot}$ непрерывно, множество $s^{-1} \cdot U$ открыто. Таким образом, множества $s^{-1} \cdot U$, $s \in S$, образуют открытое покрытие множества $M$. Поскольку $M$ замкнуто (будучи подсистемой) и потому компактно, это покрытия содержит конечное подпокрытие, т.е. выполнено условие 3).

Покажем, что 3) $\Rightarrow$ 2). Если $x \in M$ и $\overline{x} \neq M$, то множество $U = X \setminus \overline{x}$ открыто и $U \cap M \neq \varnothing$. Если, сверх того, $M \subset \bigcup\limits_{s \in F} s^{-1} \cdot U$, то $x \in s^{-1} \cdot U$ для некоторого $s \in F$, т.е. $s \cdot x \in U$. Однако $s \cdot x \in \operatorname{orb} x \subset \overline{x}$ — противоречие. ∎

Всякая $S$-система является своей собственной подсистемой, поэтому теорема верна и для $M = X$. Отсюда вытекает, в частности, такое утверждение:

**Следствие 7.1.** *Все минимальные динамические системы транзитивны.*

*Примеры*

1. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ с полярными координатами и действие $\alpha\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times X \to X$ определяется так:

$$t \cdot (r \cos\varphi, r \sin\varphi) = (r \cdot e^{-t} \cos(\varphi + t), r \cdot e^{-t} \sin(\varphi + t)).$$

Для $\mathbf{x} \in X$ $\operatorname{orb}(x)$ — спираль $L(\mathbf{x})$, которая начинается в $\mathbf{x}$ и сходится к $(0, 0)$, и $\overline{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x}) \cup \{(0, 0)\}$. Единственная минимальная подсистема — $\{(0, 0)\}$.

Система $X$ не транзитивна. Для любой точки $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ подсистема $L(\mathbf{x}) \cup \{(0, 0)\}$ транзитивна, но не минимальна.

2. $X = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$, $x_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Зафиксируем $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Для $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим $\alpha(n, x) = x \cdot x_{\varphi_0}^n$ (поворот на угол $n\varphi$).

   Если $\varphi = q \cdot 2\pi$, где $q = m/n$ (несократимая дробь), то $x_{\varphi_0}^n = 1$ и $x_{\varphi_0}^k \neq 1$ для $k < n$, так что $n\cdot\ = \mathrm{id}_\mathrm{X}$, каждая точка $x \in X$ периодическая (орбита состоит из $n$ точек $x \cdot x_{\varphi_0}^k$) и $X$ — объединение минимальных подсистем $\mathrm{orb}(x)$, $x \in X$. Система $X$ не транзитивна.

   Если $\varphi_0 = p \cdot 2\pi$, где $p$ иррационально, то все орбиты $\{x_{\varphi_0}^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ плотны в $X$, так что $X$ — минимальная система.

## 7.3. Динамическая система $\beta S$

Если $S$ — моноид с единицей $1_S$, то $\beta S$ — моноид с той же единицей $1_S$.

**Определение 7.5.** $\beta S$ — динамическая система над $S$ относительно действия

$$\alpha\colon S \times \beta S \to \beta S, \qquad \alpha(s, p) = s \cdot p.$$

**Свойства динамической системы $\beta S$**

- Для каждого $p \in \beta S$ имеем $\mathrm{orb}(p) = \{s \cdot p : s \in S\} = S \cdot p$. Из непрерывности умножения по первому аргументу следует, что $\overline{p} = \beta S \cdot p$. Значит, транзитивные $S$-подсистемы $S$-системы $\beta S$ — это в точности (замкнутые) левые идеалы вида $\beta S \cdot p$ полугруппы $\beta S$ для $p \in \beta S$, а произвольные $S$-подсистемы $S$-системы $\beta S$ — это в точности все замкнутые левые идеалы полугруппы $\beta S$.
- Следовательно, минимальные подсистемы системы $\beta S$ — это минимальные левые идеалы полугруппы $\beta S$. Всякий минимальный левый идеал $L$ совпадает с $S \cdot p$ для $p \in L$, и объединение минимальный левых идеалов — это множество $K(\beta S)$. Значит, минимальные подсистемы системы $\beta S$ — это в точности идеалы вида $\beta S \cdot p$ для $p \in K(\beta S)$.
- Динамическая система $\beta S$ транзитивна, потому что $\overline{1}_S = \beta S \cdot 1_S = \beta S$.

## 7.4. Универсальность динамической системы $\beta S$

**Определение 7.6.** Пусть $(X, \alpha_X)$ и $(Y, \alpha_Y)$ — динамические системы над моноидом $S$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *$S$-гомоморфизмом*, или просто *гомоморфизмом*, если оно непрерывно и

$$f(s \cdot x) = s \cdot f(x)$$

для всех $x \in X$ и $s \in S$.

Пусть $X$ — $S$-система относительно действия $\alpha\colon S \times X \to X$. Выберем и зафиксируем любую точку $x \in X$. Для $s \in S$ положим $\alpha_x(s) = s \cdot x$. Получили отображение $\alpha_x\colon S \to X$.

Отображение $\alpha_x$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{\alpha}_x\colon \beta S \to X$, так как $X$ — хаусдорфов компакт.

Наша ближайшая цель — показать, что $\hat{\alpha}_x$ является $S$-гомоморфизмом, т.е. $\hat{\alpha}_x(s \cdot q) = s \cdot \hat{\alpha}_x(q)$ для любых $s \in S$ и $q \in \beta S$.

Заметим, что $s \cdot \hat{\alpha}_x(q) = \alpha_{\hat{\alpha}_x(q)}(s) = \hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(s)$.

**Предложение 7.1.** *Для любых $p, q \in \beta S$ выполнено равенство $\hat{\alpha}_x(p \cdot q) = \hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(p)$.*

**Доказательство.** Доказательство совершенно аналогично доказательству ассоциативности умножения в полугруппе $\beta S$:

Пусть $O_1$ — любая окрестность $\hat{\alpha}_x(p\cdot q)$.
Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_x$
и умножения ультрафильтров
по 1-му аргументу $\implies$
существует окрестность $V_1 \ni p\cdot q$,
для которой $\hat{\alpha}_x(V_1) \subset O_1$,
и существует окрестность $U_1 \ni p$,
для которой $U_1 \cdot q \subset V_1$.

Пусть $O_2$ — любая окрестность $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(p)$.
Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)} \implies$
существует окрестность $U_2 \ni p$,
для которой $\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(U_2) \subset O_2$.

Возьмём $u \in S \cap U_1 \cap U_2$.

$u \cdot q \in V_1$, непрерывность умножения
по 2-му аргументу $\implies$
существует окрестность $W_1 \ni q$,
для которой $u \cdot W_1 \subset V_1$.

$\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}_x(q)}(u) = \alpha_{\hat{\alpha}_x(q)}(u) = u \cdot \hat{\alpha}_x(q) \in O_2$,
непрерывность действия $S$ на $X \implies$
существует окрестность $V_2 \ni \hat{\alpha}_x(q)$,
для которой $u \cdot V_2 \subset O_2$.
Непрерывность отображения $\hat{\alpha}_x \implies$
существует окрестность $W_2 \ni q$,
для которой $\hat{\alpha}_x(W_2) \subset V_2$.

Возьмём $w \in S \cap W_1 \cap W_2$.

Имеем $\hat{\alpha}_x(u\cdot w) = \alpha_x(u\cdot w) = (u\cdot w)\cdot x \in O_1$ и $u\cdot(\hat{\alpha}_x(w)) = u\cdot(\alpha_x(w)) = u\cdot(w\cdot x) \in O_2$. Из ассоциативности действия полугруппы $S$ на $X$ следует, что

$$(u\cdot w)\cdot x = u\cdot(w\cdot x) \in O_1 \cap O_2.$$

Таким образом, любые окрестности точек $(p\cdot q)\cdot x$ и $p\cdot(q\cdot x)$ в хаусдорфовом пространстве $X$ пересекаются. Следовательно, эти точки совпадают. ■

Ясно, что $\hat{\alpha}_x(1_S) = \alpha_x(1_S) = 1_S \cdot x = x$ для любого $x \in X$.

*Вывод:* отображения $\hat{\alpha}_x$ для $x \in X$ определяют действие $\hat{\alpha}$ полугруппы $\beta S$ на $X$ — продолжение действия $\alpha$ полугруппы $S$:

$$\hat{\alpha}\colon \beta S \times X \to X, \quad \hat{\alpha}(p,x) = \hat{\alpha}_x(p) = p\cdot x.$$

Это действие не непрерывно по второму аргументу (так что $(X,\hat{\alpha})$ не является динамической системой над $\beta S$).

Однако оно непрерывно по первому аргументу.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $p\cdot x = \hat{\alpha}_x(p)$ для $p \in \beta S$, $x \in X$.

*Замечание* 7.2. Для каждого $x \in X$ выполнены равенства $\hat{\alpha}_x(\beta S) = \beta S \cdot x = \overline{x}$.

Действительно, $\hat{\alpha}_x$ непрерывно $\implies$ образ $\hat{\alpha}_x(\beta S)$ замыкания множества $S$ содержится в замыкании его образа $\hat{\alpha}_x(S) = \alpha_x(S) = S\cdot x = \mathrm{orb}(x)$, а это замыкание — как раз $\overline{x}$.

С другой стороны, образ $\hat{\alpha}_x(\beta S)$ замкнут, будучи компактом, и содержит множество $\hat{\alpha}_x(S)$, а значит, совпадает с его замыканием.

Из доказанного предложения и замечания 7.2 вытекает такая теорема:

**Теорема 7.3** (об $S$-гомоморфизме)**.** *Для любой $S$ системы $X$ и любого $x \in X$ существует единственный $S$-гомоморфизм $\beta S \to X$, переводящий $1_S$ в $x$. Его образ совпадает с $\overline{x}$.*

*В частности, любая транзитивная $S$-система является гомоморфным образом $S$-системы $\beta S$.*

**Доказательство.** *Существование.* Искомый гомоморфизм — это $\hat{\alpha}_x$.

*Единственность.* Пусть $f$ и $g$ — $S$-гомоморфизмы из $\beta S$ в $X$, отображающие $1_S$ в $x$. Для любого $s \in S$ имеем $f(s) = f(s\cdot 1_S) = s\cdot f(1_S) = s\cdot x$ и $g(s) = g(s\cdot 1_S) = s\cdot g(1_S) = s\cdot x$. Значит, множество $M = \{p \in \beta S : f(p) = g(p)\}$ содержит $1_S$ и все точки $s \in S$, и $M$ замкнуто в $\beta S$, т.е. $M = \beta S$ и $f \equiv g$.

Утверждение насчёт образа следует из замечания 7.2. ■

**Лемма 7.1** (об $S$-гомоморфизмах)**.** *Пусть $X$ и $Y$ — динамические системы над $S$, $f\colon X \to Y$ — $S$-гомоморфизм и $Z$ и $T$ — подсистемы $S$-систем $X$ и $Y$. Тогда*

а) *$f(Z)$ — подсистема $S$-системы $Y$;*

б) *$f^{-1}(T)$ — подсистема $S$-системы $X$;*

в) *если $S$-система $Y$ минимальна, то $f$ сюръективно;*

г) *если подсистема $Z$ $S$-системы $X$ минимальна, то подсистема $f(Z)$ $S$-системы $Y$ тоже минимальна.*

**Доказательство.** а) Из того, что $X$ — компакт, множество $Z$ замкнуто в $X$ и отображение $f$ непрерывно, следует, что $f(Y)$ замкнуто в $Y$. Проверим инвариантность. Для $z \in Z$ и $s \in S$ имеем $s \cdot z \in Z$, так что $s \cdot f(z) = f(s \cdot z) \in f(Z)$, поскольку $f$ — гомоморфизм.

б) Из замкнутости множества $T$ в $Y$ и непрерывности отображения $f$ следует, что $f^{-1}(T)$ замкнуто в $X$. Проверим инвариантность. Для любых $t \in T$ и $s \in S$ имеем $t \cdot s \in T$. Поскольку $f$ — гомоморфизм, если $x \in f^{-1}(T)$ (т.е. $f(x) = t \in T$) и $s \in S$, то $f(s \cdot x) = s \cdot t \in T$, т.е. $s \cdot x \in f^{-1}(T)$.

Утверждение в) следует из а) и г) следует из б) (надо рассмотреть сужение $f|_Z$). ■

## 7.5. Множества времён возврата

Пусть $S$ — моноид с единицей $1_S$, $(X, \alpha)$ — динамическая система над $S$ и $x \in X$.

**Определение 7.7.** Для точки $x \in X$ и множества $A \subset X$ *множество времён возврата*, или просто *множество возврата* точки $x$ в $A$ определяется так:

$$\begin{aligned} R(x, A) &= \{s \in S : s \cdot x \in A\} \\ &= \{s \in S : x \in s^{-1} \cdot A\}. \end{aligned}$$

Другими словами, $R(x, A)$ — это прообраз множества $A$ при отображении $\alpha_x\colon S \to X$, определённом правилом $s \mapsto s \cdot x$: $R(x, A) = \alpha_x^{-1}(A)$.

Напомним, что для ультрафильтра $p \in \beta$ мы условились, что $p \cdot x = \hat{\alpha}_x(p)$, где $\hat{\alpha}_x\colon \beta S \to X$ — непрерывное продолжение отображения $\alpha_x\colon S \to X$, $s \mapsto s \cdot x$, на $\beta S$. Такие продолжения были явно определены в самом начале, при изучении свойств пространства ультрафильтров, для всех отображений множества $S$ в хаусдорфов компакт $X$.

*Замечание* 7.3. 1. Если $p \in \beta S$ и $U$ — окрестность точки $p \cdot x$ в $X$, то $R(x, U) \in p$.

Действительно, по определению отображения $\hat{\alpha}_x$ $p \cdot x$ — это предел ультрафильтра

$$\beta\alpha_x(p) = \{A \subset X : \alpha_x^{-1}(A) \in p\}$$

— образа ультрафильтра $p$ при отображении $\alpha_x$. По определению предела ультрафильтра имеем $U \in \beta\alpha_x(p)$; значит, $R(x, U) = \alpha_x^{-1}(U) \in p$.

2. Если $R(x, F) \in p$ и $F$ замкнуто, то $p \cdot x \in F$.

   Действительно, мы уже знаем, что $\alpha_x^{-1}(U) \in p$ для любой окрестности $U$ точки $p \cdot x$. Если ещё и $R(x, F) = \alpha_x^{-1}(F) \in p$, то для любой такой окрестности $U$ имеем $\alpha_x^{-1}(U) \cap \alpha_x^{-1}(F) \neq \varnothing$ и, значит, $U \cap F \neq \varnothing$, т.е. $p \cdot x \in F$.

3. Таким образом, если $U$ открыто-замкнуто, то $R(x, U) \in p$ тогда и только тогда, когда $p \cdot x \in U$.

**Теорема 7.4** (о синдетических множествах возврата)**.** *Для любой $S$-системы $X$, любой точки $x \in X$ и любого минимального левого идеала $L \subset \beta S$ следующие условия равносильны:*

1) *множество $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности $U$ точки $x$;*

2) *замыкание $\overline{x}$ орбиты $x$ — минимальная $S$-подсистема в $X$;*

3) *существует минимальная $S$-подсистема системы $X$, содержащая $x$.*
4) *существует $p \in L$ такой, что $x = p \cdot x$;*
5) *существует идемпотент $e \in L$ такой, что $x = e \cdot x$;*
6) *существуют идемпотент $e \in L$ и точка $y \in X$ такие, что $x = e \cdot y$;*
7) *существуют $p \in K(\beta S)$ и $y \in X$ такие, что $x = p \cdot y$.*

**Доказательство.** Импликация 2) $\Leftrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем, что 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $M$ — минимальная $S$-подсистема в $X$ и $x \in M$. Надо показать, что множество $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности $U$ точки $x$.

Поскольку подсистема $M$ минимальна, по теореме 7.2 о минимальных подсистемах $M = \overline{x}$, и по замечанию 7.2 $M = \hat{\alpha}_x(\beta S) = \beta S \cdot x$. Пусть $U$ — окрестность точки $x$. По теореме о минимальных подсистемах $M \subset \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot U$ для некоторого конечного $F \subset S$. Имеем

$$S = \alpha_x^{-1}(M) \subset \alpha_x^{-1}\big(\bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot U\big) = \bigcup_{t \in F} \alpha_x^{-1}(t^{-1} \cdot U) = \bigcup_{t \in F} R(x, t^{-1} \cdot U).$$

По определению

$$R(x, t^{-1} \cdot U) = \{s : s \cdot x \in t^{-1} \cdot U\} = \{s : t \cdot s \cdot x \in U\} = t^{-1} \cdot R(x, U),$$

откуда $S = \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x, U)$. Это означает, что множество $R(x, U)$ синдетическое.

Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $x \in X$. Предположим, что множество возврата $R(x, U)$ синдетическое для любой окрестности $U \ni x$. Нам надо показать, что $M = \overline{x}$ — минимальная подсистема. Применим пункт 3) теоремы 7.2 о минимальных подсистемах. Пусть $V \subset X$ — открытое множество и $y \in V \cap M$. Из регулярности хаусдорфова компакта $X$ вытекает существование открытой окрестности $W$ точки $y$, для которой $\overline{W} \subset V$. Поскольку $M = \overline{x}$ — замыкание орбиты $S \cdot x$ точки $x$, существует элемент $r \in S$, для которого $r \cdot x \in W$. Множество $U = r^{-1} \cdot W$ открыто (это прообраз $W$ при непрерывном отображении $r \bullet$) и $x \in U$, т.е. $U$ — окрестность точки $x$. По предположению множество $R(x, U)$ синдетическое, т.е. $S = \bigcup\limits_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x, U)$ для некоторого конечного множества $F \subset S$. Имеем

$$S = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot R(x, r^{-1} \cdot W) = \bigcup_{t \in F} t^{-1} \cdot \big(r^{-1} \cdot R(x, W)\big) = \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot R(x, W).$$

Значит, $S \cdot x \subset \bigcup\limits_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot W \subset \bigcup\limits_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$. Все множества $(t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$ замкнуты (это прообразы замкнутого множества $\overline{W}$ при непрерывном отображении $(t \cdot r) \bullet$), а значит, их конечное объединение $\bigcup\limits_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W}$ тоже замкнуто и потому содержит замыкание $\beta S \cdot x$ множества $S \cdot x$ (см. замечание 7.2), так что

$$M = \beta S \cdot x \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot \overline{W} \subset \bigcup_{t \in F} (t \cdot r)^{-1} \cdot V.$$

Проверим импликацию 2) $\Rightarrow$ 4). Пусть $M = \overline{x}$ — минимальная подсистема $S$-системы $X$. Напомним, что $\hat{\alpha}_x \colon \beta S \to X$ — это $S$-гомоморфизм, отображающий $1_S$ в $x$, и что $\hat{\alpha}_x(\beta S) = \overline{x} = M$. Поскольку левый идеал $L$ минимален, он замкнут (см. вторую теорему о компактных полугруппах), и из того, что он инвариантен относительно умножения на $\beta S$ слева, вытекает, что $L$ — $S$-подсистема в $\beta S$. По лемме 7.1 об $S$-гомоморфизмах из минимальности подсистемы $M$ следует, что $\hat{\alpha}_x(L) = M$. Значит, существует элемент $p \in L$, для которого $\hat{\alpha}_x(p) = p \cdot x = x$.

Проверим, что 4) $\Rightarrow$ 5). Пусть $p \in L$ и $p \cdot x = x$. Тогда множество

$$G = \{q \in L : q \cdot x = x\} = \{q \in L : \hat{\alpha}_x(q) = x\} = \{q \in L : \hat{\alpha}_x(q) = \hat{\alpha}_x(1_S)\}$$

непусто и является замкнутой подполугруппой в $L$ (так как $\hat{\alpha}_x$ — непрерывный $S$-гомоморфизм). По первой теореме о компактных полугруппах в ней есть идемпотент.

Импликации $5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 7)$ тривиальны.

Докажем, что $7) \Rightarrow 3)$. Пусть $x = p \cdot y$, где $y \in X$ и $p \in K(\beta S)$, и пусть $L' \ni p$ — минимальный левый идеал. Тогда $L'$ — минимальная подсистема $S$-системы $\beta S$. Согласно лемме 7.1 об $S$-гомоморфизмах $M = \hat{\alpha}_y(L')$ — минимальная подсистема $S$-системы $X$.

Поскольку $p \in L'$, имеем $x = p \cdot y = \hat{\alpha}_y(p) \in M$. ∎

**Следствие 7.2.** *Транзитивная динамическая система $X$ минимальна тогда и только тогда, когда все множества возврата $R(x, U)$, где $x \in X$ и $U$ — окрестность точки $x$, синдетические.*

# Лекция 8
# Рекуррентные и проксимальные точки. Дискретные динамические системы

Пусть $S$ — моноид с единицей $1_S$ и $X$ — $S$-система, т.е. динамическая система над $S$.

**Определение 8.1.** Точка $x \in X$ называется *рекуррентной*, если для любой её окрестности $U$ множество возврата $R(x, U)$ нетривиально: $R(x, U) \neq \{1_S\}$.

Пример — точки из теоремы о синдетических множествах возврата, для которых все множества возврата $R(x, U)$ синдетические. Это точки вида $x = p \cdot y$ для $p \in K(\beta S)$, $y \in X$.

**Теорема 8.1.** *Пусть $x$ — точка динамической системы над моноидом $S$.*

1. *Точка $x$ рекуррентна тогда и только тогда, когда $p \cdot x = x$ для некоторого $p \in \beta S \setminus \{1_S\}$.*
2. *Если, вдобавок, $s \cdot t \neq 1_S$ для всех $s, t \in S \setminus \{1_S\}$, то $p$ можно выбрать идемпотентом.*
3. *Множество $R(x, U)$ бесконечно для любой окрестности $U$ точки $x$ тогда и только тогда, когда существует ультрафильтр $p \in \beta S \setminus S$, для которого $p \cdot x = x$.*

**Доказательство.** 1. Если точка $x$ рекуррентна, то семейство

$$\mathscr{R} = \{R(x, \overline{U}) \setminus \{1_S\} : U \text{ — окрестность } x\}$$

центрировано, поскольку, очевидно, $R(x, \overline{U} \cap \overline{V}) \subset R(x, \overline{U}) \cap R(x, \overline{V})$. Возьмём ультрафильтр $p \in \beta S$, содержащий $\mathscr{R}$ в качестве подсемейства. Ясно, что $p \neq 1_S$. Согласно замечанию 7.3, пункт 2, имеем $p \cdot x \in \overline{U}$ для любой окрестности $U$ точки $x$. В хаусдорфовом пространстве

$$\{x\} = \bigcap \{\overline{U} : \ U \text{ — окрестность точки } x\}$$

(докажите!); значит, $p \cdot x = x$.

Обратно, пусть $p \neq 1_S$ и $p \cdot x = x$, и пусть $U$ — окрестность точки $x$. Надо показать, что $R(x, U) \neq \{1_S\}$. Поскольку $U$ — окрестность точки $p \cdot x$, согласно тому же замечанию 7.3, пункт 1, имеем $R(x, U) \in p$, откуда $R(x, U) \setminus \{1_S\} \in p$, а значит, $R(x, U) \setminus \{1_S\} \neq \varnothing$.

2. Если $s \cdot t \neq 1_S$ для $s, t \in S \setminus \{1_S\}$, то $S \setminus \{1_S\}$ — подполугруппа в $S$, а значит, её замыкание $\beta S \setminus \{1_S\}$ — подполугруппа в $\beta S$ (см. предложение 6.3). Очевидно, множество $T = \{p \in \beta S \setminus \{1_S\} : p \cdot x = x\}$ является подполугруппой в $\beta S$, и эта подполугруппа замкнута, потому что отображение $\hat{\alpha}_x$ (непрерывное продолжение действия-умножения на фиксированную точку $x$) непрерывно и $T = \hat{\alpha}_x^{-1}(\{x\})$. В силу уже доказанного утверждения 1 она непуста, а значит, в ней есть идемпотент (по первой теореме о компактных полугруппах).

3. Если семейство $\mathscr{R}$ состоит из бесконечных множеств, то все пересечения вида $R(x, U_1) \cap \ldots \cap R(x, U_n)$ бесконечны. Следовательно, семейство $\mathscr{R}' = \{R(x, \overline{U}) \setminus F : F \subset S,\ F \text{ конечно}\}$ центрировано, причём $\mathscr{R}' \supset \mathscr{R}$. Значит, в утверждении 1 можно взять ультрафильтр $p \supset \mathscr{R}'$. Ясно, что этот ультрафильтр не содержит конечных множеств, т.е. $p \in \beta S \setminus S$. ■

## 8.1. Проксимальность

Мы будем использовать стандартные обозначения $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$ и $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ (диагональ).

Напомним, что топология произведения на $X^2$ порождена базой

$$\{U \times V : U, V \text{ — открытые подмножества } X\}.$$

Если $X$ — динамическая система над моноидом $S$, то $X^2$ — динамическая система над $S$ относительно покоординатного действия $s \cdot (x, y) = (s \cdot x, s \cdot y)$.

**Определение 8.2.** Пусть $X$ — динамическая система над $S$, $x, y \in X$ и $W \subset X^2$.

- Множество
$$JR(x, y, W) = \{s \in S : (s \cdot x, s \cdot y) \in W\}$$
называется *совместным множеством времён возврата* точек $x$ и $y$ в $W$.
- Точки $x$ и $y$ *проксимальны*, если для любой окрестности $W$ диагонали $\Delta$ в $X^2$ $JR(x, y, W) \neq \varnothing$, т.е. орбита точки $(x, y)$ пересекает любую окрестность диагонали.

**Теорема 8.2** (о проксимальных точках). *Точки $x$ и $y$ $S$-системы $X$ проксимальны тогда и только тогда, когда $p \cdot x = p \cdot y$ для некоторого $p \in \beta S$.*

**Доказательство.** Условие $p \cdot x \neq p \cdot y$ для всякого $p \in \beta S$ выполнено тогда и только тогда, когда образ $g(\beta S)$ непрерывного отображения $g\colon \beta S \to X^2$, определённого правилом $g(p) = (px, py)$ для $p \in \beta S$, не пересекает диагональ $\Delta$. Поскольку $g(\beta S)$ замкнуто (как непрерывный образ компакта $\beta S$), это условие равносильно тому, что некоторая открытая окрестность $W$ диагонали не пересекает $g(\beta S)$, т.е. $(p \cdot x, p \cdot y) \notin W$ при всех $p \in \beta S$. Множество $S$ всюду плотно в $\beta S$. Значит, из непрерывности отображения $g$ следует, что $g(S)$ всюду плотно в $g(\beta S)$. Поскольку $W$ открыто (т.е. $X^2 \setminus W$ замкнуто), а замыкание множества — наименьшее замкнутое множество, его содержащее, выполнена цепочка эквивалентностей

$$g(\beta S) \cap W = \varnothing \iff g(\beta S) \subset X^2 \setminus W \iff g(S) \subset X^2 \setminus W \iff (s \cdot x, s \cdot y) \notin W \quad \forall s \in S.$$

Последнее условие равносильно непроксимальности точек $x$ и $y$. ■

Заметим, что если точка $x \in X$ такова, что для любой её окрестности $U$ множество возврата $R(x, U)$ синдетическое, то эта точка рекуррентна (но не наоборот). Такие точки называются *равномерно рекуррентными.*

*Замечание* 8.1. Всякая точка $x$ любой $S$-системы проксимальна с некоторой равномерно рекуррентной точкой $y$.

Действительно, если $e$ — любой минимальный идемпотент в $\beta S$ и $y = e \cdot x$, то точка $y$ равномерно рекуррентна в силу теоремы о синдетических множествах возврата и $e \cdot y = e \cdot e \cdot x = e \cdot x$, так что $x$ и $y$ проксимальны по только что доказанной теореме.

**Теорема 8.3** (Auslander–Ellis). *Пусть $X$ — $S$-система, $x \in X$ и $M \subset \overline{x}$ — $S$-подсистема. Тогда существует равномерно рекуррентная точка $y \in M$, проксимальная с $x$.*

**Доказательство.** Положим $I = \{p \in \beta S : p \cdot x \in M\}$. Множество $I$ непусто, поскольку оно содержит подсистему $M$ и $M \subset \overline{x} = \beta S \cdot x$, т.е. все точки множества $M$ имеют вид $p \cdot x$, где $p \in \beta S$. Из инвариантности множества $M$ следует, что $I$ — левый идеал в $\beta S$. По теоремам о компактных полугруппах $I$ содержит минимальный левый идеал, в котором есть идемпотент $e$. По теореме 5.3 о минимальных идемпотентах $e$ минимален, и $y = e \cdot x \in M$. ■

## 8.2. Центральные и динамически центральные множества в полугруппах

**Определение 8.3.** Подмножество $A$ полугруппы $S$ называется *центральным*, если оно содержится (в качестве элемента) в некотором минимальном идемпотенте полугруппы $\beta S$.

*Замечание* 8.2.

1. Любое толстое множество $T$ центрально, так как по теореме 5.4 о толстых множествах $\overline{T}$ содержит некоторый минимальный идеал $L$, а значит, $T$ принаждежит всякому ультрафильтру $p \in L$. По теоремам о компактных полугруппах идеал $L$ замкнут и потому содержит идемпотент $e$, который минимален по теореме 5.3 о минимальных идемпотентах. Имеем $T \in e$.

2. Любое центральное множество является $FP$-множеством, поскольку таковыми являются все элементы любого идемпотента — это вытекает из доказательства теоремы Хиндмана.

Динамически центральные множества были введены и исследованы значительно раньше центральных.

**Определение 8.4.** Подмножество $C$ моноида $S$ называется *динамически центральным*, если существуют $S$-система $X$, проксимальные точки $x, y \in X$ (причём $y$ равномерно рекуррентна), и окрестность $U$ точки $y$, для которых $C = R(x, U)$.

Далеко не очевидно, что надмножество динамически центрального множества динамически центрально или что если объединение двух множеств динамически центрально, то одно из них динамически центрально. Однако это видно из следующей теоремы:

**Теорема 8.4** (о центральных множествах)**.** *Подмножество $A$ моноида $S$ динамически центрально тогда и только тогда, когда оно центрально.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $X$, $x$, $y$ и $U$ удовлетворяют условиям в определении динамически центрального множества. Тогда $I = \{p \in \beta S : p \cdot x = p \cdot y\}$ — левый идеал (множество $I$ непусто, так как $x$ и $y$ проксимальны; см. теорему 8.2 о проксимальных точках). По второй теореме о компактных полугруппах существует минимальный левый идеал $L \subset I$, и по теореме 7.4 о синдетических множествах возврата $e \cdot y = y$ для некоторого идемпотента $e \in L$. Из того, что $e \in L \subset I$, следует, что $e \cdot x = e \cdot y = y \in U$. Согласно замечанию 7.3 имеем $C = R(x, U) \in e$.

*Достаточность.* Пусть $A$ — центральное множество в моноиде $S$. Нам нужно предъявить подходящие $X$, $x, y \in X$ и $U$.

Рассмотрим тихоновскую степень $X = \{0, 1\}^S$ дискретного пространства $\{0, 1\}$. Это хаусдорфово компактное пространство (по теореме Тихонова). Его точки — отображения $f\colon S \to \{0, 1\}$, т.е. характеристические функции множеств $A \subset S$, а базу топологии образуют множества вида

$$\{f \in X : f(s_1) = \delta_1, \dots, f(s_n) = \delta_n\}, \tag{$*$}$$

где $\{s_1, \dots, s_n\}$ — произвольное конечное подмножество моноида $S$ и $\delta_1, \dots, \delta_n \in \{0, 1\}$.

Для $f \in X$ и $s \in S$ определим функцию $s \cdot f \in X$ правилом

$$(s \cdot f)(t) = f(s \cdot t) \quad \text{для } t \in S. \tag{$**$}$$

Легко видеть, что $1_S(f) = f$ и $(s \cdot t)(f) = s \cdot (t \cdot f)$ для всех $s, t \in X$ и $s \in S$. Следовательно, правило $(**)$ определяет действие моноида $S$ на $X$.

Для каждого $s \in S$ так определённое отображение $s\cdot : X \to X$ непрерывно относительно тихоновской топологии, так как прообраз любого множества вида $(*)$ — множество такого же вида, а значит, прообраз любого открытого множества (т.е. объединения множеств вида $(*)$) открыт. Следовательно, $X$ — динамическая система относительно действия $(**)$.

Такая $S$-система называется *системой сдвига.* Точки $f \in X = \{0, 1\}^S$ — это в точности характеристические функции $\chi_A$ множеств $A \subset X$, и $s \cdot \chi_A = \chi_{s^{-1} \cdot A}$.

Пусть множество $C \subset S$ центрально, и пусть $e$ — минимальный идемпотент в $\beta S$, для которого $C \in e$. Положим $x = \chi_C \in X$. Точка $y = e \cdot x \in X$ проксимальна с $x$ (по теореме 8.2 о проксимальных точках) и равномерно рекуррентна (по теореме 7.4 о синдетических множествах возврата). Множество $U = \{f \in X : f(1_S) = 1\}$ открыто-замкнуто в тихоновской топологии пространства $X = \{0, 1\}^S$, и $R(x, U) = C \in e$. По замечанию 7.3 перед теоремой о синдетических множествах возврата $y = e \cdot x \in U$, т.е. $U$ — окрестность точки $y$. ■

## 8.3. Дискретные динамические системы

Напомним, что через $\mathbb{N}_0$ мы обозначаем моноид $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (по сложению).

**Определение 8.5.** Динамические системы над моноидом $(\mathbb{N}_0, +)$ называются *дискретными.*

Пусть $X$ — компакт и $t\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Для $n \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $t^n$ $n$-ю итерацию отображения $t$: $t^n = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{n \text{ раз}}$. Полагая $n \cdot x = t^n(x)$, получаем динамическую систему над $\mathbb{N}_0$ с фазовым пространством $X$.

Все дискретные динамические системы $(X, \alpha)$ получаются таким образом. Действительно, определим отображение $t\colon X \to X$ правилом $t(x) = 1 \cdot x$. Для любых $n \in \mathbb{N}_0$ и $x \in X$ имеем

$$n \cdot x = (1 + \dots + 1) \cdot x = (t \circ \dots \circ t)(x) = t^n(x).$$

По этой причине дискретная динамическая система с фазовым пространством $X$ обычно отождествляется с парой $(X, t)$, где $t$ — непрерывное отображение.

В дискретной динамической системе $(X, t)$ рекуррентность точки $x \in X$ равносильна формально более сильному условию бесконечности множества

$$R(x, U) = \{k \in \mathbb{N}_0 : t^k(x) \in U\}$$

для любой окрестности $U$ точки $x$.

Действительно, если $x$ — периодическая точка, т.е. $t^k(x) = x$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $\{k, 2k, 3k, \dots\} \subset R(x, U)$. Если точка $x$ не периодическая, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать окрестность $U_k$ точки $x$, не пересекающуюся с множеством $\{t(x), t^2(x), \dots, t^k(x)\}$. Тогда для $n_k \in R(x, U_k)$ имеем $n_k > k$, и $\{n_k : k \geqslant 1\}$ — бесконечное подмножество $R(x, U)$.

*Дискретная система сдвига* $(C, T)$ выглядит так:

- фазовое пространство $C$ — это тихоновская степень $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ дискретного пространства $\{0, 1\}$ (она гомеоморфна канторову множеству), его точки — отображения $\mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ (0-1 последовательности), т.е. характеристические функции $\chi_A$ множеств $A \subset \mathbb{N}_0$;
- *сдвиг* $T\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, $\chi_A \mapsto \chi_{A-1}$, сдвигает каждую последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ влево на 1 — переводит её в последовательность $(a_2, a_3, \dots)$.

Положим $U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in C : x_1 = 1\}$. Понятно, что для любого множества $A \subset \mathbb{N}_0$ $R(\chi_A, U) = A$. Отсюда следует, например, что равномерно рекуррентные точки — это в точности характеристические функции синдетических множеств.

*Упражнение.* Докажите, что точки $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ проксимальны в системе сдвига $(C, T)$ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $x_{k+i} = y_{k+i}$ для всех $i \leqslant n$, т.е. последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ (отображения $\mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$) совпадают на произвольно длинных интервалах неотрицательных целых чисел.

Некоторые свойства множеств $A \subset \mathbb{N}_0$ можно описать в терминах транзитивных динамических систем $(\overline{\chi}_A, T)$ (над моноидом $\mathbb{N}_0$). В частности, имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.5.** *Динамическая подсистема $(\overline{\chi}_A, T)$ дискретной системы сдвига $(C, T)$ содержит минимальную подсистему, не совпадающую с $\{(0, 0, \dots)\}$, тогда и только тогда, когда множество $A \subset \mathbb{N}_0$ кусочно синдетическое.*

Напомним, что кусочно синдетические подмножества моноида $\mathbb{N}_0$ — это в точности пересечения синдетических и толстых множеств (см. упражнение на с. 33).

**Лемма 8.1.** *Множество $A \subset \mathbb{N}_0$ является кусочно синдетическим тогда и только тогда, когда существует синдетическое множество $S \subset \mathbb{N}_0$ с тем свойством, что для любого конечного множества $F \subset S$ найдётся $m = m_F \in \mathbb{N}_0$, для которого $F + m_F \subset A$.*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть $A$ удовлетворяет условию в лемме. Положим $\mathscr{F} = \{$все непустые конечные подмножества $\mathbb{N}_0\}$. Множество $S$ синдетическое $\implies$

$$S - F_1 = \bigcup_{t \in F_1} (-t + S) = \mathbb{N}_0 \text{ для некоторого } F_1 \in \mathscr{F}. \qquad (*)$$

Положим

$$T = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} (F + m_{(F+F_1)\cap S}) \qquad \text{и} \qquad S' = A \cup \mathbb{N}_0 \setminus T.$$

Ясно, что $A \supset S' \cap T$, причём множество $T$ толстое по теореме 5.4 о толстых множествах, пункт 2).

Покажем, что множество $S'$ синдетическое. Для этого достаточно проверить, что

$$\mathbb{N}_0 = S' - (F_1 \cup \{0\}) = S' \cup (S' - F_1).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, $n \notin S'$. Тогда $n \in T$, а значит, существует $F \in \mathscr{F}$, для которого $n \in F + m_{(F+F_1)\cap S}$. В силу $(*)$ для некоторого $l \in F_1$ выполнено включение

$$n - m_{(F+F_1)\cap S} + l \in S.$$

Имеем

$$n - m_{(F+F_1)\cap S} + l \in (F + F_1) \cap S,$$

откуда

$$n + l \in ((F + F_1) \cap S) + m_{(F+F_1)\cap S}$$

и, следовательно, $n + l \in A \subset S'$. Поскольку $l \in F_1$, окончательно получаем $n \in S' - F_1$.

*Необходимость.* Пусть множество $A$ кусочно синдетическое, т.е. $A = S' \cap T$, где $S'$ синдетическое и $T$ толстое. Надо найти синдетическое множество $S \subset \mathbb{N}_0$ с тем свойством, что для любого конечного множества $F \subset S$ существует $m_F \in \mathbb{N}_0$, для которого $F + m_F \subset A$.

Поскольку $S'$ синдетическое, существует конечное множество $E \subset \mathbb{N}_0$, для которого $S' - E = \mathbb{N}_0$. Положим

$$E_1 = E \quad \text{и} \quad E_i = \underbrace{E + E + \ldots + E}_{i \text{ раз}} \quad \text{для } i \in \mathbb{N}.$$

По теореме 5.4 о толстых множествах для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдётся $n_i \in \mathbb{N}_0$, для которого $n_i + \bigcup_{j \leqslant i} E_j \subset T$. Определим по индукции точки $s_j \in E_j$ и цепочку бесконечных множеств $\mathbb{N} \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ так, что $n_i + s_j \in S'$ для любых $j \in \mathbb{N}$ и $i \in I_j$.

По определению множества $E$ для каждого $n_i$ существует $l \in E$ такое, что $n_i \in S' - l$, т.е. $n_i + l \in S'$. Множество $E$ конечно, а число индексов $i$ бесконечно (хотя сами точки $n_i$ могут совпадать). Следовательно, найдутся $l_1 \in E$ и бесконечное множество $I_1 \subset \mathbb{N}_0$ такие, что $n_i + l_1 \in S'$ для всех $i \in I_1$. Положим $s_1 = l_1$.

Пусть $I_j$ и $s_j$ построены для $j < k$. Рассуждая как выше, выберем $l_k \in E$ и бесконечное множество $I_k \subset I_{k-1}$ такие, что для всех $i \in I_k$ имеем $n_i + s_{k-1} + l_k \in S'$, и положим $s_k = s_{k-1} + l_k$.

Положим $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Множество $S$ синдетическое, так как любые два соседних элемента отличаются не более чем на $\max E$ (см. пример на с. 31).

Если $j \leqslant i$ и $n_i \in I_k$ для $k \geqslant j$, то $n_i \in I_j$, так что $n_i + s_j \in T \cap S' = A$.

Пусть $F \subset S$ конечно, т.е. $F \subset \{s_1, \ldots, s_k\}$, где $k \in \mathbb{N}$. Поскольку множество $I_k$ бесконечно, найдётся $i \in I_k$, $i \geqslant k$. Для $j \leqslant k$ имеем $n_i + s_j = s_j + n_i \in A$. Значит, $F + n_i \subset A$. Осталось положить $m_F = n_i$. ∎

**Доказательство теоремы.** Пусть $A \subset \mathbb{N}_0$ кусочно синдетическое. В силу леммы существует синдетическое множество $S \subset \mathbb{N}_0$ такое, что для любого конечного множества $F \subset S$ имеем $F + m \subset A$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ пусть $m_n \in \mathbb{N}_0$ таково, что $(S \cap \{0, 1, \ldots n\}) + m_n \subset A$. Тогда $T^{m_n}\chi_A(k) \geqslant \chi_S(k)$ для всякого $k \leqslant n$. Следовательно, если $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ — любая предельная точка множества $\{T^{m_n}\chi_A : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \operatorname{orb}\chi_A$, то $x(k) \geqslant \chi_S(k)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Значит, $x$ — характеристическая функция множества, содержащего $S$. С другой стороны, $x \in \overline{\chi}_A = \overline{\operatorname{orb} \chi_A}$, так что $\overline{x} = \overline{\operatorname{orb} x} \subset \overline{\chi}_A$, потому что множество $\overline{\chi}_A$ инвариантно и замкнуто.

Пусть $Y$ — любая минимальная подсистема, содержащаяся в $\overline{x}$; тогда $Y \subset \overline{\chi}_A$. Покажем, что $(0, 0, \dots) \notin \overline{x}$. Положим $R = \{n \in \mathbb{N}_0 : x(n) = 1\}$. Это синдетическое множество (так как оно содержит синдетическое множество $S$). По определению синдетического множества найдётся $F \subset \mathbb{N}_0$, для которого $\mathbb{N}_0 = R - F$. Положим $U = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} : y|_F \equiv 0\}$. Это открытая окрестность точки $(0, 0, \dots)$. Предположим, что $T^n x \in U$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $x(n + m) = 0$ для каждого $m \in F$ в противоречие с тем, что $n = r - m$ для некоторых $r \in R$ и $m \in F$.

Обратно, пусть $(X, T)$ — минимальная подсистема в $(\overline{\chi}_A, T)$ (а значит, и в $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, T)$), не совпадающая с $\{(0, 0, \dots)\}$. Положим $U = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} : x(0) = 1\}$. Это открытое множество. Возьмём $x \in X$, $x \neq \{(0, 0, \dots)\}$. Если $x(0) = 1$, то $x \in U$. В противном случае мы можем сдвинуть в 0 координату, в которой $x$ принимает значение 1, многократным применением отображения $T$ к точке $x$. Значит, $U \cap \operatorname{orb} x \neq \varnothing$, причём $\operatorname{orb} x \subset X$, так как $X$ — подсистема.

Пусть $y \in U \cap X$. Тогда $\overline{y} = X$ (так как подсистема $X$ минимальна) и множество $S = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n y \in U\} = R(x, U)$ синдетическое по теореме 7.4 о синдетических множествах возврата. В силу только что доказанной леммы чтобы доказать, что $A$ кусочно синдетическое, достаточно показать, что для любого конечного множества $F \subset S$ существует $m \in \mathbb{N}_0$, для которого $F + m \subset A$.

Возьмём любое конечное множество $F \subset S$ и положим $V = \{x \in X : x(n) = 1 \text{ для } n \in F\}$. Это открытое множество, и оно содержит точку $y$ (т.е. является окрестностью $y$), так как $F \subset R(y, U)$. Поскольку $y \in X \subset \overline{\chi}_A = \overline{\operatorname{orb} \chi_A}$, имеем $V \cap \operatorname{orb} \chi_A \neq \varnothing$. Значит, существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $T^m \chi_A \in V$, т.е. $F + m \subset A$. ■

# Лекция 9
# Топологическое пространство $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

Напомним, что $\beta\mathbb{N}$ — множество всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$ и множество $\mathbb{N}$ отождествляется с его подмножеством, состоящим из главных ультрафильтров:

$$\mathbb{N} \ni n \equiv p_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A\}.$$

Положим $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — это множество всех неглавных ультрафильтров на $\mathbb{N}$. Базы топологий пространств $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ состоят из множеств

$$\overline{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\} \quad \text{и} \quad \overline{A}^* = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\}, \qquad A \subset \mathbb{N}.$$

## 9.1. Свойства пространств $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$

(См. разделы 2.1 и 2.2.)

① Множество всех главных ультрафильтров (которое отождествляется с $\mathbb{N}$)

- дискретно;
- открыто;
- всюду плотно в $\beta\mathbb{N}$.

② Для любого $A \subset \mathbb{N}$ множество $\overline{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}$ открыто-замкнуто в $\beta\mathbb{N}$ и $\overline{A}^* = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\} = \overline{A} \setminus \mathbb{N}$ открыто-замкнуто в $\mathbb{N}^*$.

③ Для всякого $A \subset \mathbb{N}$ множество $\overline{A}$ является замыканием множества $A \equiv \{p_n : n \in A\}$ в $\beta\mathbb{N}$, причём $\overline{A} \cap \mathbb{N} = A$. Отсюда и из ② вытекает, что если $A, B \subset \mathbb{N}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Действительно, поскольку $\overline{A}$ открыто и не пересекает $B$, а $\overline{B}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее $B$, имеем $\overline{B} \subset \beta\mathbb{N} \setminus \overline{A}$.

④ Пространства $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ хаусдорфовы.

⑤ Пространства $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ компактны.

⑥ Любое отображение $f\colon \mathbb{N} \to K$ множества $\mathbb{N}$ в любой хаусдорфов компакт $K$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta\mathbb{N} \to K$.

**Предложение 9.1.** *Свойство ⑥ — критерий: если $X$ счётно, $\hat{X}$ — хаусдорфов компакт, $X \subset \hat{X}$, $\overline{X} = \hat{X}$ (т.е. $X$ всюду плотно в $\hat{X}$) и любое отображение множества $X$ в любой хаусдорфов компакт $K$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{X} \to K$, то $\hat{X}$ и $\beta\mathbb{N}$* гомеоморфны *(неотличимы с точки зрения топологии), т.е. существует* гомеоморфизм $\hat{f}\colon \hat{X} \to \beta\mathbb{N}$ — *биекция такая, что оба отображения $\hat{f}$ и $\hat{f}^{-1}$ непрерывны; более того, этот гомеоморфизм переводит $X$ в $\mathbb{N}$ (а $\hat{X} \setminus X$ — в $\mathbb{N}^*$).*

**Доказательство.** Пользуясь тем, что множество $X$ счётно, как-нибудь занумеруем его точки: $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. По предположению отображение $f\colon X \to \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$, определённое правилом $x_n \mapsto n$, продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \hat{X} \to \beta\mathbb{N}$. Это биекция. Действительно, пусть $x, y \in \hat{X}$, $x \neq y$. У точек $x$ и $y$ есть непересекающиеся окрестности $U$ и $V$ — это вытекает из хаусдорфовости компакта $\hat{X}$. Для любой окрестности $W$ точки $x$ пересечение $W \cap U$ — тоже её окрестность, и поскольку $\overline{X} = \hat{X}$, имеем $(W \cap U) \cap X = W \cap (U \cap X) \neq \varnothing$. Значит, любая окрестность точки $x$ пересекает $U \cap X$, т.е. $x \in \overline{U \cap X}$. Аналогично, $y \in \overline{V \cap X}$. Поскольку $\hat{f}$ непрерывно, имеем $\hat{f}(x) \in \overline{\hat{f}(U \cap X)} = \overline{f(U \cap X)}$ (равенство следует из того, что $\hat{f}$ — продолжение отображения $f$) и $\hat{f}(y) \in \overline{\hat{f}(V \cap X)} = \overline{f(V \cap X)}$. Следовательно, $\overline{f(U \cap X)} \cap \overline{f(V \cap X)} = \varnothing$, так как $f(U \cap X) \cap f(V \cap X) = \varnothing$ (см. свойство ③). Значит, $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$.

Любое замкнутое множество $F \subset \hat{X}$ компактно. Значит, его непрерывный образ $\hat{f}(F)$ тоже компактен, а потому и замкнут в $\beta\mathbb{N}$. Значит, прообраз любого замкнутого множества $F$ при отображении $\hat{f}^{-1}$ замкнут, откуда $\implies$ $\hat{f}^{-1}$ непрерывно (см. упражнение 1 на с. 8). ■

Из свойства ⑥ вытекает, что если $K$ — хаусдорфов компакт и $D \subset K$ счётно и плотно в $K$, т.е. $\overline{D} = K$ (например, $K = [0,1]$ и $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$), то $|\beta\mathbb{N}| \geqslant |K|$.

Действительно, возьмём любую биекцию $\varphi\colon \mathbb{N} \to D$. В силу свойства ⑥ она продолжается до непрерывного отображения $\hat{\varphi}\colon \beta\mathbb{N} \to K$. Поскольку множество $\hat{\varphi}(\beta\mathbb{N})$ компактно, оно замкнуто в $K$, и поскольку оно содержит $\hat{\varphi}(\mathbb{N}) = \varphi(\mathbb{N}) = D$, оно содержит и $\overline{D} = K$. Значит, $\hat{\varphi}$ — сюръекция, откуда $|\beta\mathbb{N}| \geqslant |K|$.

Само пространство $\beta\mathbb{N}$ тоже является хаусдорфовым компактом, содержащим счётное плотное множество $\mathbb{N}$. Вывод:

$$|\beta\mathbb{N}| = \max\{|K| : \ K \text{ — хаусдорфов компакт, содержащий счётное плотное множество}\}.$$

**Лемма 9.1.** *Компакт $K = \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ (с тихоновской топологией произведения) содержит счётное всюду плотное множество.*

**Доказательство.** Положим $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (это множество всех функций $\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$). Тогда $K$ — это множество функций $f\colon C \to \{0,1\}$. Семейство $\mathscr{B}$ всех множеств вида

$$W_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \{f \in K : f(\varphi_i) = \varepsilon_i \text{ для всех } i \leqslant n\},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i \in 2^{\mathbb{N}}$ и $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ для $i \leqslant n$, образует базу топологии пространства $K$.

Рассмотрим семейство $\mathscr{U}$ всех подмножеств множества $C$ вида

$$U_N(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N) = \{\varphi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\} : \varphi(i) = \varepsilon_i \text{ для всех } i \leqslant N\},$$

где $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_i \in \{0,1\}$; оно счётно. Пусть $D$ — множество всех функций $f\colon C \to \{0,1\}$, для каждой из которых существуют попарно непересекающиеся множества $V_1,\dots,V_m \in \mathscr{U}$ с тем свойством, что $f$ постоянна на каждом множестве $V_i$, $i \leqslant m$, и на дополнении $C \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_m)$. Поскольку семейство $\mathscr{U}$ счётно, множество $D$ тоже счётно.

Покажем, что $D$ всюду плотно в $K$, т.е. любое непустое открытое подмножество $U$ пространства $K$ пересекает $D$. Любое такое подмножество содержит непустой элемент базы $W_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, причём можно считать, что все $\varphi_i$ различны. Выбирая для каждой пары функций $\varphi_i, \varphi_j$ по точке, в которой они принимают разные значения, найдём конечное множество $F = \{n_1,\dots,n_k\} \subset \mathbb{N}$ такое, что все сужения $\varphi_i|_F$ попарно различны. Пусть $N = \max\{n_1,\dots,n_k\}$, и пусть $\varepsilon^j_k = \varphi_j(k)$ для $k \leqslant N$ и $j \leqslant n$. Тогда множества $U_N(\varepsilon^j_1,\dots,\varepsilon^j_N)$ с разными $j \leqslant n$ не пересекаются, причём $\varphi_j \in U_N(\varepsilon^j_1,\dots,\varepsilon^j_N)$ для каждого $j \leqslant n$. Функция $f\colon C \to \{0,1\}$, определённая правилом

$$f(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon_j, & \text{если } \varphi \in U_N(\varepsilon^j_1,\dots,\varepsilon^j_N) \text{ для некоторого } j \leqslant n,\\ 0, & \text{если } \varphi \notin \bigcup\limits_{j \leqslant n} U_N(\varepsilon^j_1,\dots,\varepsilon^j_N), \end{cases}$$

принадлежит одновременно и множеству $W_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \subset U$, и множеству $D$. Из произвольности выбора непустого открытого множества $U$ следует, что $D$ плотно в $K$. ■

Напомним, что $\aleph_0$ — стандартное обозначение мощности $|\mathbb{N}|$ и $2^{|X|}$ — стандартное обозначение мощности множества $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств $X$ = множества $\{0,1\}^X$ всех функций $X \to \{0,1\}$.

**Лемма 9.2.** $|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

**Доказательство.** Каждый ультрафильтр на $\mathbb{N}$ — семейство подмножеств множества $\mathbb{N}$, т.е. подмножество множества $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$, т.е. элемент множества $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ всех подмножеств множества $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$. Мощность множества $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ равна $2^{2^{\aleph_0}}$, так что мощность его помножества $\beta\mathbb{N}$ не превосходит $2^{2^{\aleph_0}}$. ■

Из доказанных лемм вытекает такая теорема:

**Теорема 9.1.** $|\beta\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

**Теорема 9.2.** *Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \beta\mathbb{N}$ содержит подмножество, гомеоморфное пространству $\beta\mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Поскольку компакт $\beta\mathbb{N}$ хаусдорфов, существует точка $x_1 \in F$, у которой есть открытая в $\beta\mathbb{N}$ окрестность $U_1$ с бесконечным дополнением $F \setminus U_1$ в $F$ (если у всех окрестностей всех точек дополнения конечны, то все они попарно пересекаются), а поскольку $\beta\mathbb{N}$ регулярен, у точки $x_1$ есть открытая окрестность $V_1$ в $\beta\mathbb{N}$, для которой $\overline{V}_1 \subset U_1$. Множество $F \setminus U_1$ замкнуто и бесконечно, значит, в нём есть точка $x_2$, у которой имеется окрестность $U_2$ с бесконечным дополнением $(F \setminus U_1) \setminus U_2$ в $F \setminus U_1$ и открытая окрестность $V_2$, для которой $\overline{V}_2 \subset U_2 \setminus \overline{V}_1$.

Продолжая в том же духе, мы найдём последовательности точек $x_1, x_2, \dots \in F$ и открытых множеств $V_1, V_2, \dots$ в $\beta\mathbb{N}$ такие, что $x_i \in V_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Положим $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Покажем, что $\overline{X}$ гомеоморфно пространству $\beta\mathbb{N}$. В силу предложения 9.1 достаточно проверить, что любое отображение множества $X$ в хаусдорфов компакт $K$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{X} \to K$.

Возьмём отображение $g\colon X \to K$ и любую точку $x_0 \in K$. Отображение $g_{\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to K$, определённое правилом

$$g_{\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} g(x_i), & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap V_i, \\ x_0, & \text{если } n \in \mathbb{N} \cap \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} V_j \end{cases}$$

имеет непрерывное продолжение $\hat{g}_{\mathbb{N}}\colon \beta\mathbb{N} \to K$. Из того, что $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$ и все множества $V_i$ открыты, вытекает, что $\overline{V}_i = \overline{V_i \cap \mathbb{N}}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ (проверьте!). Постоянное отображение на $\overline{V}_i$, равное $g(x_i)$, совпадает с $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{V}_i}$; значит, $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{V}_i} \equiv g(x_i)$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_X = g$, и сужение $\hat{g}_{\mathbb{N}}|_{\overline{X}}$ является непрерывным продолжением отображения $g$ на $\overline{X}$. ■

**Следствие 9.1.** *Каждое бесконечное замкнутое множество $F \subset \mathbb{N}^*$ содержит подмножество, гомеоморфное пространству $\beta\mathbb{N}$.*

**Следствие 9.2.** *Компакты $\beta\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^*$ не содержат сходящихся последовательностей.*

**Доказательство.** Сходящаяся последовательность — счётный компакт. Всякое компактное подпространство в $\beta\mathbb{N}$ замкнуто и потому не может быть счётным в силу теорем 9.1 и 9.2. ■

**Определение 9.1.** Пространство $X$ *однородно*, если $\forall x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f\colon X \to X$ такой, что $f(x) = y$.

**Теорема 9.3.** *Пространство $\mathbb{N}^*$ неоднородно.*

Мы докажем это утверждение в предположении справедливости континуум-гипотезы, хотя оно верно из без этого предположения.

*Континуум-гипотеза CH* — утверждение, что мощность всякого несчётного множества не меньше $2^{\aleph_0}$. Континуум-гипотеза недоказуема и неопровержима, т.е. ни она сама, ни её отрицание не противоречат аксиомам теории множеств.

**Определение 9.2.** Точка $x$ топологического пространства $X$ называется *$P$-точкой*, если каковы бы ни были окрестности $U_1, U_2, \dots$ этой точки, их пересечение $\bigcap U_n$ тоже является её окрестностью (т.е. содержит открытую окрестность).

**Теорема 9.4** (Уолтер Рудин, 1956)**.** *В предположении CH пространство $\mathbb{N}^*$ содержит $P$-точку.*

Мы докажем эту теорему (и даже больше — что в предположении CH на $\mathbb{N}$ существуют селективные ультрафильтры, которые являются $P$-точками специального вида в $\mathbb{N}^*$) в 11-й лекции.

Ясно, что в однородном пространстве, содержащем хотя бы одну $P$-точку, все остальные точки тоже должны быть $P$-точками. То, что в компакте все точки не могут быть $P$-точками, вытекает из следующих замечаний.

*Замечание* 9.1.

1. Если все точки в пространстве $X$ являются $P$-точками, то пересечение счётного числа открытых множеств в $X$ открыто и, следовательно, объединение счётного числа замкнутых множеств замкнуто.
   Действительно, если $U_1, U_2, \dots$ открыты и $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, то все $U_n$ — окрестности точки $x$ и, значит, $x$ содержится в $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ вместе со своей открытой окрестностью.
2. В любом бесконечном хаусдорфовом компакте $K$ имеются точки, не являющиеся $P$-точками.
   Действительно, пусть $x_1, x_2, \dots \in K$ — попарно различные точки. Если все точки в $K$ являются $P$-точками, то $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ — замкнутые множества, и $\mathscr{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ — центрированное семейство замкнутых множеств с пустым пересечением. Дополнения до $F_n$ образуют открытое покрытие, у которого нет конечного подпокрытия.

Следующая проблема не решена до сих пор:

**Проблема** (Уолтер Рудин, 1956)**.** Верно ли, что всякий однородный компакт содержит сходящуюся последовательность?

## 9.2. *P*-точки в $\mathbb{N}^*$

**Теорема 9.5.** *Неглавный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ является $P$-точкой в $\mathbb{N}^*$ тогда и только тогда, когда для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ $\forall n$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| < \aleph_0$ $\forall n$.*

**Доказательство.** Ультрафильтр $\mathscr{U}$ удовлетворяет указанному условию тогда и только тогда, когда для любых $U_n \in \mathscr{U}$, $n \in \mathbb{N}$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $U \setminus U_n$ конечно для всех $n \in \mathbb{N}$ (достаточно рассмотреть разбиение $\mathbb{N}$ на множества $A_1 = \mathbb{N} \setminus U_1$ и $A_n = \mathbb{N} \setminus (U_n \cup \bigcup_{i<n} A_i)$, $n \in \mathbb{N}$).

*Необходимость.* Если $\mathscr{U}$ — $P$-точка в $\mathbb{N}^*$ и $U_n \in \mathscr{U}$, то $U = \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N})$ — окрестность точки $\mathscr{U}$ в $\mathbb{N}^*$. Пусть $V \in \mathscr{U}$, $\overline{V} \setminus \mathbb{N} \subset U$. Если $V \setminus U_n$ бесконечно, то существует $\mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$, для которого $V \setminus U_n \in \mathscr{V}$. Имеем $\mathscr{V} \in \overline{V} \setminus \mathbb{N}$ и $\mathscr{V} \notin \bigcap \overline{U}_n$, т.е. $\mathscr{V} \in \overline{V} \setminus \left(\bigcap \overline{U}_n\right)$ — противоречие.

*Достаточность.* Пусть $V_n$, $n \in \mathbb{N}$, — окрестности точки $\mathscr{U}$ в $\mathbb{N}^*$, и пусть для $n \in \mathbb{N}$ $U_n \in \mathscr{U}$ и $\overline{U}_n \setminus \mathbb{N} \subset V_n$ (такие $U_n$ существуют, потому что семейство $\{\overline{U} \setminus \mathbb{N} : U \in \mathscr{U}\}$ — база окрестностей точки $\mathscr{U}$ в $\mathbb{N}^*$). Возьмём элемент $U \in \mathscr{U}$, для которого все дополнения $U \setminus U_n$ конечны. Пусть $\mathscr{V} \in \overline{U} \setminus \mathbb{N}$. Тогда $U \in \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$. Если $U_n \notin \mathscr{V}$ для некоторого $n$, то $U \setminus U_n \in \mathscr{V}$ — противоречие (так как $\mathscr{V}$ неглавный). Значит, $U_n \in \mathscr{V}$ для всех $n$, т.е. $\mathscr{V} \in \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N})$.

Из произвольности выбора ультрафильтра $\mathscr{V} \in \overline{U} \setminus \mathbb{N}$ следует, что $\overline{U} \setminus \mathbb{N} \subset \bigcap(\overline{U}_n \setminus \mathbb{N}) \subset \bigcap V_n$. При этом $\overline{U} \setminus \mathbb{N}$ — окрестность точки $\mathscr{U}$ в пространстве $\mathbb{N}^*$. ■

# Лекция 10

# Типы неглавных ультрафильтров на $\mathbb{N}$. Порядок Рудин–Кейслера

## 10.1. Типы неглавных ультрафильтров на $\mathbb{N}$

**Определение 10.1.** Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ называется

- *$P$-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для каждого $n$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| < \aleph_0$ для каждого $n$;
- *$Q$-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все $A_n$ конечны, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant 1$ для каждого $n$;
- *селективным* (*рамсеевским*), если он $P + Q$: для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для каждого $n$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ (*селектор*) такой, что $|U \cap A_n| \leqslant 1$ для каждого $n$;
- *быстрым*, если для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все $A_n$ конечны, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n$ для каждого $n$.

Все разбиения множества $\mathbb{N}$ на бесконечное число подмножеств находятся во взаимно однозначном (с точностью до нумерации элементов разбиения) соответствии с отображениями $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: разбиению $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ соответствует отображение $f$, определённое условием $A_n = f^{-1}(\{n\})$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. В терминах отображений определения $P$-, $Q$- и селективных ультрафильтров выглядят так:

Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ является

- $P$-ультрафильтром, если для любого отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U = \mathrm{const}$, либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ конечнократно (= прообразы всех точек конечны);
- $Q$-ультрафильтром, если для любого конечнократного отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ взаимно однозначно;
- селективным, для любого отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U = \mathrm{const}$, либо элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $f|_U$ взаимно однозначно.

## 10.2. Порядок Рудин–Кейслера

*Порядок Рудин–Кейслера* — это отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на множестве всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$, которое определяется так: если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то

$$\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U} \quad \text{означает, что} \quad \exists f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{такое, что} \quad \mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U}).$$

Очевидно, что отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ рефлексивно и транзитивно.

**Определение 10.2.** Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Если существуют $U \in \mathscr{U}$ и $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f|_U$ взамно однозначно и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, то мы говорим, что ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ *эквивалентны*, и пишем $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$.

**Определение 10.2′.** Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ *эквивалентны*, если существует биекция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, т.е. $\mathscr{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ (или, что равносильно, $\mathscr{V} = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$).

*Замечание* 10.1. Если $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображения, $\mathscr{U} \in \beta\mathbb{N}$, $U \in \mathscr{U}$ и $f|_U \equiv g|_U$, то $\beta f(\mathscr{U}) = \beta g(\mathscr{U})$, так как

$$\beta f(\mathscr{U}) = \{A \subset \mathbb{N} : \exists B \in \mathscr{U},\ f(B) \subset A\} = \{A \subset \mathbb{N} : \exists B \in \mathscr{U},\ f(B \cap U) \subset A\} = \beta g(\mathscr{U}).$$

**Предложение 10.1.** *Приведённые выше определения эквивалентности равносильны.*

**Доказательство.** Поскольку множество $\mathbb{N}$ является элементом любого ультрафильтра на $\mathbb{N}$, достаточно проверить, что из условия в определении 10.2 вытекает условие в определении 10.2 $'$, т.е. что если $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \beta\mathbb{N}$ и существуют $U \in \mathscr{U}$ и $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f|_U$ взамно однозначно и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, то существует биекция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $\beta g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$.

Если $\mathscr{U}$ главный, т.е. $\bigcap \mathscr{U} = \{n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap \beta f(\mathscr{U}) = \bigcap \mathscr{V} = \{f(n)\}$, и годится любая биекция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со свойством $g(n) = f(n)$.

Пусть $\mathscr{U}$ неглавный. Тогда $U \in \mathscr{U}$ бесконечно. Как-нибудь разобъём его: $U = U_1 \sqcup U_2$, где $U_1$ и $U_2$ бесконечны. В силу основного свойства ультрафильтров одно из них (пусть $U_1$) принадлежит $\mathscr{U}$. Положим $V_1 = f(U_1) \in \mathscr{V}$. $\mathbb{N} \setminus U_1$ и $\mathbb{N} \setminus V_1$ бесконечны, так как $f|_U$ инъективно. Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \setminus U_1 \to \mathbb{N} \setminus V_1$ — любая биекция. Положим $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in U_1, \\ \varphi(x), & \text{если } x \in \mathbb{N} \setminus U_1. \end{cases}$ Отображение $g$ — искомая биекция согласно замечанию 10.1. ∎

**ВЫВОД.** *Отношение* $\equiv_{\mathrm{RK}}$ *является отношением эквивалентности.*

Наша ближайшая цель — показать, что отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ — порядок на классах эквивалентных ультрафильтров (они называются *типами* ультрафильтров).

Рефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны. Осталось проверить его антисимметричность, т.е. что ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$.

Для этого понадобятся леммы.

**Лемма 10.1.** *Пусть* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *таково, что* $f(n) \neq n$ *для* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда найдутся множества* $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{N}$ *такие, что*

(1) $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для* $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, *и*

(3) $A_i \cap f(A_i) = \varnothing$ *для* $i \leqslant 3$.

**Доказательство.** Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{N}$:

$$s \sim t \iff f^n(s) = f^m(t) \quad \text{для некоторых } n, m \geqslant 0.$$

(Здесь, как обычно, $f^i(j) = \underbrace{f(f(...(f(j))...))}_{i \text{ раз}}$ и $f^0(j) = j$.)

Пусть $\mathscr{R}$ — множество $\sim$-классов. Ясно, что если $R \in \mathscr{R}$, то $f(R) \subset R$. Для $R \in \mathscr{R}$ есть две возможности.

*Случай 1.* Найдутся $s_R \in R$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $f^n(s_R) = s_R$. Заметим, что $n \neq 1$. Зафиксируем $s_R$ и положим

$$n_R = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(s_R) = s_R\} \quad \text{и} \quad C_R = \{f^k(s_R) : 0 \leqslant k < n_R\}.$$

Имеем $\{f^n(s_R) : n \geqslant 0\} = C_R$. Значит, для всякого $s \in R \setminus C_R$ существуют $k < n_R$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $f^m(s) = f^k(s_R)$. Для $s \in R \setminus C_R$ положим

$$k(s) = \min\{k < n_R : \exists m \in \mathbb{N} \text{ такое, что } f^m(s) = f^k(s_R)\},$$
$$m(s) = \min\{m \in \mathbb{N} : f^m(s) = f^{k(s)}(s_R)\}.$$

Покажем, что если $s \in R \setminus C_R$ и $m(s) > 1$, то

$$k(f(s)) = k(s) \qquad \text{и} \qquad m(f(s)) = m(s) - 1. \tag{$\star$}$$

Ясно, что $k(s) \leqslant k(f(s))$, так как если $f^p(f(s)) = f^q(s_R)$, то $f^{p+1}(s) = f^q(s_R)$, так что $k(s) \leqslant q$. Из равенства $f^{k(s)}(s_R) = f^{m(s)-1}(f(s))$ следует, что $k(s) \leqslant k(f(s))$ (а значит, $k(s) = k(f(s))$) и $m(f(s)) \leqslant m(s) - 1$, и из равенств $f^{k(f(s))}(s_R) = f^{m(f(s))}(f(s)) = f^{m(f(s))+1}(s)$ и $f^{k(f(s))}(s_R) = f^{k(s)}(s_R) = f^{m(s)}(s)$ следует, что $m(s) \leqslant m(f(s)) + 1$.

Положим

$$A_{R,1} = \{f^k(s_R) : k \text{ чётно и } 0 \leqslant k < n_R - 1\} \cup \{s \in R \setminus C_R : k(s) + m(s) \text{ чётно}\},$$

$$A_{R,2} = \{f^k(s_R) : k \text{ нечётно и } 0 < k < n_R - 1\} \cup \{s \in R \setminus C_R : k(s) + m(s) \text{ нечётно}\},$$

$$A_{R,3} = \{f^{n_R-1}(s)\}.$$

Имеем $R = A_{R,1} \cup A_{R,2} \cup A_{R,3}$ и $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$.

Если $s \in A_{R,i}$ и $s \in C_R$, то $f(s) \in C_R$ и $f(s) \notin A_{R,i}$ для $i \leqslant 3$.

Если $s \in A_{R,1} \setminus C_R$ и $m(s) = 1$, то $f(s) = f^{k(s)}(s_R)$ для нечётного $k(s) < n_R$, так что либо $f(s) \in A_{R,2}$, либо $f(s) \in A_{R,3}$.

Если $s \in A_{R,2} \setminus C_R$ и $m(s) = 1$, то $f(s) = f^{k(s)}(s_R)$ для чётного $k(s) < n_R$, так что либо $f(s) \in A_{R,1}$, либо $f(s) \in A_{R,3}$.

Если $s \in A_{R,i} \setminus C_R$, где $i \in \{1, 2\}$, и $m(s) > 1$, то $f(s) \notin A_{R,i}$ в силу $(\star)$.

*Случай 2:* Случай 1 не имеет места. Зафиксируем любое $s_R \in R$. Для всякого $s \in R$ существуют $k, m \geqslant 0$ такие, что $f^m(s) = f^k(s_R)$. Для $s \in R$ положим

$$k(s) = \min\{k \geqslant 0 : \exists m \geqslant 0 \text{ такое, что } f^m(s) = f^k(s_R)\},$$
$$m(s) = \min\{m \geqslant 0 : f^m(s) = f^{k(s)}(s_R)\}.$$

Если $m(s) = 0$, т.е. $s = f^{k(s)}(s_R)$, то $k(f(s)) = k(s) + 1$, так как $f(s) = f^{k(s)+1}(s_R)$ и $f^{k(s)+1}(s_R)$ не равно $f^i(s_R)$ ни для какого $i \neq k(s) + 1$ (иначе имеет место случай 1) и $m(f(s)) = 0$.

Если $m(s) > 0$, то $f^{m(s)-1}(f(s)) = f^{k(s)}(s_R)$, так что $k(f(s)) \leqslant k(s)$. Ясно, что $k(f(s))$ не может быть меньше $k(s)$: если $j < k(s)$ и $f^i(f(s)) = f^j(s_R)$, то $f^{i+1}(s) = f^j(s_R)$ в противоречие с минимальностью числа $k(s)$. Значит, $k(f(s)) = k(s)$ и $m(f(s)) = m(s) - 1$ (в силу минимальности числа $m(s)$).

Вывод: $k(s) + m(s)$ чётно тогда и только тогда, когда $k(f(s)) + m(f(s))$ нечётно.

Положим

$$A_{R,1} = \{s \in R : k(s) + m(s) \text{ чётно}\},$$

$$A_{R,2} = \{s \in R : k(s) + m(s) \text{ нечётно}\},$$

$$A_{R,3} = \varnothing.$$

Имеем $R = A_{R,1} \cup A_{R,2} \cup A_{R,3}$, $A_{R,i} \cap A_{R,j} = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, и $A_{R,i} \cap f(A_{R,i}) = \varnothing$ для $i \leqslant 3$.

Для завершения доказательства леммы осталось положить $A_i = \bigcup\{A_{R,i} : R \in \mathscr{R}\}$ для $i \leqslant 3$. ■

**Лемма 10.2.** *Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение и $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Тогда $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{U} \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\} \in \mathscr{U}$.*

**Доказательство.** Положим $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$. Сужения отображений $\beta f$ ($= \hat{f}\colon \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ — непрерывное продолжение $f$ на $\beta\mathbb{N}$) и $\mathrm{id}_{\beta\mathbb{N}}$ на $\overline{A}$ непрерывны на $\overline{A}$ и совпадают на $A$; значит, они совпадают и на $\overline{A}$. Если $A \in \mathscr{U}$, то $\mathscr{U} \in \overline{A}$ и $\beta f(\mathscr{U}) = \mathrm{id}_{\beta\mathbb{N}}(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$. Пусть $A \notin \mathscr{U}$. Тогда $\mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{U}$ и $f(n) \neq n$ для $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Пусть $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — любое отображение, которое совпадает с $f$ на $\mathbb{N} \setminus A$ и удовлетворяет условию $f'(n) \neq n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (например, можно положить $f'|_A \equiv \{a\}$ для какой-нибудь точки $a \in \mathbb{N} \setminus A$). В силу замечания 10.1 имеем $\beta f(\mathscr{U}) = \beta f'(\mathscr{U})$. По лемме 10.1 существуют $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{N}$ такие, что $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, и $A_i \cap f'(A_j) = \varnothing$ для $i \leqslant 3$. Поскольку $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, имеем $A_i \in \mathscr{U}$ для $i = 1$, 2 или 3. Следовательно, $\mathscr{U} \in \overline{A}_i$. Из непрерывности продолжения $\hat{f}' = \beta f'$ отображения $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$ на $\beta\mathbb{N}$ вытекает, что $\beta f'(\mathscr{U}) = \hat{f}'(\mathscr{U}) \in \hat{f}'\overline{(A_i)} \subset \overline{\hat{f}'(A_i)} = \overline{f'(A_i)} \subset \overline{\bigcup\{A_j : j \leqslant 3, j \neq i\}}$. Значит, $\beta f'(\mathscr{U}) \neq \mathscr{U}$, и в силу замечания 10.1 $\beta f(\mathscr{U}) \neq \mathscr{U}$. Противоречие. ■

*Замечание* 10.2. Для любых отображений $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ имеем $\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \beta g(\beta f(\mathscr{U}))$.

Действительно,

$$\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \{A : (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{U}\},$$

$$\beta f(\mathscr{U}) = \{A : f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\},$$

$$\beta g(\beta f(\mathscr{U})) = \{A : g^{-1}(A) \in \beta f(\mathscr{U})\} = \{A : f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathscr{U}\}.$$

Осталось заметить, что $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

**Теорема 10.1.** *Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$.*

**Доказательство.** Ясно, что из отношения $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ вытекают отношения $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$ (см. определение 10.2′).

Если $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то найдутся $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$ и $\beta g(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$. Значит, $\beta(g \circ f)(\mathscr{U}) = \beta g(\beta f(\mathscr{U})) = \beta g(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$, и по лемме **??** $A = \{n \in \mathbb{N} : (g \circ f)(n) = n\} \in \mathscr{U}$. Сужение $(g \circ f)|_A$ инъективно; следовательно, сужение $f|_A$ тоже инъективно, откуда $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ (по определению). ■

На самом деле порядок Рудин–Кейслера определён для любых ультрафильтров на любых множествах: ультрафильтры $\mathscr{U}$ на множестве $X$ и $\mathscr{V}$ на множестве $Y$ находятся в отношении $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, если существует отображение $f\colon X \to Y$ такое, что $\mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U})$. Отношение эквивалентности $\equiv_{\mathrm{RK}}$ определяется в общем случае так же, как в случае ультрафильтров на $\beta\mathbb{N}$, и по-прежнему $\mathscr{U} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$.

**Предложение 10.2.** *Каждый неглавный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ имеет ровно $2^{\aleph_0}$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников.*

**Доказательство.** Число всех отображений $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ равно $2^{\aleph_0}$ (оно не превосходит $2^{\aleph_0}$ потому, что каждое отображение $f$ — подмножество счётного множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, и оно не меньше $2^{\aleph_0}$ потому, что уже отображения $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами множества $\mathbb{N}$, которых ровно $2^{\aleph_0}$ штук). Значит, мощность множества всех $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественников ультрафильтра $\mathscr{U}$ не превосходит $2^{\aleph_0}$. Покажем, что она не меньше $2^{\aleph_0}$.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выберем бесконечное множество $A_\alpha \subset \mathbb{N}$ так, что если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ разные, то пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ конечно. Это множества можно построить так. Перенумеруем все рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выберем последовательность попарно различных рациональных чисел, сходящуюся к $\alpha$. Обозначим через $A_\alpha$ множество номеров рациональных чисел, попавших в эту последовательность. Ясно, что последовательности, сходящиеся к разным числам, могут иметь лишь конечное число совпадающих элементов.

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ зафиксируем биекцию $f_\alpha\colon \mathbb{N} \to A_\alpha$ и положим $\mathscr{U}_\alpha = \beta f_\alpha(\mathscr{U})$. Имеем $\mathscr{U}_\alpha \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$ для $\alpha \in \mathbb{R}$. Все ультрафильтры $\mathscr{U}_\alpha$ неглавные (так как ультрафильтр является неглавным тогда и только тогда, когда все его элементы бесконечны, ультрафильтр $\mathscr{U}$ неглавный и все отображения $f_\alpha$ — биекции) и попарно различны (так как $A_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$ и если $\alpha \neq \beta$, то $A_\alpha \cap A_\beta$ конечно и не может принадлежать неглавному ультрафильтру), и все они являются $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-предшественниками ультрафильтра $\mathscr{U}$. ■

**Теорема 10.2** (M. E. Rudin + S. Shelah)**.** *Существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно несравнимых ультрафильтров на $\mathbb{N}$.*

*Замечание* 10.3. Класс $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-эквивалентности (тип) любого главного ультрафильтра счётен и состоит из всех главных ультрафильтров, а класс $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-эквивалентности любого неглавного ультрафильтра имеет мощность $2^{\aleph_0}$ (это доказывается точно так же, как предложение 10.2 — построенные в его доказательстве ультрафильтры $\mathscr{U}_\alpha$ эквивалентны ультрафильтру $\mathscr{U}$). Следовательно, существует $2^{2^{\aleph_0}}$ разных типов ультрафильтров. Более того, существует $2^{2^{\aleph_0}}$ попарно несравнимых типов ультрафильтров.

# Лекция 11
# Свойства специальных типов ультрафильтров на $\mathbb{N}$ и их существование

## 11.1. $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-Минимальность селективных ультрафильтров

**Теорема 11.1.** 1. *Если $\mathscr{U}$ — $P$-ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является $P$-ультрафильтром.*

2. *Если $\mathscr{U}$ — селективный ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является селективным; более того, $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. Таким образом, селективные ультрафильтры (точнее, их типы) $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-минимальны.*

**Доказательство.** 1. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где $A_n \notin \mathscr{V}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{-1}(A_n) \notin \mathscr{U}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ по определению отображения $\beta f$.

Поскольку $\mathscr{U}$ — $P$-ультрафильтр, существует $U \in \mathscr{U}$, для которого все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ конечны. Ясно, что все пересечения $f(U) \cap A_n$ тоже конечны, и при этом $f(U) \in \mathscr{V}$.

2. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где $A_n \notin \mathscr{V}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^{-1}(A_n) \notin \mathscr{U}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку ультрафильтр $\mathscr{U}$ селективен, существует $U \in \mathscr{U}$, для которого все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ не более чем одноточечны. Ясно, что $f|_U$ взаимно однозначно. Это означает, что $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. ■

## 11.2. Порядок Рудин–Бласса

*Порядок Рудин–Бласса* — это отношение $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ на множестве всех ультрафильтров на $\mathbb{N}$, которое определяется так: если $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то

$$\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U} \quad \text{означает, что } \exists \text{ конечнократное отобажение} \quad f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{такое, что} \quad \mathscr{V} = \beta f(\mathscr{U}).$$

Ясно, что отношение $\leqslant_{\mathrm{RB}}$ рефлексивно и транзитивно. Это порядок на типах ультрафильтров согласно следующей теореме:

**Теорема 11.2.** *Ультрафильтры $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$.*

**Доказательство.** Необходимость ясна из определения 10.2′ эквивалентности, а достаточность вытекает из теоремы 10.1 и того, что если $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{V}$ или $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то, очевидно, $\mathscr{U} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{V}$ или, соответственно, $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. ■

## 11.3. $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-Минимальность $Q$-ультрафильтров

**Теорема 11.3.** 1. *Если $\mathscr{U}$ — быстрый ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является быстрым ультрафильтром.*

2. *Если $\mathscr{U}$ — $Q$-ультрафильтр и $\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathscr{U}$, то $\mathscr{V}$ тоже является $Q$-ультрафильтром; более того, $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. Таким образом, $Q$-ультрафильтры (точнее, их типы) $\leqslant_{\mathrm{RB}}$-минимальны.*

**Доказательство.** 1. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конечнократное отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где все $A_n$ конечны. Тогда все прообразы $f^{-1}(A_n)$ тоже конечны. Поскольку ультрафильтр $\mathscr{U}$ быстрый, существует $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap f^{-1}(A_n)| \leqslant n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $|f(U) \cap A_n| \leqslant n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конечнократное отображение, для которого $\beta f(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, и пусть $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$, где все $A_n$ конечны. Тогда все прообразы $f^{-1}(A_n)$ тоже конечны. Поскольку $\mathscr{U}$ — $Q$-ультрафильтр, существует $U \in \mathscr{U}$, для которого все пересечения $U \cap f^{-1}(A_n)$ не более чем одноточечны, т.е. $f|_U$ взаимно однозначно. Это означает, что $\mathscr{V} \equiv_{\mathrm{RK}} \mathscr{U}$. ■

**Схема доказательства неоднородности некоторых компактов**

Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства *сходится по ультрафильтру* $\mathscr{W}$ к точке $x$, если для любой окрестности $U$ этой точки множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathscr{W}$. В компакте любая последовательность сходится к некоторой точке по любому ультрафильтру.

Пусть ультрафильтры $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \mathbb{N}^*$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимы, и пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретная последовательность попарно различных точек хаусдорфова компакта $K$. Она сходится по ультрафильтру $\mathscr{U}$ к точке $x$, а по ультрафильтру $\mathscr{V}$ — к точке $y$. Если компакт $K$ однороден, то существует гомеоморфизм $h\colon K \to K$ такой, что $h(y) = x$. Пусть $h(x_n) = y_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — дискретная последовательность попарно различных точек. Пользуясь регулярностью хаусдорфова компакта $K$, нетрудно разделить точки дискретного множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ попарно непересекающимися окрестностями, и такие же окрестности есть у точек $y_n$. Если компакт $K$ таков, что для любых счётных множеств $A, B \subset K$ пересекающимися замыканиями $\overline{A}$ и $\overline{B}$ либо $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$, либо $\overline{B} \cap A \neq \varnothing$ (компакт $\mathbb{N}^*$ обладает этим свойством), то с помощью этих систем окрестностей нетрудно построить отображение ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$ или наоборот в противоречие с несравнимостью этих ультрафильтров.

На этом рассуждении основано одно из доказательств неоднородности компакта $\mathbb{N}^*$. Другое можно найти, например, в книге «Основы общей топологии в задачах и упражнениях» А.В. Архангельского и В.И. Пономарева (см. задачу 187 на с. 363).

## 11.4. Существование специальных типов ультрафильтров на $\mathbb{N}$

В предположении справедливости континуум-гипотезы CH существуют селективные ультрафильтры, а также существуют $P$-ультрафильтры, которые не являются $Q$-ультрафильтрами, $Q$-ультрафильтры, которые не являются $P$-ультрафильтрами, и быстрые ультрафильтры, которые не являются ни $P$-, ни $Q$-ультрафильтрами.

Без дополнительных теоретико-множественных предположений существуют ультрафильтры, которые не являются ни $P$-ультрафильтрами, ни $Q$-ультрафильтрами.

Шелах доказал непротиворечивость несуществования $P$-ультрафильтров. Другими словами, он доказал, что при некоторых дополнительных теоретико-множественных предположениях, не противоречащих стандартной системе аксиом ZFC теории множеств (= построил модель ZFC, в которой) не существует $P$-ультрафильтров (но существуют $Q$-ультрафильтры).

Миллер построил модель ZFC, в которой нет быстрых и, тем более, $Q$-ультрафильтров (но есть $P$-ультрафильтры).

Остаётся нерешённой следующая очень старая проблема:

**Проблема.** Существует ли модель ZFC, в которой нет ни $P$-ультрафильтров, ни $Q$-ультрафильтров?

## 11.5. Рамсеевские ультрафильтры

**Определение 11.1.** Ультрафильтр $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ называется *рамсеевским*, если для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^k \to \{1, \dots, m\}$ существует $U \in \mathscr{U}$ такое, что $c|_{[U]^k} = \mathrm{const}$. (Напомним, что такие множества $U$ называются *однородными*, или *c-однородными*.)

**Теорема 11.4.** *Для ультрафильтра $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ следующие условия равносильны:*

① $\mathscr{U}$ *рамсеевский;*

② *у любой последовательности* $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *элементов* $\mathscr{U}$ *имеется* квазидиагональное пересечение *в* $\mathscr{U}$ *— множество* $U \in \mathscr{U}$ *такое, что для любого* $n \in U$ *выполнено условие* $n \in \bigcap\limits_{i<n, i\in U} U_i$*, т.е.* $U \subset \bigcap\limits_{i\in U}(\{1,\dots,i\}\cup U_i)$*;*

③ $\mathscr{U}$ *селективный.*

**Доказательство.** ① ⇒ ③: Пусть $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ рамсеевский и $\mathbb{N} = \bigsqcup\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i$, где $C_i \notin \mathscr{U}$. Рассмотрим раскраску $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$, определённую правилом:

$$c(\{i,j\}) = 1 \text{ для } i<j \quad \Longleftrightarrow \quad i\in C_n,\ j\in C_m \text{ и } n<m.$$

Пусть $U \in \mathscr{U}$ — однородное множество. Предположим, что $c|_{[U]^2} \equiv 0$. Положим $k = \min U$ (наименьший элемент множества $U$, которое состоит из натуральных чисел). Число $k$ принадлежит одному из множеств $C_i$, потому что их объединение равно $\mathbb{N}$. Пусть $k \in C_n$. Для каждого $i \in U$, $i \neq k$, имеем $i \in C_1 \cup\dots\cup C_n$ по определению раскраски $c$. По основному свойству ультрафильтров (следствие 1.1) существует элемент $U' \in \mathscr{U}$ такой, что $U' \subset C_m$ для некоторого $m < k$, т.е. $C_m \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $C_m \notin \mathscr{U}$. Значит, $c|_{[U]^2} \equiv 1$. Из определения раскраски $c$ видно, что $U$ — селектор.

③ ⇒ ②: Пусть $U_i \in \mathscr{U}$, $i \in \mathbb{N}$, и $U_0 = \mathbb{N}$. Можно считать, что $U_{i+1} \subset U_i$. Положим $C_i = U_{i-1} \setminus U_i \notin \mathscr{U}$. Имеем $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$. Из селективности ультрафильтра $\mathscr{U}$ вытекает существование элемента $B \in \mathscr{U}$, для которого все разности $B \setminus U_i$, $i \in \mathbb{N}$, конечны. Положим

$$f(m) = \min\{n : B\setminus U_m \subset \{1,\dots,n\}\}$$

для $m \in \mathbb{N}$. Получили функцию $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Она не убывает, поскольку $U_i \subset U_j$ для $i \geqslant j$. Положим $C_0 = \mathbb{N}\setminus B$ и $C_k = \{b \in B : f^{k-1}(1) < b \leqslant f^k(1)\}$ для $k \in \mathbb{N}$ (считаем, что $f^0(1) = 0$). Из селективности ультрафильтра $\mathscr{U}$ вытекает существование элемента $U' \in \mathscr{U}$ такого, что $|U' \cap C_i| \leqslant 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$; можно считать, что $U' \subset B$. Пусть $U' = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $a_{n+1} > a_n$. Из основного свойства ультрафильтров следует, что либо $U = \{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$, либо $V = \{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{U}$. Предположим, что имеет место первый случай (во втором рассуждения аналогичны).

Пусть $i, j \in U$, $i < j$. Предположим, что $i \in C_k$ (тогда $k$ должно быть чётным). По определению множества $C^k$ имеем $i \leqslant f^k(1)$. Поскольку $C^k$ содержит не более одной точки из $U'$ и $U \subset U'$, $j \in C_m$ для некоторого $m \neq k$. Все точки из $C_n$ для $n < k$ находятся левее всех точек из $C^k$. Значит, $m > k$, потому что $j > i$. Из того, что $j \in U$, следует, что $m$ чётно, откуда $m \geqslant k+2$. Значит, $j > f^{k+1}(1) = f(f^k(1)) \geqslant f(i)$. Поскольку $j \in B$, имеем $j \in U_i$.

② ⇒ ①: Надо доказать, что если выполнено ②, то для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^k \to \{1,\dots,m\}$ существует однородное множество $U \in \mathscr{U}$. Применим индукцию по $k$. Для $k = 1$ однородное множество $U \in \mathscr{U}$ всегда есть в силу основного свойства ультрафильтров. Пусть $k > 1$ и для $l < k$ оно существует у всякой раскраски $[\mathbb{N}]^l \to \{1,\dots,m\}$, и пусть $c\colon [\mathbb{N}]^k \to \{1,\dots,m\}$ — любая раскраска.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим раскраску $c_n\colon [\mathbb{N}]^{k-1} \to \{1,\dots,m\}$, определённую правилом

$$c_n(\{n_1,\dots,n_{k-1}\}) = \begin{cases} c(\{n\}\cup\{n_1,\dots,n_{k-1}\}), & \text{если } n \notin \{n_1,\dots,n_k\},\\ 1, & \text{если } n \in \{n_1,\dots,n_k\}.\end{cases}$$

По индуктивному предположению для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $U_n \in \mathscr{U}$ и $j_n \in \{1,\dots,m\}$ такие, что $c_n|_{[U_n]^{k-1}} = j_n$. Можно считать, что $\min U_n > n$ и $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $U' \in cU$ — квазидиагональное пересечение для $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пользуясь основным свойством ультрафильтров, найдём $j \leqslant m$ и $U \in \mathscr{U}$, $U \subset U'$, такие, что $j_n = j$ для всех $n \in U$. Ясно, что $U$ однородно: если $\{n_1 < \dots < n_k\} \subset U \subset U'$, то $n_2, \dots, n_k \in U_{n_1}$ и $c_{n_1}(\{n_2,\dots,n_k\}) = c(\{n_1,\dots,n_k\}) = j$. ■

*Замечание* 11.1. Из доказательства теоремы видно, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$ является рамсеевским тогда и только тогда, когда для любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ существует $U \in \mathscr{U}$ такое, что $c|_{[U]^2} = \mathrm{const}$.

### Транфинитная индукция и трансфинитная рекурсия

Напомним, что по теореме Цермело всякое множество можно вполне упорядочить (порядок полон, если он линеен и у любого непустого подмножества есть минимальный элемент). Методы доказательства по индукции и определения по рекурсии легко обобщаются на произвольные вполне упорядоченные множества; обобщения называются *доказательство по трансфинитной индукции* и *определение по трансфинитной рекурсии.*

Пусть $(A, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $0$ наименьший элемент $A$. Для $\alpha \in A$ положим $[0, \alpha) = \{\beta \in A : \beta < \alpha\}$ и $[0, \alpha] = \{\beta \in A : \beta \leqslant \alpha\}$.

*Трансфинитная индукция*

Для каждого $\alpha \in A$ пусть $P(\alpha)$ — некоторое утверждение. Предположим, что $P(0)$ верно и для любого $\alpha \in A$ из справедливости утверждений $P(\beta)$ для всех $\beta < \alpha$ следует справедливость утверждения $P(\alpha)$. Тогда $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha \in A$ — иначе множество $\{\alpha \in A : P(\alpha)$ неверно $\}$ непусто, и взяв его минимальный элемент, мы приходим к противоречию.

*Трансфинитная рекурсия*

Пусть $B$ — произвольное множество и имеется отображение $F$, которое ставит в соответствие каждому $\alpha \in A$ и каждому $g\colon [0, \alpha) \to B$ некоторый (единственный) элемент множества $B$. Отображение $F$ трактуется как правило построения элемента $F(\alpha) = B$ исходя из уже построенных элементов $F(\beta) \in B$ для $\beta < \alpha$. Отображения $g$ как раз и изображают всевозможные множества уже построенных элементов. Мы не знаем, каковы множества $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$, но каковы бы они ни были, они изображаются отображением $g$, которое определено правилом $g(\beta) = F(\beta)$ для всех $\beta \in [0, \alpha)$, так что для любого такого множества мы знаем, как построить $F(\alpha)$.

Принцип транфинитной рекурсии утверждает, что существует единственное отображение $f\colon A \to B$ такое, что

$$f(\alpha) = F(\alpha, f|_{[0,\alpha)}) \qquad \forall \alpha \in A. \tag{$\star$}$$

**Доказательство.** Если $A = \{0\}$, то доказывать нечего. Пусть $A \neq \{0\}$. Докажем по трансфинитной индукции, что для всех $\alpha_0 \in A$ справедливо утверждение

$P(\alpha_0)$ : $\qquad \exists!$ отображение $f_{\alpha_0}\colon [0, \alpha_0] \to B$ такое, что $(\star)$ выполнено при всех $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Утверждение $P(0)$ верно. Пусть $\alpha_0 > 0$ и $P(\alpha)$ верно для всех $\alpha < \alpha_0$. Для любых $\alpha, \beta < \alpha_0$, $\alpha < \beta$, имеем $f_\beta|_{[0,\alpha]} = f_\alpha$ (иначе $f_\alpha$ не единственно). Каждое отображение $f_\alpha$ — подмножество произведения $[0, \alpha] \times B \subset [0, \alpha_0) \times B$. Объединив все $f_\alpha$ по $\alpha < \alpha_0$ и положив $f_{\alpha_0}(\alpha_0) = F(\alpha_0, f|_{[0,\alpha_0)})$, получим отображение $f_{\alpha_0}\colon [0, \alpha_0] \to B$. Для каждого $\alpha < \alpha_0$ сужение $f_{\alpha_0}|_{[0,\alpha]}$ совпадает с единственным (по индуктивному предположению) отображением $f_\alpha$, и значение $f_{\alpha_0}(\alpha_0)$ определено однозначно. Значит, отображение $f_{\alpha_0}$ единственно.

Объединив все $f_\alpha$, $\alpha \in A$, мы получим требуемое отображение $f$. Оно единственно: если $f' \neq f$ — отображение со свойством $(\star)$, то, рассмотрев наименьшее $\alpha \in A$, для которого $f'(\alpha) \neq f(\alpha)$, придём к противоречию. ■

**Теорема 11.5.** *В предположении справедливости CH существует рамсеевский ультрафильтр на* $\mathbb{N}$.

**Доказательство.** Пусть $(A, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество мощности $2^{\aleph_0}$ с наименьшим элементом $0$, и пусть $\omega_1$ — наименьший элемент $A$, для которого множество $[0, \omega_1)$ несчётно. Из CH (континуум-гипотезы) вытекает, что $|[0, \omega_1)| = 2^{\aleph_0}$. Мощность множества всех раскрасок $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$ тоже равна $2^{\aleph_0}$.

Заиндексируем все раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$: $\{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Возьмём бесконечное $c_0$-однородное множество $U_0 \subset \mathbb{N}$ (оно сущесвует по теореме Рамсея). Пусть $\alpha > 0$ и мы уже построили бесконечные множества $U_\beta$, $\beta < \alpha$, так, что

(i) если $\beta, \gamma < \alpha$ и $\beta < \gamma$, то $U_\gamma \subset^* U_\beta$ (т.е. $U_\gamma \setminus U_\beta$ конечно);

(ii) $U_\beta$ $c_\beta$-однородно для всякого $\beta < \alpha$.

Если луч $[0,\alpha)$ конечен, то положим $U'_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} U_{\beta_n}$. Если нет, то он счётен (по определению элемента $\omega_1$), так что мы можем перенумеровать все $\beta < \alpha$ натуральными числами: $[0,\alpha) = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Выберем по точке в каждом пересечении $\bigcap\limits_{n\leqslant k} U_{\beta_n}$, $k \in \mathbb{N}$ (все эти пересечения непусты и даже бесконечны в силу условия (ii)). Получим бесконечное множество $U'_\alpha \subset \mathbb{N}$ такое, что $U'_\alpha \subset^* U_\beta$ $\forall \beta < \alpha$. Возьмём $c_\alpha$-однородное бесконечное множество $U_\alpha \subset U'_\alpha$ (оно существует по теореме Рамсея).

Семейство $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ центрировано и содержит $c$-однородное множество для любой раскраски $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$. Ультрафильтр, содержащий это семейство, искомый в силу замечания 11.1. ■

**Следствие 11.1.** *В предположении справедливости CH существуют P-, Q-, селективные и быстрые ультрафильтры на* $\mathbb{N}$.

# Лекция 12
# Быстрые ультрафильтры

## 12.1. Быстрые ультрафильтры

**Теорема 12.1** (о быстрых ультрафильтрах). *Для ультрафильтра $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ следующие условия равносильны:*

① *$\mathscr{U}$ быстрый, т.е. для любого разбиения $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все $A_n$ конечны, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n$ для каждого $n$;*

② *существует функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любой последовательности $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ найдётся элемент $U \in \mathscr{U}$ со свойством $|U \cap P_n| \leqslant h(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*

1. *для любой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует возрастающая функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со свойствами $f(n) < g(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{U}$.*

**Доказательство.** ① ⇒ ②: Пусть множества $P_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, конечны, и пусть $P'_n \supset P_n$ — конечные множества со свойством $\bigcup P'_n = \mathbb{N}$. Положим $A_1 = P'_1$ и $A_{n+1} = P'_{n+1} \setminus (\bigcup_{i\leqslant n} P'_n)$. Тогда $\mathbb{N} = \bigsqcup A_n$ и $P'_n \subset \bigcup_{i\leqslant n} A_i$.

Поскольку ультрафильтр $\mathscr{U}$ быстрый, в нём есть элемент $U \in \mathscr{U}$ такой, что $|U \cap A_n| \leqslant n$ для всех $n$. Имеем

$$|U \cap P_n| \leqslant |U \cap P'_n| \leqslant \sum_{i\leqslant n} |U \cap A_i| \leqslant \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Значит, годится отображение $h\colon n \mapsto \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

② ⇒ ③: Можно считать, что функции $h$ и $f$ возрастают. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$ так, что $h(k+1) < n_k$. Положим $P_k = \{1, 2, \ldots, f(n_k)\}$ для $k \in \mathbb{N}$. Выберем элемент $U \in \mathscr{U}$, для которого $|U \cap P_k| \leqslant h(k)$. Положим $V = U \setminus P_1$. Тогда $V \in \mathscr{U}$ и если $m \in V$, то $m \geqslant n_1$, а значит, $n_k \leqslant m < n_{k+1}$ для некоторого $k$, так что $f(m) < f(n_{k+1})$. Следовательно,

$$|V \cap \{1, \ldots, f(m)\}| \leqslant |V \cap P_{k+1}| \leqslant h(k+1) < n_k \leqslant m. \tag{$*$}$$

Занумеровав элементы множества $V$ в порядке возрастания, получим последовательность — функцию $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $V = \{g(1), g(2), \ldots\}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $g$ возрастает, пересечение $V \cap \{1, \ldots, f(n)\}$ имеет вид $\{g(1), \ldots, g(k)\}$, причём $k < n$ согласно $(*)$. Имеем $g(n) > g(k)$. Значит, $g(n) > f(n)$.

③ ⇒ ①: Положим $f(n) = \max(\bigcup_{i\leqslant n} A_i)$. Пусть функция $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $g(n) > f(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{U}$. Тогда $A_n \cap g(\mathbb{N}) \subset \{g(1), \ldots, g(n)\}$. ■

## 12.2. Тензорное произведение ультрафильтров

**Определение 12.1.** Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — ультрафильтры на $\mathbb{N}$. Семейство

$$\mathscr{U} \otimes \mathscr{V} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}\}$$

подмножеств декартова произведения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ называется *тензорным произведением* ультрафильтров $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$.

Семейство $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ является фильтром на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Чтобы это увидеть, надо проверить выполнение свойств ①–③ из определения фильтра. Очевидно, все элементы этого семейства непусты, так что свойство ① выполнено. Пусть $A_1, A_2 \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$. Тогда $B_1 = \{n : \{m : (n,m) \in A_1\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$ и $B_2 = \{n : \{m : (n,m) \in A_2\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$. Положим $B = B_1 \cap B_2$. Поскольку $\mathscr{U}$ — фильтр, имеем $B \in \mathscr{U}$, причём для каждого $n \in B$ $C_1(n) = \{m \in \mathbb{N} : \{(n,m) \in A_1\} \in \mathscr{V}$ и $C_2(n) = \{m \in \mathbb{N} : \{(n,m) \in A_2\} \in \mathscr{V}$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $C(n) = C_1(n) \cap C_2(n)$. Поскольку $\mathscr{V}$ — фильтр, имеем $C(n) \in \mathscr{V}$, причём для каждого $n \in B$ $C(n) \subset \{m \in \mathbb{N} : \{(n,m) \in A_1 \cap A_2\}$, откуда $\{m \in \mathbb{N} : \{(n,m) \in A_1 \cap A_2\} \in \mathscr{V}$. Значит, $B \subset \{n : \{m : (n,m) \in A_1 \cap A_2\} \in \mathscr{V}\}$, откуда $\{n : \{m : (n,m) \in A_1 \cap A_2\} \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$, а значит, $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$. Это доказывает выполнение свойства ②. Выполнение свойства ③ очевидно.

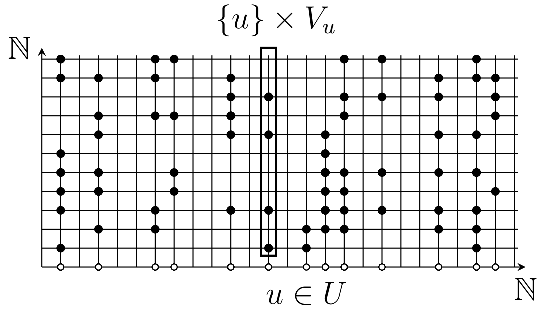
Из основного свойства ультрафильтров вытекает, что фильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ является ультрафильтром. Действительно, пусть $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A(n) = \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in A\}$. Заметим, что $A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$, если и только если $B = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$. Если $A \notin \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$, то $B \notin \mathscr{U}$, а значит,

$$\mathbb{N} \setminus B = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \notin \mathscr{V}\} = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A(n) \in \mathscr{V}\} = \{n \in \mathbb{N} : ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus A)(n) \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U},$$

т.е. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{U}$.

Легко видеть, что базу ультрафильтра $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ составляют множества вида

$$\bigcup_{u \in U} (\{u\} \times V_u), \quad \text{где } U \in \mathscr{U} \text{ и } V_u \in \mathscr{V} \text{ для } u \in U.$$




Вспомним, что в определениях специальных типов ультрафильтров на $\mathbb{N}$ никак не использовались специфические структуры на множестве натуральных чисел, а использовалась лишь счётность этого множества. Поскольку множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ тоже счётно, на нём тоже определены все четыре типа неглавных ультрафильтров.

**Теорема 12.2.** *Для любого ультрафильтра $\mathscr{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ быстрый.*

**Доказательство.** Ясно, что ультрафильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ неглавный (т.е. все его элементы бесконечны).

Пусть $C_k \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и все $C_k$ конечны. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $C_k \subset \{1, \ldots, n_k\} \times \{1, \ldots, n_k\}$. Существует $V \in \mathscr{V}$, для которого $|\{1, \ldots, n_k\} \cap V| \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$: надо взять функцию $f \colon k \mapsto n_k$, найти возрастающую функцию $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $g(k) > f(k)$ и $g(\mathbb{N}) \in \mathscr{V}$ (см. пункт ③ теоремы 12.1 о быстрых ультрафильтрах), и положить $V = g(\mathbb{N})$. Пусть $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times \{m : m \in V,\ m \geqslant n_k\}$; тогда $A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ и

$$\begin{aligned} A \cap C_k \subset A \cap \{1, \ldots, n_k\} \times \{1, \ldots, n_k\} &\subset \\ \subset \bigcup_{i \leqslant n_k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \ldots, n_k\}) &\subset \\ &\subset \bigcup_{i \leqslant k} \{i\} \times (V \cap \{n_i, \ldots, n_k\}) \end{aligned}$$

(считаем, что $\{n_i, \ldots, n_k\} = \varnothing$ для $i > k$). Это объединение имеет мощность $\leqslant k^2$ для всякого $k$. По теореме 12.1 о быстрых ультрафильтрах ультрафильтр $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ быстрый. ■

**Следствие 12.1.** *Для любого ультрафильтра $\mathscr{U}$ и любого быстрого ультрафильтра $\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ ультрафильтр $\mathscr{U}+\mathscr{V}$ на $\mathbb{N}$ быстрый.*

**Доказательство.** База ультрафильтра $\mathscr{U}+\mathscr{V}$ состоит из множеств вида $\bigcup\{u+V_u : u \in U\}$, где $U \in \mathscr{U}$ и $V_n \in \mathscr{V}$, — образов элементов базы тензорного произведения $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ при отображении $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (сложении чисел). Ясно, что отображение $+$ конечнократно. ■

**Следствие 12.2.** *Множество быстрых ультрафильтров — левый идеал в $\mathbb{N}^*$.*

**Следствие 12.3.** *Если существует быстрый ультрафильтр, то существует и быстрый ультрафильтр, являющийся минимальным идемпотентом.*

**Доказательство.** Поскольку $\mathbb{N}^*$ — замкнутая (а значит, и компактная) подполугруппа в $\beta\mathbb{N}$, по второй теореме о компактных полугруппах в $\mathbb{N}^*$ имеется замкнутый минимальный левый идеал, состоящий из быстрых ультрафильтров. Всякий замкнутый идеал является замкнутой (а значит, компактной) подполугруппой, так что по первой теореме о компактных полугруппах в нём есть идемпотент; он минимален по теореме 5.3 о минимальных идемпотентах. ■

**Предложение 12.1.** 1. *Ультрафильтры вида $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ для $\mathscr{U},\mathscr{V}\in\mathbb{N}^*$ не бывают $Q$-ультрафильтрами.*

2. *$Q$-Ультрафильтры не бывают идемпотентами.*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим разбиение множества $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на конечные подмножества

$$A_n = \{n\}\times\{m : m \leqslant n\} \quad \text{и} \quad B_n = \{m : m < n\}\times\{n\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $W = \bigcup\limits_{u\in U}(\{u\}\times V_u) \in \mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$, где $U\in\mathscr{U}$ и $V_u\in\mathscr{V}$, и пусть $u_1, u_2 \in U$, $u_1 < u_2$. Пересечение $V_{u_1}\cap V_{u_2}$ бесконечно, так как ультрафильтр $\mathscr{V}$ неглавный. Пусть $v \in V_{u_1}\cap V_{u_2}$, $v > u_2$. Тогда $(u_1, v), (u_2, v) \in B_v \cap W$.

2. Пусть $\mathscr{U}\in\mathbb{N}^*$ — идемпотент. Из леммы 2.1 перед теоремой Хиндмана следует, что для каждого $U\in\mathscr{U}$ существует последовательность $(a_n)_n$ такая, что $a_i < a_j$ для $i < j$ и $FS\big((a_n)_n\big) \subset U$. Значит, для каждого $U\in\mathscr{U}$ существует $k\in\mathbb{N}$ такое, что для всякого $n\in\mathbb{N}$ найдутся $n_1, n_2, n_3 \in U$, удовлетворяющие условиям $n_1, n_2, n_3 > n$ и $|n_i - n_j| \leqslant k$ (например, $k = a_3$ и $n_i = a_i + a_m$ для достаточно большого $m$). Если $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$ и $C_i$ — интервалы растущей длины (например, $C_i = \{2^{i-1}, 2^{i-1}+1, \ldots, 2^i - 1\}$), то для достаточно большого $i$ (а именно, для такого, что $|C_i| \geqslant k$) множество $C_i$ содержит по меньшей мере две точки из $U$ — это либо точки $n_1$ и $n_2$, либо точки $n_2$ и $n_3$. ■

**Предложение 12.2.** 1. *Ультрафильтры вида $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ для $\mathscr{U},\mathscr{V}\in\mathbb{N}^*$ не бывают $P$-ультрафильтрами.*

2. *$P$-Ультрафильтры не бывают идемпотентами.*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим разбиение множества $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на подмножества $\{n\}\times\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть

$$W = \bigcup_{u\in U}(\{u\}\times V_u) \in \mathscr{U}\otimes\mathscr{V}, \quad \text{где } U\in\mathscr{U} \text{ и } V_u\in\mathscr{V}.$$

Тогда $W\cap\{n\}\times\mathbb{N}$ бесконечно для всякого $n\in U$.

2. Если $\mathscr{U}$ — $P$-ультрафильтр-идемпотент, то $\mathscr{U}+\mathscr{U}=\mathscr{U}$, и из непрерывности сложения по первому аргументу следует, что любая окрестность точки $\mathscr{U}$ содержит множество вида $\overline{A}+\mathscr{U} \supset A+\mathscr{U}$, где $A\subset\mathbb{N}$. Значит, ультрафильтр $\mathscr{U}$ (как точка пространства $\mathbb{N}^*$) принадлежит замыканию множества $\{n+\mathscr{U} : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{N}^*$. Однако $P$-ультрафильтр $\mathscr{U}$ является $P$-точкой и не может быть предельной точкой никакого счетного множества $X = \{\mathscr{U}_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{N}^*$, где $\mathscr{U}_n \ne \mathscr{U}$, так как для окрестностей $U_n = \mathbb{N}^*\setminus\{\mathscr{U}_n\}$ точки $\mathscr{U}$ пересечение $U = \bigcap U_n$ — тоже окрестность, и $U\cap X = \varnothing$. ■

Во втором пункте мы доказали немного больше, чем утверждается в формулировке предложения:

*Если $\mathscr{U} \in \mathbb{N}^*$ не является предельной точкой никакого счётного множества $X \subset \mathbb{N}^*$, то $\mathscr{U}$ не идемпотент.*

Кроме того, неглавный ультрафильтр на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ с аналогичным свойством не может иметь вид $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ для неглавного $\mathscr{V}$, так как любой элемент $A \in \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ содержит множество вида $\{n\} \times V$, где $V \in \mathscr{V}$, а значит, принадлежит неглавному ультрафильтру $\{p_n\} \otimes \mathscr{V}$, т.е. $\{p_n\} \otimes \mathscr{V} \in \overline{A}$. Каждая окрестность ультрафильтра $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ содержит окрестность вида $\overline{A}$, так что $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ — предельная точка счётного множества $\{\{p_n\} \otimes \mathscr{V} : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^*$.

Точка топологического пространства, которая не является предельной точкой никакого счётного множества, называется *слабой $P$-точкой.*

**Теорема 12.3** (K. Kunen)**.** *В $\mathbb{N}^*$ существует по меньшей мере $2^{\aleph_0}$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-несравнимых слабых $P$-точек.*

В этой теореме никакие дополнительные теоретико-множественные предположения не требуются.

# Лекция 13
# Незамкнутые дискретные множества в топологических группах. Ординалы и кардиналы

## 13.1. Незамкнутые дискретные множества в счётных группах

Ниже все топологические группы предполагаются отделимыми.

**Теорема 13.1** (В.И. Малыхин, 1975). *Если верна континуум-гипотеза, то существует счётная недискретная топологическая группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты.*

*Вопрос:* существует ли такая группа без дополнительных теоретико-множественных предположений?

*Ответ:* нет.

**Теорема 13.2** (О.В.С., 2016). *Если не существует быстрых ультрафильтров, то любая счётная недискретная топологическая группа содержит дискретное подмножество с единственной предельной точкой.*

Нам понадобится определение быстрого фильтра на счётном множестве, которое дословно повторяет определение быстрого ультрафильтра:

**Определение 13.1.** Фильтр $\mathscr{F}$ на счётном множестве $X$ называется *быстрым*, если для любого разбиения $X = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где все $A_n$ конечны, существует $F \in \mathscr{F}$ с тем свойством, что $|F \cap A_n| \leqslant n$ для каждого $n$.

*Замечание* 13.1. Фильтр является быстрым тогда и только тогда, когда быстрым является любой содержащий его ультрафильтр.

*Замечание* 13.2. Фильтр $\mathscr{F}$ на $X$ небыстрый, если и только если для любой функции $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует последовательность конечных множеств $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n \subset X$, такая, что для всякого $F \in \mathscr{F}$ имеем $|F \cap P_n| > h(n)$ при некотором $n$.

(Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 12.1 о быстрых ультрафильтрах.)

**Определение 13.2.** Скажем, что множество $M$ в группе $G$ с единицей 1 *жирное*, если $1 \in M$ и существует $m \in \mathbb{N}$ (*жирность* множества $M$) такое, что для любого $m$-элементного множества $F \subset G$ существуют различные $x, y \in F$ с тем свойством, что $x^{-1} \cdot y \in M$ и $y^{-1} \cdot x \in M$.

Любая подгруппа конечного индекса — жирное множество.

**Предложение 13.1.** *Если $W \subset G$, $W = W^{-1}$ и $g \cdot W \cap W^2 = \varnothing$, то $M = G \setminus g \cdot W$ — жирное множество (и $m = 4$).*

**Доказательство.** Если для $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ нарушено условие жирности множества $M$, то для любого $i = 2, 3, 4$ либо (1) $x_1^{-1} \cdot x_i \notin M$, либо (2) $x_i^{-1} \cdot x_1 \notin M$, причём одно из условий (1) и (2) выполнено по меньшей мере для двух разных $i$ (в силу принципа Дирихле). Пусть для определённости $x_1^{-1} \cdot x_2 \notin M$ и $x_1^{-1} \cdot x_3 \notin M$. Тогда $x_1^{-1} \cdot x_2 \in g \cdot W$ и $x_1^{-1} \cdot x_3 \in g \cdot W$, так что

$$(x_1^{-1} \cdot x_2)^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot x_3 = x_2^{-1} \cdot x_3 \in W^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g \cdot W = W^2 \subset M.$$

Поскольку $W^{-1} = W$, имеем также $x_3^{-1} \cdot x_2 \in W^2 \subset M$. ■

**Лемма 13.1.** *Пусть $G$ — группа и $M \subset G$ — жирное множество. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что всякое $N$-элементное множество $P \subset G$ содержит $n$-элементное множество $Q \subset P$ со свойством $Q^{-1} \cdot Q \subset M$.*

**Доказательство.** Пусть $M$ имеет жирность $m$. Возьмём $k \geqslant \max\{m, n\}$. Из конечной версии теоремы Рамсея, применённой к счётному множеству $G$, вытекает существование числа $N \in \mathbb{N}$ такого, что для всякого $N$-элементного множества $P \subset G$ и любой раскраски $c\colon [P]^2 \to \{0,1\}$ существует $k$-элементное однородное множество $Q \subset P$.

Возьмём $N$-элементное множество $P \subset G$ и рассмотрим раскраску $c\colon [P]^2 \to \{0,1\}$, определённую правилом

$$c(\{x,y\}) = 0 \iff x^{-1} \cdot y \in M \text{ и } y^{-1} \cdot x \in M.$$

Пусть $Q \subset G$ — $k$-элементное однородное множество (т.е. $c|_{[Q]^2} = \mathrm{const}$). Поскольку жирность $m$ множества $M$ не превосходит $k$, для некоторых $x, y \in Q$ имеем $c(\{x,y\}) = 0$. Значит, $\mathrm{const} = 0$, т.е. $x^{-1} \cdot y \in M$ для любых $x, y \in Q$. ■

**Теорема 13.3.** *Пусть $G$ — любая группа и $M$, $M_1$ и $M_2$ — жирные множества. Тогда*

(1) *множество $M^{-1}$ жирное;*

(2) *пересечение $M_1 \cap M_2$ жирное;*

(3) *любое множество $P \supset M$ жирное.*

*(В частности, в любой недискретной группе семейство жирных множеств образует фильтр.)*

**Доказательство.** Утверждения (1) и (3) верны по определению жирных множеств. Докажем (2).

Пусть множество $M_1$ имеет жирность $m_1$ и $M_2$ имеет жирность $m_2$. Из леммы 13.1, применённой к $M_2$ и $m_1$, вытекает существование $N \in \mathbb{N}$ такого, что всякое множество $P \subset G$ с $|P| \geqslant N$ содержит $m_1$-элементное подмножество $Q$ со свойством $Q^{-1} \cdot Q \subset M_2$. Поскольку $|Q| = m_1$, из определения жирного множества следует, что для некоторых $x, y \in Q$ имеем $x^{-1} \cdot y \in M_1$ и $y^{-1} \cdot x \in M_1$. Из того, что $Q^{-1} \cdot Q \subset M_2$, получаем $x^{-1} \cdot y \in M_1 \cap M_2$ и $y^{-1} \cdot x \in M_1 \cap M_2$. ■

**Лемма 13.2.** *Пусть $G$ — счётная группа, $\mathscr{F}$ — небыстрый фильтр на $G$ и $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность жирных множеств. Тогда существует множество $D \subset G \setminus \{1\}$ со свойствами*

(1) *$D \setminus M_n$ конечно для всех $n$;*

(2) *для всякого $F \in \mathscr{F}$ найдутся различные $a, b \in F$ такие, что $a^{-1} \cdot b \in D$.*

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что $M_{n+1} \subset M_n$ и $M_n^{-1} = M_n$. Пусть $m_n$ — жирность множества $M_n$. Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ небыстрый, согласно замечанию 13.2 существует последовательность $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конечных подмножеств $G$ с тем свойством, что для всякого $F \in \mathscr{F}$ имеем $|F \cap P_n| > m_n$ при некотором $n$. Положим

$$D_n = \{g^{-1} \cdot h : g, h \in P_n,\ g \neq h,\ g^{-1} \cdot h \in M_n\} \quad \text{и} \quad D = \bigcup D_n.$$

Проверим выполнение свойства (1). Из того, что все множества $D_k$ конечны, причём $D_k \subset M_k$ и $M_{k+1} \subset M_k$ для каждого $k$ следует, что дополнение $D \setminus M_n \subset \bigcup\limits_{k<n} D_k$ конечно для каждого $n$.

Проверим выполнение свойства (2). Пусть $F \in \mathscr{F}$. Имеем $|F \cap P_n| > m_n$ для некоторого $n$. Поскольку множество $M_n$ жирное и $m_n$ — его жирность, существуют различные $a, b \in F \cap P_n$, для которых $a^{-1} \cdot b \in M_n$. По определению множеств $D_n$ имеем $a^{-1} \cdot b \in D_n$. ■

**Теорема 13.4.** *Любая счётная недискретная топологическая группа $G$, в которой фильтр $\mathscr{F}$ окрестностей единицы небыстрый, содержит незамкнутое дискретное множество с единственной предельной точкой 1.*

**Доказательство.** Пусть $G = \{1, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмём окрестность единицы $U_n$ такую, что $g_n \notin U_n$. Пусть $V_n$ — открытая окрестность 1 такая, что $V_n = V_n^{-1}$ и $V_n \cdot V_n \cdot V_n \subset U_n$ (она существует, так как взятие обратного и умножение непрерывны, $1^{-1} = 1$ и $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$). Тогда $g_n \cdot V_n \cap V_n \cdot V_n = \varnothing$. Из предложения 13.1 вытекает, что множество $M_n = G \setminus (g_n \cdot V_n)$ жирное. При этом все множества $M_n$ замкнуты и $\bigcap M_n = \{1\}$. Возьмем то же множество $D$, что в теореме 13.3. Каждая точка $g \in G \setminus \{1\}$ не принадлежит некоторому множеству $M_n$; значит, $G \setminus M_n$ — её открытая окрестность, содержащая лишь конечное число точек из $D$, откуда следует, что $D$ дискретно и точки $g \neq 1$ не являются предельными для $D$.

Для любой окрестности единицы $U$ существует окрестность единицы $V$ такая, что $V^{-1} \cdot V \subset U$. Значит, любая окрестность единицы содержит множество $F^{-1} \cdot F$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, а значит, пересекает $D$. ■

**Следствие 13.1.** *С системой аксиом теории множеств* ZFC *совместимо утверждение: любая счётная недискретная топологическая группа содержит незамкнутое дискретное множество, единственной предельной точкой которого является единица группы.*

## 13.2. Ординалы и кардиналы

При рассмотрении ультрафильтров и других объектов на несчётном множестве удобно зафиксировать на нём полный порядок. Кантор поставил в соответствие каждому множеству $X$ его *мощность* (кардинал), которую можно трактовать как класс всех множеств, связанных с $X$ биекцией, а каждому вполне упорядоченному множеству — его *порядковый тип* (ординал), который можно трактовать как класс всех множеств, связанных с $X$ биекцией, сохраняющей порядок (такие биекции называются *порядковыми изоморфизмами*).

В современной теории множеств ординалы отождествляются с конкретными каноническими представителями классов множеств одного порядкового типа, а кардиналы — с ординалами специального вида.

С точки зрения теории множеств всё, с чем мы имеем дело, — множества, например, элементы множеств, отношения и отображения (это подмножества декартовых произведений области определения и области значений), а также числа.

Согласно аксиоме бесконечности существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом $x$ содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ (это множество, элементами которого являются все элементы множества $x$ и само множество $x$). Наименьшее (по включению) такое множество обозначается $\omega$ или $\mathbb{N}_0$ — это множество неотрицательных целых чисел:

$0 = \varnothing$,

$1 = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$,

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

$4 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,

. . . . . .

Для операции $S\colon n \mapsto n \cup \{n\}$ на множестве $\omega$ используется обозначение +1: $S(n) = n + 1$.

Имея натуральные числа, легко определить целые и рациональные (как пары целых), а затем и вещественные (например, как дедекиндовы сечения множеств рациональных чисел).

Множество $\omega$ обладает следующими свойствами:

- Множество $\omega$ *строго вполне упорядочено отношением принадлежности* $\in$: для $x, y \in \omega$ $x < y \iff x \in y$.
- Множество $\omega$ *транзитивно*, т.е. $x \in \omega$, $y \in x \implies y \in \omega$.

**Определение 13.3.** Транзитивное множество, строго вполне упорядоченное отношением $\in$, называется *ординалом*.

В силу аксимы регулярности (любое непустое множество $x$ содержит элемент $y$, для которого $y \cap x = \varnothing$) всякий ординал содержит $\varnothing$ в качестве элемента.

Можно доказать, что

- для всякого вполне упорядоченного множества существует ординал того же порядкового типа,
- разные ординалы имеют разные порядковые типы,
- если $\alpha$ и $\beta$ — разные ординалы, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$.

Таким образом, не только сами ординалы, но и любое множество ординалов строго вполне упорядочено отношением $\in$.

Мы пишем $\alpha < \beta$, если $\alpha \in \beta$, и $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Множество $\omega$ — наименьший бесконечный ординал, оно представляет собой множество всех конечных ординалов.

Применив операцию $S$ к $\omega$, мы получим ординал

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}.$$

Его наибольший элемент — $\omega$. Последовательно применяя операцию $S$, получим $\omega + 2$, $\omega + 3$, $\ldots$ . Через бесконечное число шагов получим ординал $\omega + \omega = \omega \cup \{\omega + n : n \in \omega\}$. Ординалы, которые получаются через несчётное число шагов, уже нельзя записать с помощью символа $\omega$ и знаков арифметических операций. Наименьший несчётный ординал обозначается $\omega_1$ и представляет собой множество всех счётных ординалов.

Каждый ординал представляет собой множество всех меньших ординалов, и каждый ординал $\alpha$ либо является объединением всех меньших ординалов, либо имеет вид $\beta + 1$ для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Ординалы первого типа называются *предельными*, ординалы второго типа — *изолированными*.

Наименьший ординал обозначается 0. По определению ординалов каждый ординал $\alpha$ совпадает с левым лучом $[0, \alpha) = \{\beta : \beta \text{ — ординал}, \beta < \alpha\}$, однако в дальнейшем мы будем использовать привычное обозначение $[0, \alpha)$.

**Определение 13.4.** Ординал, мощность которого не равна (т.е. строго больше) мощности никакого меньшего ординала, называется *кардиналом*.

Поскольку всякое вполне упорядоченное множество находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым ординалом и любое множество можно вполне упорядочить, каждый класс равномощных множеств содержит (единственный) кардинал.

Кардиналы и ординалы удобно брать в качестве канонических представителей классов множеств одного порядкового типа и одной мощности соответственно.

Для наших нужд достаточно того, что *кардинал* — это вполне упорядоченное множество $(\kappa, \leqslant)$ со свойством

$$\forall \alpha \in \kappa \quad |\{\beta \in \kappa : \beta < \alpha\}| < |\kappa|, \tag{$\star$}$$

а *ординалы* — его элементы. Этого хватает благодаря известной теореме об изоморфизме (или сравнении) вполне упорядоченных множеств (см., например, уже упоминавшуюся книгу *Начала теории множеств* Н.К. Верещагина и А. Шеня):

**Теорема 13.5** (Теорема об изоморфизме)**.** *Пусть $(X, \leqslant)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ — любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует $x_* \in X$ такой, что левый луч $\{x \in X : x < x_*\}$ множества $X$ порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству $Y$, либо существует $y_* \in Y$ такой, что вполне упорядоченное множество $X$ порядково изоморфно левому лучу $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ множества $Y$, либо сами множества $(X, \leqslant)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ порядково изоморфны.*

Символ 0 обозначает наименьший ординал, а $\alpha + 1$ — наименьший ординал, больший $\alpha$. Мы будем обозначать мощность кардинала $\kappa$ тем же символом $\kappa$.

*Замечание* 13.3. В силу теоремы об изоморфизме каждое множество мощности меньше $\kappa$ равномощно левому лучу $[0, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in \kappa$.

Кроме того, в силу теоремы Цермело любое множество равномощно некоторому кардиналу.

Кардинал $\lambda$, следующий непосредственно за $\kappa$ (для которого не существует множества $X$, удовлетворяющего условию $\kappa < |X| < \lambda$), обозначается $\kappa^+$.

*Замечание* 13.4. Кардинал $\kappa^+$ существует для любого кардинала $\kappa$.

Действительно, по теореме Кантора мощность множества $\mathscr{P}(\kappa)$ всех подмножеств множества $\kappa$ строго больше $\kappa$. Пусть $\lambda$ — кардинал, $\lambda = |\mathscr{P}(\kappa)|$. Если $|[0,\alpha)| < \kappa$ для всех $\alpha \in \lambda$, то $\lambda = \kappa^+$. В противном случае существует наименьший ординал $\alpha \in \lambda$, для которого $|[0,\alpha)| > \kappa$, и $\kappa^+ = [0,\alpha)$.

Наименьший бесконечный кардинал обозначается $\aleph_0$ или $\omega$, $\aleph_0^+ = \omega^+$ обозначается $\aleph_1$ или $\omega_1$, следующий кардинал — $\aleph_2$ или $\omega_2$ и т.д. Наименьший кардинал, больший всех $\aleph_n = \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\aleph_\omega$ или $\omega_\omega$.

Как и выше, мы называем ординал $\alpha \in \kappa$ *изолированным*, если у него имеется непосредственный $\leqslant$-предшественник, и *предельным* в противном случае. Аналогично определяются *предельные кардиналы*: $\kappa$ предельный, если $\kappa \neq \lambda^+$ для $\lambda < \kappa$.

*Замечание* 13.5. На множестве $\kappa$ (как и на любом линейно упорядоченном множестве) имеется *порядковая топология*, базу которой составляют *интервалы* $(\alpha,\beta) = \{\gamma \in \kappa : \alpha < \gamma < \beta\}$ и *левые лучи* $[0,\alpha) = \{\gamma \in \kappa : \gamma < \alpha\}$ (если бы в $\kappa$ был наибольший элемент, то следовало бы ещё добавить правые лучи $\{\gamma \in \kappa : \alpha < \gamma\}$).

Ординал $\alpha \in \kappa$ изолирован тогда и только тогда, когда точка $\alpha$ изолирована (т.е. множество $\{\alpha\}$ открыто) в порядковой топологии на множестве $\kappa$, и $\alpha$ пределен тогда и только тогда, когда точка $\alpha$ предельна в порядковой топологии.

Пусть $I$ — любое множество и $\alpha_\iota$, $\iota \in I$, — ординалы. *Супремум* множества ординалов $\{\alpha_\iota : \iota \in I\}$ — это наименьший ординал $\alpha$ со свойством $\alpha_\iota \leqslant \alpha$ для всех $\iota \in I$; обозначение: $\alpha = \sup\limits_{\iota \in I} \alpha_\iota$.

*Замечание* 13.6. Ординал $\alpha \in \kappa$ является предельной точкой множества $C \subset \kappa$ тогда и только тогда, когда существует $C' \subset C \backslash \{\alpha\}$, для которого $\alpha = \sup C'$, так как любая окрестность точки $\alpha$ в порядковой топологии содержит окрестность вида $(\beta,\alpha] = \{\gamma \in \kappa : \beta < \gamma \leqslant \alpha\} = (\beta, \alpha+1)$.

**Определение 13.5.** Множество $C \subset \kappa$ *замкнуто* в $\kappa$, если оно замкнуто в порядковой топологии на $\kappa$ (равносильное условие: всякий ординал $\alpha \in \kappa$, для которого $\sup(C \cap [0,\alpha)) = \alpha$, принадлежит $C$).

**Определение 13.6.** Кардинал $\kappa$ называется *регулярным*, если для всякого множества $I$ мощности меньше $\kappa$ и любых множеств $A_\iota$, $\iota \in I$, мощность каждого из которых меньше $\kappa$, мощность объединения $\bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$ меньше $\kappa$.

Все кардиналы вида $\kappa^+$ регулярны, а кардинал $\aleph_\omega = \omega_\omega$ — нет.

*Замечание* 13.7. Если $\kappa$ регулярен и $|I| < \kappa$, то каковы бы ни были ординалы $\alpha_\iota \in \kappa$, $\iota \in I$, имеем $\sup\limits_{\iota \in I} \alpha_\iota \in \kappa$.

**Определение 13.7.** Множество $C \subset \kappa$ *неограничено* в $\kappa$, если для всякого ординала $\alpha \in \kappa$ существует ординал $\gamma \in C$ такой, что $\gamma > \alpha$.

**Предложение 13.2.** *Если $\kappa$ — регулярный кардинал, то множество $C \subset \kappa$ неограничено в $\kappa$ тогда и только тогда, когда $|C| = \kappa$.*

**Доказательство.** В силу ($\star$) $|[0,\gamma)| < \kappa$ для каждого $\gamma \in C$. Если $C$ неограничено, то $\bigcup\limits_{\gamma \in C} [0,\gamma) = \kappa$, а значит, $|C| = \kappa$, так как $\kappa$ регулярен.

Обратно, если $|C| = \kappa$, то в силу ($\star$) ни для какого $\alpha \in \kappa$ не выполнено включение $C \subset [0,\alpha)$. Значит, для всякого $\alpha \in \kappa$ существует $\gamma \in C$, $\gamma > \alpha$, т.е. $C$ неограничено. ■

# Лекция 14
# Фильтры и ультрафильтры на несчётных множествах

Точно так же как при изучении фильтров и ультрафильтров на произвольных счётных множествах достаточно рассматривать фильтры и ультрафильтры на $\mathbb{N}$ (поскольку всякое счётное множество находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{N}$), при изучении фильтров и ультрафильтров на несчётных множествах достаточно рассматривать фильтры и ультрафильтры на несчётных кардиналах, поскольку всякое множество находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым кардиналом.

## 14.1. Фильтр club($\kappa$)

**Определение 14.1.** Множество $C \subset \kappa$, замкнутое и неограниченное в $\kappa$, называется *клубом* (от англ. club — closed unbounded).

Согласно следующей теореме семейство всех клубов в несчётном регулярном кардинале $\kappa$ замкнуто относительно конечных (и не только) пересечений, а значит, служит базой некоторого фильтра. Этот фильтр обозначается club($\kappa$).

**Определение 14.2.** Пусть $\kappa$ — кардинал. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств множества $X$ называется *$\kappa$-полным*, если пересечение $< \kappa$ его элементов тоже является его элементом. Любой фильтр $\omega$-полон. $\omega_1$-полные семейства называются *счётно полными* или *$\sigma$-полными*.

**Теорема 14.1** ($\kappa$-полнота фильтра club($\kappa$))**.** *Если $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, то семейство всех клубов в $\kappa$ $\kappa$-полно.*

**Доказательство.** Рассмотрим любое семейство мощности $< \kappa$ клубов $C_\alpha$ в $\kappa$; их всегда можно заиндексировать ординалами $\alpha \in [0, \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \kappa$. Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ замкнуто в $\kappa$ (так как все $C_\alpha$ замкнуты).

Покажем, что оно неограничено. Возьмём любой ординал $\beta_0 \in \kappa$. Пусть $(\beta_{0\alpha})_{\alpha<\lambda}$ — $\lambda$-последовательность ординалов со свойствами

- $\beta_{00} > \beta_0$,
- $\beta_{0\alpha} < \beta_{0\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{0\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

Она существует, так как все $C_\alpha$ неограничены.

Предположим, что $n > 0$ и мы построили последовательность $(\beta_{(n-1)\alpha})_{\alpha<\lambda}$ ординалов из $\kappa$. Положим $\beta_n = \sup\limits_{\alpha<\lambda} \beta_{(n-1)\alpha}$. Этот супремум принадлежит $\kappa$ в силу замечания 13.7. Выберем последовательность $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ со свойствами

- $\beta_{n0} > \beta_n$,
- $\beta_{n\alpha} < \beta_{n\gamma}$ для $\alpha < \gamma$,
- $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$ для $\alpha < \lambda$.

В результате мы получим последовательности $(\beta_{n\alpha})_{\alpha<\lambda}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Для каждого $\alpha < \lambda$ положим $\beta^*_\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \beta_{n\alpha}$. Это точки из $\kappa$. Каждое множество $C_\alpha$ замкнуто, и из того, что $\beta_{n\alpha} \in C_\alpha$, следует, что $\beta^*_\alpha \in C_\alpha$. Поскольку $\beta_n < \beta_{n\alpha} < \beta_{n+1}$, имеем $\beta^*_\alpha = \sup \beta_n$ для всякого $\alpha < \lambda$. Значит, $\sup \beta_n \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, причём $\sup \beta_n > \beta_0$. ■

**Теорема 14.2** (о диагональном пересечении клубов)**.** *Если $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, то для любой последовательности клубов $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$* диагональное пересечение

$$\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in\kappa} C_\alpha = \{\beta \in \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$$

*является клубом.*

**Доказательство.** Покажем, что $\Delta\, \alpha \in \kappa C_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\kappa}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Если $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} C_\alpha$, то тем более $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, и при этом $\beta \in [0,\gamma] \subset C_\gamma \cup [0,\gamma]$ для всякого $\gamma \geqslant \beta$. Значит, $\Delta\, C_\alpha \subset \bigcap(C_\alpha \cup [0,\alpha])$. Обратно, если $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta}(C_\alpha \cup [0,\alpha])$, то $\beta \in C_\alpha \cup [0,\alpha]$ для каждого $\alpha < \beta$, и из того, что $\beta \notin \bigcup\limits_{\alpha<\beta}[0,\alpha]$, следует, что $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} C_\alpha$.

Вывод: множество $\Delta\, C_\alpha$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Покажем, что оно неограничено. Возьмём $\alpha \in \kappa$ и рассмотрим последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, где

$$\xi_0 = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_{i+1} = \min\Bigl\{\gamma \in \kappa : \gamma > \xi_i,\ \gamma \in \bigcap_{\beta<\xi_i} C_\beta\Bigr\}.$$

(Существование каждой точки $\xi_{i+1}$ вытекает из того, что $|[0,\xi_i)| < \kappa$ и теоремы 14.1.) Положим $\xi = \sup \xi_n$. Для каждого $\beta < \xi$ имеем $\beta < \xi_k$ для некоторого $k$, поэтому все $\xi_n$, кроме конечного числа, принадлежат множеству $C_\beta$. Поскольку все $C_\beta$ замкнуты, имеем $\xi \in C_\beta$ для каждого $\beta < \xi$, откуда $\xi \in \Delta\, C_\alpha$. Ясно, что $\xi > \alpha$. ■

**Следствие 14.1.** *Семейство всех клубов в регулярном несчётном кардинале $\kappa$ замкнуто относительно конечных пересечений.*

Таким образом, семейство

$$\mathrm{club}(\kappa) = \{\mathrm{A} \subset \kappa : A \text{ содержит некоторый клуб в } \kappa\}$$

является фильтром. Мы увидим, что он никогда не является ультрафильтром.

## 14.2. Стационарные множества

**Определение 14.3.** Подмножество регулярного несчётного кардинала $\kappa$ *стационарно*, если оно пересекается со всеми клубами в $\kappa$.

Ясно, что все стационарные множества неограничены.

**Лемма Фодора** (pressing down lemma)**.** *Пусть $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал, $S \subset \kappa$ — стационарное множество и $f\colon S \to \kappa$ — функция с тем свойством, что $f(\alpha) < \alpha$ для $\alpha \in S$. Тогда существуют стационарное множество $S_0 \subset S$ и ординал $\gamma \in \kappa$ такие, что $f(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$.*

**Доказательство.** Предположим, что найдутся стационарное множество $S \subset \kappa$ и функция $f\colon S \to \kappa$ такие, что $f(\alpha) < \alpha\ \forall \alpha \in S$ и для всякого $\gamma \in \kappa$ множество $f^{-1}(\gamma)$ не стационарно, т.е. не пересекается с некоторым клубом $C_\gamma$. Положим $C = \Delta_{\gamma\in\kappa} C_\gamma$. Для $\alpha \in C$ имеем $\alpha \in C_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geqslant \alpha$ — противоречие. ■

**Теорема 14.3.** *Пусть $\kappa$ — регулярный несчётный кардинал. Тогда для любой функции $f\colon \kappa \to \kappa$ множество*

$$A = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha\ \forall \beta < \alpha\}$$

*содержит клуб.*

**Доказательство.** Предположим, что $A$ не содержит целиком никакой клуб. Тогда множество $S = \kappa \setminus A$ стационарно. Для каждого $\alpha \in S$ положим

$$\varphi(\alpha) = \min\{\beta < \alpha : f(\beta) \geqslant \alpha\}.$$

Получили функцию $\varphi\colon S \to \kappa$ со свойством $f(\alpha) < \alpha$ для $\alpha \in S$. По лемме Фодора существуют ординал $\gamma \in \kappa$ и стационарное множество $S_0 \subset S$ такие, что $\varphi(\alpha) = \gamma$ для всех $\alpha \in S_0$. Получается, что $f(\gamma) \geqslant \alpha$ для всех $\alpha \in S_0$. Этого не может быть, так как $S_0$ неограничено. ■

**Предложение 14.1.** *Пусть $\kappa$ — несчётный регулярный кардинал и $f\colon \kappa \to \kappa$ — функция с тем свойством, что прообраз $f^{-1}(\alpha)$ каждой точки $\alpha \in \kappa$ не стационарен. Тогда существует клуб $C$, сужение функции $f$ на который инъективно.*

**Доказательство.** Предположим, что множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ стационарно. Тогда по лемме Фодора существует стационарное множество $S \subset \kappa$, для которого $f|_S = \mathrm{const}$, а это противоречит условию. Значит, множество $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) < \alpha\}$ нестационарно, так что множество

$$A = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \geqslant \alpha\}$$

содержит клуб. Множество

$$B = \{\alpha \in \kappa : f(\beta) < \alpha \text{ для всех } \beta < \alpha\}$$

тоже содержит клуб по теореме 14.3. Пусть $C$ — клуб, $C \subset A \cap B$. Если $\alpha, \beta \in C$, $\beta < \alpha$, то из того, что $\alpha \in B$, следует, что $f(\beta) < \alpha$, а из того, что $\alpha \in A$, следует, что $f(\alpha) \geqslant \alpha$. Значит, $f(\alpha) \neq f(\beta)$. ■

## 14.3. Несчётные версии $Q$- и $P$-ультрафильтров

Можно придумать несколько естественных обобщений понятия $Q$-фильтра на несчётные кардиналы. Самое сильное: скажем, что фильтр $\mathscr{F}$ на $\kappa$ является *$\kappa$-$Q$-фильтром*, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup F_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|F_\alpha| < \kappa$ для всех $\alpha$, существует элемент $A \in \mathscr{F}$ с тем свойством, что $|A \cap F_\alpha| \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \kappa$.

Из того, что все стационарные подмножества регулярного кардинала $\kappa$ имеют мощность $\kappa$ (в силу своей неограниченности в регулярном кардинале), вытекает

**Следствие 14.2.** *Любой фильтр $\mathscr{F}$ на регулярном несчётном кардинале $\kappa$, содержащий* $\mathrm{club}(\kappa)$*, является неглавным $\kappa$-$Q$-фильтром.*

При рассмотрении $P$-ультрафильтров и селективных ультрафильтров на несчётном кардинале $\kappa$ разумно ограничиться *равномерными* ультрафильтрами, все элементы которых имеют мощность $\kappa$ — рассмотрение неравномерного ультрафильтра $\mathscr{V}$ сводится к рассмотрению равномерного ультрафильтра на меньшем кардинале $\lambda = \min\{|V| : V \in \mathscr{V}\}$.

Одно из самых слабых естественных обобщений $P$-ультрафильтра таково: скажем, что равномерный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ является *$\kappa$-$P$-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\kappa = \bigsqcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$, где $A_\alpha \notin \mathscr{U}$, существует элемент $U \in \mathscr{U}$ с тем свойством, что $|U \cap A_\alpha| < \kappa$ для всех $\alpha \in \kappa$.

Пусть кардинал $\kappa$ регулярен, $\lambda \in \kappa$ и $U_\alpha \in \mathscr{U}$ для $\alpha < \lambda$. Множества $A = \kappa \setminus U_0$, $A_0 = U_0 \setminus U_{0+1}$, $\dots$, $A_\alpha = (\bigcap_{\beta \leqslant \alpha} U_\beta) \setminus U_{\alpha+1}$, $\dots$ вместе с одноточечными множествами $\{\gamma\}$, $\gamma \in \bigcap_{\alpha < \lambda} (U_\alpha)$, образуют разбиение множества $\kappa$, причём $A_\alpha \notin \mathscr{U}$. Пусть $U \in \mathscr{U}$, $|U \cap A_n| < \kappa$. Поскольку $\kappa$ регулярен, имеем $|\bigcup_{\alpha < \lambda} (U \cap A_\alpha)| < \kappa$, а поскольку ультрафильтр $\mathscr{U}$ равномерен, имеем $\mathscr{U} \ni U \setminus \bigcup_{\alpha < \lambda} (U \cap A_\alpha) \in \mathscr{U}$. Значит, ультрафильтр $\mathscr{U}$ $\kappa$-полон, тем более счётно полон.

Рассматривая другие обобщения понятия $P$-ультрафильтра (включая определение обобщённого $P$-ультрафильтра как $P$-точки в подпространстве пространства $\beta\kappa$, состоящем из всех равномерных ультрафильтров), приходим к тому же выводу — обобщённый $P$-ультрафильтр должен быть счётно полным.

Мы увидим, что существование счётно полных ультрафильтров равносильно существованию так называемых измеримых кардиналов, и непротиворечивость их существования системе аксиом ZFC недоказуема в принципе.

# Лекция 15
# Ультрафильтры на измеримых кардиналах

## 15.1. Меры и измеримые кардиналы

Пусть $X$ — множество и $\mathscr{P}$ — семейство его подмножеств, замкнутое относительно объединений, пересечений и дополнений. Функция $\mu\colon \mathscr{P} \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой*, если она удовлетворяет условиям

① $\mu(\varnothing) = 0$ и

② для любых непересекающихся множеств $A, B \in \mathscr{P}$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (аддитивность).

Мы будем рассматривать нетривиальные меры на семействе $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств непустого множества $X$, принимающие два значения — 0 и 1. $\{0,1\}$-Значная мера *нетривиальна*, если $\mu(X) = 1$ и $\mu(\{x\}) = 0$ для всякого $x \in X$. Такие меры находятся во взаимно однозначном соответствии с неглавными ультрафильтрами на $X$ (элементы ультрафильтров — множества меры 1). Действительно, ясно, что множества меры 1 непусты и что если $\mu(A) = 1$ и $B \supset A$, то $\mu(B) = 1$. Пересечение любых двух множеств $A$ и $B$ меры 1 тоже имеет меру 1 (иначе $A \setminus (A \cap B)$ и $B \setminus (A \cap B)$ — непересекающиеся множества меры 1, и нарушается аддитивность). Следовательно, множества меры 1 образуют фильтр. Это ультрафильтр: для любого $A \subset X$ имеем $X = A \cup X \setminus A$, причём $\mu(X) = 1$, поэтому либо $\mu(A) = 1$, либо $\mu(X \setminus A) = 1$.

Пусть $\kappa$ — кардинал. Мера $\mu$ на множестве $\mathscr{P}(X)$ *$\kappa$-аддитивна*, если каковы бы ни были множество $I$ мощности $|I| < \kappa$ и семейство попарно непересекающихся множеств $A_\iota \subset X$, $\iota \in I$, имеем $\mu(\bigcup A_\iota) = \sum \mu(A_\iota)$ (это означает, в частности, что $\mu(A_\iota)$ может равняться 1 не более чем для одного $\iota \in I$), т.е. соответствующий ультрафильтр $\kappa$-полон.

$\omega_1$-Аддитивные меры называются *$\sigma$-аддитивными* или *счётно аддитивными*. Им соответствуют счётно полные ультрафильтры.

**Определение 15.1.** *Измеримый кардинал* — это несчётный кардинал такой, что на алгебре множеств $\mathscr{P}(\kappa)$ существует *kappa*-аддитивная нетривиальная $\{0,1\}$-значная мера.

*Измеримый по Уламу кардинал* — это несчётный кардинал такой, что на $\mathscr{P}(\kappa)$ существует $\sigma$-аддитивная нетривиальная $\{0,1\}$-значная мера.

Другими словами, несчётный кардинал $\kappa$ измерим, если на $\kappa$ существует $\kappa$-полный неглавный ультрафильтр, и измерим по Уламу, если на $\kappa$ существует счётно полный неглавный ультрафильтр.

## 15.2. Недостижимые кардиналы

Недостижимые кардиналы — это кардиналы, которые нельзя получить из меньших кардиналов применением теоретико-множественных операций (объединения и возведения в степень).

**Определение 15.2.** Несчётный кардинал $\kappa$ *сильно недостижим* (или просто *недостижим*) если он регулярен и для всякого множества $X$ мощности меньше $\kappa$ выполнено неравенство $|2^X| < \kappa$.

Если выполнена *обобщённая континуум-гипотеза* $2^\kappa = \kappa^+$ для всех кардиналов $\kappa$, то всякий регулярный предельный кардинал недостижим.

Несуществование недостижимых кардиналов не противоречит системе аксиом ZFC, тогда как непротиворечивость их существования нельзя доказать в принципе — из неё вытекает непротиворечивость ZFC, которая недоказуема по второй теореме Гёделя о неполноте.

**Теорема 15.1.** *Любой измеримый кардинал недостижим.*

**Доказательство.** Если на кардинале $\kappa$ существует нетривиальная $\kappa$-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера, то любое одноэлементное множество имеет меру 0, а значит, любое множество мощности $< \kappa$ имеет меру 0; следовательно, объединение $< \kappa$ таких множеств имеет меру 0, так что $\kappa$ регулярен.

Предположим, что существует $\lambda < \kappa$, для которого $2^\lambda \geqslant \kappa$. Отождествим $\kappa$ с каким-нибудь множеством $K \subset 2^\lambda$ (посредством биекции). Элементы $K$ (как и всего множества $2^\lambda$) — это функции $\lambda \to \{0,1\}$. Для каждого $\alpha \in \lambda$ имеем

$$\mu(\{f \in K : f(\alpha) = 0\}) = 1 \quad \text{или} \quad \mu(\{f \in K : f(\alpha) = 1\}) = 1.$$

В первом случае положим $c_\alpha = 0$, во втором — $c_\alpha = 1$. Из $\kappa$-аддитивности меры вытекает, что

$$\mu\bigl(\bigcap\bigl\{\{f \in K : f(\alpha) = c_\alpha\} : \alpha \in \lambda\bigr\}\bigr) = 1,$$

однако это пересечение содержит лишь одну точку — функцию $f\colon \alpha \mapsto c_\alpha$, $\alpha \in \lambda$. ■

**Теорема 15.2.** *Наименьший измеримый по Уламу кардинал измерим.*

**Доказательство.** Пусть $\kappa$ — наименьший измеримый по Уламу кардинал и $\mu$ — $\sigma$-аддитивная $\{0,1\}$-значная мера на $\mathscr{P}(\kappa)$.

Предположим, что эта мера не $\kappa$-аддитивна. Пусть $\lambda$ — кардинал, $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subset \kappa$ для $\alpha < \lambda$, $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ для $\alpha \neq \beta$, $\mu(A_\alpha) = 0$ для $\alpha < \lambda$ и $\mu\bigl(\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha\bigr) = 1$. Можно считать, что $\bigsqcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ — иначе заменим $A_0$ на $A_0 \cup \bigl(\kappa \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha\bigr)$.

Рассмотрим отображение $f\colon \kappa \to \lambda$, определённое правилом $f(\alpha) = \beta \iff \beta \in A_\alpha$. Определим на $\mathscr{P}(\lambda)$ функцию $\tilde{\mu}$, положив $\tilde{\mu}(X) = \mu(f^{-1}(X))$ для $X \subset \lambda$. Функция $\tilde{\mu}$ является $\sigma$-аддитивной мерой на $\mathscr{P}(\lambda)$, поскольку $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$ и для любых попарно непересекающихся множеств $X_n \subset \lambda$, $n \in \omega$, имеем $f^{-1}(X_i) \cap f^{-1}(X_j) = \varnothing$ для $i \neq j$, $f^{-1}(\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n) = \bigcup\limits_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)$ и

$$\tilde{\mu}\bigl(\bigcup_{n\in\omega} X_n\bigr) = \mu\bigl(\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(X_n)\bigr) = \sum_{n\in\omega} \mu\bigl(f^{-1}(X_n)\bigr) = \sum_{n\in\omega} \tilde{\mu}\bigl(X_n\bigr).$$

Существование меры $\tilde{\mu}$ на множестве $X$ мощности $|X| \leqslant \lambda < \kappa$ противоречит минимальности измеримого по Уламу кардинала $\kappa$. ■

Таким образом, счётно полные ультрафильтры (в частности, любые возможные обобщения $P$-ультрафильтров на несчётные кардиналы) существуют тогда и только тогда, когда существуют измеримые кардиналы.

## 15.3. Нормальные ультрафильтры

**Определение 15.3.** Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ называется *нормальным*, если он замкнут относительно диагональных пересечений, т.е. для любого семейства $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ элементов $\mathscr{U}$ диагональное пересечение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$ принадлежит $\mathscr{U}$.

**Теорема 15.3.** *Кардинал $\kappa$ измерим тогда и только тогда, когда на $\kappa$ существует неглавный $\kappa$-полный нормальный ультрафильтр.*

**Лемма 15.1.** *$\kappa$-Полный ультрафильтр $\mathscr{U}$ на кардинале $\kappa$ нормален тогда и только тогда, когда для любого элемента $U \in \mathscr{U}$ и любой функции $f\colon U \to \kappa$ с тем свойством, что $f(\alpha) < \alpha$ для всех $\alpha \in U$, существует элемент $U_0 \in \mathscr{U}$, на котором функция $f$ постоянна.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Предположим, что найдутся элемент $U \in \mathscr{U}$ и функция $f\colon U \to \kappa$ такие, что $f(\alpha) < \alpha$ для всех $\alpha \in U$ и при этом $f^{-1}(\gamma) \notin \mathscr{U}$ для всякого $\gamma \in \kappa$. Тогда $U_\gamma = \kappa \setminus f^{-1}(\gamma) \in \mathscr{U}$. Положим $V = \underset{\gamma\in\kappa}{\Delta} U_\gamma$. Если $\alpha \in V$, то $\alpha \in U_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$, т.е. $\alpha \notin f^{-1}(\beta)$ для каждого $\beta < \alpha$. Значит, $f(\alpha) \geqslant \alpha$ — противоречие.

*Достаточность.* Пусть $U_\alpha \in \mathscr{U}$ для всех $\alpha \in \kappa$. Если $\underset{\alpha\in\kappa}{\Delta} U_\alpha \notin \mathscr{U}$, то положим $U = \kappa \setminus \underset{\alpha\in\kappa}{\Delta} U_\alpha$ и для каждого $\alpha \in U$ выберем ординал $f(\alpha) < \alpha$, для которого $\alpha \notin U_{f(\alpha)}$. В результате мы получим функцию $f\colon U \to \kappa$ с тем свойством, что $f(\alpha) < \alpha$ для всех $\alpha \in U$. По предположению существуют элемент $U_0 \in \mathscr{U}$ и ординал $\gamma \in \kappa$, для которых $f|_{U_0} \equiv \gamma$. Имеем $U_\gamma \cap U_0 = \varnothing$ — противоречие. Значит, $\underset{\alpha\in\kappa}{\Delta} U_\alpha \in \mathscr{U}$. ■

**Доказательство теоремы.** Пусть $\mathscr{U}$ — неглавный $\kappa$-полный ультрафильтр. Будем строить функцию $\varphi\colon \kappa \to \kappa$, для которой $\beta\varphi(\mathscr{U})$ — нормальный ультрафильтр.

Введём отношение эквивалентности между функциями $\kappa \to \kappa$:

$$f \sim g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

Введём также отношение

$$f \preccurlyeq g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \leqslant g(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

Оно индуцирует линейный порядок на классах эквивалентности функций ($[f]_\sim \preccurlyeq_\sim [g]_\sim$, если для некоторых (любых) $f' \in [f]_\sim$ и $g' \in [g]_\sim$ имеем $f' \preccurlyeq g'$).

Предположим, что порядок $\preccurlyeq_\sim$ не полный, т.е. в некотором непустом множестве классов эквивалентности функций нет наименьшего элемента. Тогда существует бесконечная последовательность функций $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ \ldots$ . Положим $U_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\}$ и $U = \bigcap U_n$. Поскольку ультрафильтр $\mathscr{U}$ $\kappa$-полон, $U \neq \varnothing$, и для $\alpha \in U$ имеем $f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \ldots$ (в $\kappa$). Это противоречит тому, что порядок $\leqslant$ на $\kappa$ полный. Значит, порядок $\preccurlyeq_\sim$ полный.

Множество функций $f\colon \kappa \to \kappa$ со свойством

$$\{\alpha : f(\alpha) > \beta\} \in \mathscr{U} \quad \forall \beta \in \kappa \tag{$*$}$$

непусто (например, тождественная функция $\mathrm{id}_\kappa\colon \alpha \mapsto \alpha$ такова). Пусть $\varphi$ — представитель наименьшего класса эквивалентности среди классов эквивалентности функций со свойством $(*)$. Положим $\mathscr{V} = \beta\varphi(\mathscr{U}) = \{V \subset \kappa : \varphi^{-1}(V) \in \mathscr{U}\}$.

Из $\kappa$-полноты ультрафильтра $\mathscr{U}$ и того, что прообраз любого пересечения множеств при любом отображении равен пересечению прообразов этих множеств, следует $\kappa$-полнота ультрафильтра $\mathscr{V}$. Для каждого $\beta \in \kappa$ имеем $\{\alpha : \varphi(\alpha) > \beta\} \in \mathscr{U}$, а значит, $\varphi^{-1}(\beta) = \{\alpha : \varphi(\alpha) = \beta\} \notin \mathscr{U}$, откуда $\{\beta\} \notin \mathscr{V}$, так что $\mathscr{V}$ неглавный.

Покажем, что $\mathscr{V}$ нормален. Согласно лемме 15.1 достаточно проверить, что для любого $V \in \mathscr{V}$ любая функция $f\colon V \to \kappa$ с тем свойством, что $f(\alpha) < \alpha$ для всех $\alpha \in V$, постоянна на некотором $V_0 \in \mathscr{V}$. Пусть $f$ — такая функция. Рассмотрим $g = f \circ \varphi$. Для всех $\alpha \in \varphi^{-1}(V) \in \mathscr{U}$ выполнено неравенство $g(\alpha) < \varphi(\alpha)$, так как $g(\alpha) = f(\varphi(\alpha))$. Значит, $g \prec \varphi$, т.е. $[g]_\sim \prec_\sim [\varphi]_\sim$. Поскольку функция $\varphi$ — представитель наименьшего класса эквивалентности функции со свойством $(*)$, $g$ не обладает свойством $(*)$, т.е. существует $\beta \in \kappa$, для которого $\{\alpha : g(\alpha) \leqslant \beta\} \in \mathscr{U}$. Из того, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ $\kappa$-полон и $|[0,\beta)| < \kappa$ вытекает существование ординала $\gamma \leqslant \beta$, для которого $U = \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in \mathscr{U}$. Имеем $V_0 = \varphi(U) \in \mathscr{V}$ и $f|_{V_0} \equiv \gamma$. ■

**Следствие 15.1.** *Если существует кардинал $\kappa$, для которого* $\mathrm{club}(\kappa)$ *— ультрафильтр, то $\kappa$ измерим.*

Однако $\mathrm{club}(\kappa)$ не может быть ультрафильтром даже на измеримом $\kappa$ в силу следующего утверждения.

**Предложение 15.1.** *Всякий регулярный кардинал $\kappa > \omega_1$ содержит непересекающиеся стационарные множества.*

Действительно, если $\mathrm{club}(\kappa)$ — ультрафильтр, то всякое стационарное множество должно быть клубом (иначе можно его добавить и получить фильтр, строго больший $\mathrm{club}(\kappa)$). Однако мы знаем, что любые два клуба пересекаются.

Предложение 15.1 проще всего доказать с помощью понятия *конфинальности* $\mathrm{cf}(\alpha)$ предельного ординала $\alpha$ — это наименьший ординал $\gamma$, для которого существуют ординалы $\beta_\xi$, $\xi < \gamma$, такие, что $\beta_\xi < \beta_\zeta < \alpha$ для $\xi < \zeta < \gamma$ и $\alpha = \sup\limits_{\xi\in\gamma} \beta_\xi$.

**Доказательство.** Обозначим через $\tilde{\omega}$ супремум всех ординалов $n \in \kappa$, для которых луч $[0, n)$ конечен и через $\tilde{\omega}_1$ — супремум всех $\alpha \in \kappa$, для которых луч $[0, \alpha)$ счётен.

Пусть $C$ — клуб в $\kappa$. Возьмём $\beta_0 \in C$ и, пользуясь неограниченностью множества $C$, выберем по индукции возрастающую последовательность ординалов $\beta_n \in C$, $n < \tilde{\omega}$. Положим $\alpha = \sup \beta_n$. Поскольку ординал $\alpha$ предельный, он не является супремумом никакой конечной последовательности ординалов, и поэтому $\mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}$. Значит, любой клуб содержит ординал $\alpha$ с $\mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}$.

Снова возьмём $\beta_0 \in C$ и выберем по трансфинитной индукции возрастающую $\tilde{\omega}_1$-последовательность ординалов $\beta_\gamma \in C$, $\gamma < \tilde{\omega}_1$ (она существует, так как $|C| = \kappa > \omega_1$). Положим $\alpha = \sup \beta_\gamma$.

Предположим, что существует возрастающая последовательность ординалов $\lambda_n$, $n < \tilde{\omega}$, для которой $\alpha = \sup \lambda_n$. Поскольку $\alpha = \sup \beta_\gamma$, для каждодго $n < \tilde{\omega}$ существует ординал $\gamma_n < \tilde{\omega}_1$, для которого $\beta_{\gamma_n} > \lambda_n$. Положим $\gamma^* = \sup \gamma_n$. Луч $[0, \gamma^*)$ счётен, поскольку все $[0, \gamma_n)$ счётны (так как $\gamma_n < \tilde{\omega}_1$); значит, $\gamma^* < \tilde{\omega}_1$, откуда $\alpha > \beta_{\gamma^*}$. С другой стороны, $\beta_{\gamma^*} > \lambda_n$ для всех $n < \tilde{\omega}$, а значит, $\beta_{\gamma^*} \geqslant \sup \lambda_n = \alpha$. Это противоречие показывает, что $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$. Значит, любой клуб содержит ординал $\alpha$ конфинальности $\mathrm{cf}(\alpha) > \tilde{\omega}$.

Следовательно, множества $\{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \tilde{\omega}\}$ и $\{\alpha \in \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) > \tilde{\omega}\}$ стационарны, и они не пересекаются. ■

На самом деле и в $\omega_1$ есть семейство попарно непересекающихся стационарных множеств, причём несчётное.

**Теорема 15.4** (Улам). *Пусть $\kappa$ — любой бесконечный кардинал.*

*Всякое стационарное подмножество кардинала $\kappa^+$ можно представить как объединение $\kappa^+$ штук попарно непересекающихся стационарных множеств.*

**Определение 15.4.** Пусть $\kappa$ — кардинал. Будем трактовать его как луч $[0, \kappa) \subset \kappa^+$. Для каждого $\beta \in \kappa^+$ зафиксируем инъекцию $f_\beta \colon [0, \beta) \to [0, \kappa)$. Для $\iota < \kappa$ и $\alpha \in \kappa^+$ положим

$$A^\iota_\alpha = \{\beta \in \kappa^+ : \alpha < \beta \text{ и } f_\beta(\alpha) = \iota\}.$$

Получившееся семейство множеств $A^\iota_\alpha$, $\iota < \kappa$, $\alpha \in \kappa^+$, называется *матрицей Улама* на $\kappa^+$.

Свойства матрицы Улама:

1. Если $\iota \neq \eta$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\eta_\alpha = \varnothing$ для всякого $\alpha \in \kappa^+$.
2. Если $\alpha \neq \gamma$, то $A^\iota_\alpha \cap A^\iota_\gamma = \varnothing$ для всякого $\iota < \kappa$, потому что все $f_\beta$ инъективны.
3. $\bigcup\limits_{\iota\in\kappa} A^\iota_\alpha = \{\beta \in \kappa^+ : \alpha < \beta\}$ для каждого $\alpha \in \kappa^+$.

**Доказательство теоремы Улама.** Для $\alpha < \kappa^+$ положим

$$\mathrm{stat}(\alpha) = \{\iota < \kappa : A^\iota_\alpha \text{ стационарно}\}.$$

Из свойства 3 следует, что $\mathrm{stat}(\alpha) \neq \varnothing$ для всех $\alpha \in \kappa^+$.

Для каждого $\alpha$ множество $\bigcup\limits_{\iota\in\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ содержит клуб. Действительно, иначе множество $\bigcup\limits_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$ стационарно. Для $\iota \notin \mathrm{stat}(\alpha)$ пусть $C_\iota$ — клуб, не пересекающий $A^\iota_\alpha$. Поскольку кардинал $\kappa^+$ регулярен, фильтр $\mathrm{club}(\kappa^+)$ $\kappa^+$-полон; следовательно, $C = \bigcap\limits_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} C_\iota$ — клуб, однако $C$ не пересекает множество $\bigcup\limits_{\iota\notin\mathrm{stat}(\alpha)} A^\iota_\alpha$, которое по предположению стационарно.

Из свойств 1 и 2 и $\kappa^+$-полноты фильтра $\mathrm{club}(\kappa^+)$ следует существование ординала $\iota < \kappa$, для которого $|\{\alpha : \iota \in \mathrm{stat}(\alpha)\}| = \kappa^+$. ■

Скажем, что ультрафильтр $\mathscr{U}$ на $\kappa$ *селективен*, если каково бы ни было разбиение $\kappa = \sqcup A_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, где $|A_\alpha| \notin \mathscr{U}$ для всех $\alpha$, существует $U \in \mathscr{U}$ со свойством $|U \cap A_\alpha| \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \kappa$. Мы видели при рассмотрении обобщений $P$-ультрафильтров, что из этого свойства следует $\kappa$-полнота ультрафильтра $\mathscr{U}$.

Скажем, что ультрафильтр на $\kappa$ *рамсеевский*, если для любой раскраски $c\colon [\kappa]^2 \to \{0,1\}$ существует однородный элемент ультрафильтра. Известно, что всякий $\kappa$-полный нормальный ультрафильтр на $\kappa$ является рамсеевским. Отсюда вытекает следующее утверждение:

**Следствие 15.2.** *На всяком измеримом кардинале существует рамсеевский ультрафильтр.*