Прямая Зоргенфрея S

Так называется вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, прямая Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счётности и сепарабельна. Покажем, что её квадрат не нормален.

Пространство $S\times S$ сепарабельно, и при этом оно содержит замкнутое дискретное множество $D = \{(x,-x) : x \in S\}$ мощности $2^{\aleph_0}$. Обозначим счётное всюду плотное множество в $S\times S$ через Y. Если непрерывные функции $f,g\colon S\times S \to \mathbb{R}$ принимают одинаковые значения в точках множества Y, то они совпадают. Значит, на $S\times S$ существует не более чем $|\mathbb{R}|^{|Y|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ разных непрерывных функций. Поскольку D дискретно, любая функция $D \to \mathbb{R}$ непрерывна, а число разных таких функций равно $|D|^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если бы пространство $S\times S$ было нормальным, то каждая из этих функций допускала бы непрерывное продолжение на $S\times S$ и все продолжения были бы разными (так как уже сами функции разные), а это невозможно, поскольку по теореме Кантора $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$.

Докажем, что прямая Зоргенфрея ещё и линделёфова; тогда мы будем иметь пример линделёфова (а значит, и паракомпактного) пространства, квадрат которого не нормален (а значит, не линделёфов и не паракомпактен).

Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства S, и пусть V_α — внутренность множества U_α по отношению к обычной топологии на $\mathbb{R}$. Покажем, что множество $L = S \setminus \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ счётно. Для каждого $x \in L$ найдутся индекс $\alpha(x) \in A$ и вещественное число $r(x) > x$, удовлетворяющие условиям $[x, r(x)) \subset U_{\alpha(x)}$. По определению множества L для любых различных $x, y \in L$ имеем $[x, r(x)) \cap [y, r(y)) = \varnothing$. Семейство попарно непересекающихся непустых полуоткрытых интервалов не может быть несчётным, поскольку каждый такой интервал содержит рациональное число; значит, L счётно.

Множество $\mathbb{R} \setminus L$ с индуцированной из прямой топологией обладает счётной базой, и $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — его покрытие множествами, открытыми в обычной топологии прямой. Значит, из него можно выделить счётное подпокрытие $\{V_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Семейство $\{U_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ покрывает всю прямую (т.е. всё пространство S), кроме какой-то части счётного множества L, а непокрытая часть множества L покрывается счётным числом элементов покрытия $\mathscr{U}$.