Задачи-9

1. Сохраняется ли локальная компактность непрерывными отображениями? открытыми непрерывными отображениями? замкнутыми непрерывными отображениями?

2. Верно ли, что если локально компактное пространство метризуемо, то его одноточечная компактификация тоже метризуема?

3. Докажите, что всякое хаусдорфово локально компактное пространство можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на некоторый хаусдорфов компакт.

4. Докажите, что теорема Бэра остаётся верной для локально компактных пространств.

5. Докажите, что для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:
(i) существует порождающая топологию X метрика с тем свойством, что подмножество X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в этой метрике;
(ii) X сепарабельно и локально компактно.

6. Топологическое пространство X называется *коллективно нормальным*, если элементы всякого дискретного семейства замкнутых множеств в X имеют попарно непересекающиеся открытые окрестности. При этом семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ *дискретно*, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая не более одного его элемента.

Докажите, что всякий паракомпакт коллективно нормален.

7. Верно ли, что всякое хаусдорфово финально компактное пространство линделёфово?

8. Докажите, что
а) плоскость Немыцкого не локально компактна (поэтому её нельзя компактифицировать одной точкой);
б) к плоскости Немыцкого можно добавить одну точку так, что получится линделёфово пространство;
в) к квадрату прямой Зоргенфрея нельзя добавить одну точку так, что получится нормальное пространство.

9. Докажите, что метризуемое пространство компактно, если и только если все метрики, порождающие топологию этого пространства, полны.

10. Приведите пример счётно компактного ненормального пространства.

11. Пусть A, Y и X_α, $\alpha \in A$, — множества. Для $A_0 \subset A$ обозначим через π_{A_0} естественное отображение проектирования $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha \in A_0} X_\alpha$, определённое правилом $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha \in A_0}$.
а) Докажите псевдокомпактность всякого множества $X \subset [0,1]^A$ с тем свойством, что $\pi_{A_0}(X) = [0,1]^{A_0}$ для любого счётного $A_0 \subset A$ (о таком X будем говорить, что оно *заполняет счётные грани*).
б) Пусть A несчётно. Заметьте, что множество
$$\Sigma[0,1]^A = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in [0,1]^A : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}| \leqslant \aleph_0|\}$$
заполняет счётные грани. Выведите отсюда, что любое пространство Y, для которого $\Sigma[0,1]^A \subset Y \subset [0,1]^A$, псевдокомпактно. Покажите, что пространство $[0,1]^A \setminus \{\mathbf{x}\}$, где $\mathbf{x}$ — любая точка из $[0,1]^A$, псевдокомпактно, но не счётно компактно, а значит, и не нормально.

12. Докажите, что произведение метризуемых пространств нормально тогда и только тогда, когда все сомножители, кроме не более чем счётного их числа, компактны.

13. а) Постройте пример наследственно линделёфова несепарабельного пространства.
б) Постройте пример вполне регулярного наследственно сепарабельного нелинделёфова пространства.