Задачи-8

1. а) Заметьте, что обычная прямая $\mathbb{R}$ локально компактна. Опишите её одноточечную компактификацию.
б) Заметьте, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ локально компактна. Опишите её одноточечную компактификацию.
в) Покажите, что отрезок $[0,1]$ является двухточечной (нарост состоит из двух точек) компактификацией прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $[0,1]=c\mathbb{R}$ для некоторого вложения $c\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ такого, что $c(\mathbb{R})$ плотно в $[0,1]$). Заметьте, что $\alpha\mathbb{R}\leqslant c\mathbb{R}$ (поскольку компактификация $\alpha\mathbb{R}$ наименьшая). Укажите явно соответствующее отображение $c\mathbb{R}\to\alpha\mathbb{R}$ из определения отношения $\leqslant$ между компактификациями.
г) Существует ли у прямой $\mathbb{R}$ трёхточечная компактификация?

2. Покажите, что компактификация cX тихоновского пространства X эквивалентна стоун-чеховской компактификации βX тогда и только тогда, когда всякая ограниченная непрерывная функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ продолжается до непрерывной функции $\hat f\colon cX\to\mathbb{R}$.

3. Пусть X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство. Верно ли, что замыкание множества Y в стоун-чеховской компактификации βX пространства X является стоун-чеховской компактификацией βY пространства Y?

4. Докажите, что для любого бесконечного дискретного пространства D справедливы следующие утверждения:
а) αD — это суперпоследовательность Александрова $A(\kappa)$, где $\kappa=|D|$;
б) $|\beta D|=2^{2^{|D|}}$;
в) $w(\beta D)=2^{|D|}$.

5. Покажите, что для некомпактного метризуемого пространства X стоун-чеховская компактификация βX не бывает одноточечной; более того, мощность нароста $\beta X\setminus X$ не меньше $2^{\aleph_0}$. Если при этом либо $w(X)=\aleph_0$, либо $w(X)>\aleph_0$ и $w(X)$ нельзя представить как супремум счётного числа меньших кардиналов, то $w(\beta X)=2^{w(X)}$.

6. а) Покажите, что если X и Y — тихоновские пространства с первой аксиомой счётности и компактификации βX и βY гомеоморфны, то и сами пространства X и Y гомеоморфны.
б) Верно ли, что если компактификации βX и βY произвольных тихоновских пространств X и Y гомеоморфны, то и пространства X и Y гомеоморфны?

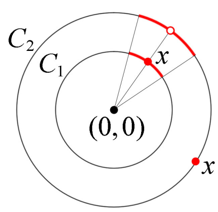
7. Заметьте, что пространство W_1^0 всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией локально компактно. Докажите, что $\alpha W_1^0=\beta W_1^0=W_1$ (напомним, что $W_1=W_1^0\cup\{\omega_1\}$). Заметьте, что отсюда вытекает существование ровно одной компактификации у пространства W_1^0.

8. а) Проверьте, что[1] $\beta[X\oplus Y]=\beta X\oplus\beta Y$ для любых тихоновских пространств X и Y.
б) Докажите, что если тихоновские пространства X и Y бесконечны и $\beta[X\times Y]=\beta X\times\beta Y$, то все непрерывные функции на X и на Y ограничены.

9. Заметьте, что, вообще говоря, компактификация, предоставляемая теоремами Тихонова (т.е. замыкание в $[0,1]^{w(X)}$ образа $\Delta f_\alpha(X)$ пространства X при вложении Δf_α, где $f_\alpha\colon X\to[0,1]$ — непрерывные функции, указанные в доказательстве теоремы Тихонова о вложении), не является стоун-чеховской максимальной компактификацией. Докажите, что если $\mathscr{F}=\{f_\alpha:\alpha\in A\}$ — семейство *всех* непрерывных функций $X\to[0,1]$, то замыкание образа пространства X при вложении $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X\to[0,1]^A$ совпадает с βX.

10. Пусть αD_1 и αD_2 — непересекающиеся одноточечные компактификации дискретных пространств D_1 и D_2 мощности $2^{\aleph_0}$. Очевидно, $A=\alpha D_1\oplus\alpha D_2$ — двухточечная компактификация дискретного пространства $D=D_1\oplus D_2$.

Рассмотрим две окружности $C_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=i\}$, $i=1,2$. Положим $X=C_1\cup C_2$. Пусть $p\colon C_1\to C_2$ — отображение проектирования окружности C_1 на окружность C_2 из точки $(0,0)$. Мы определим топологию на множестве X с помощью системы окрестностей $\{\mathscr{B}(x): x\in X\}$. Для точки $x\in C_1$ и натурального числа n обозначим через $V_n(x)$ дугу окружности C_1 длины $\frac{1}{n}$ с серединой в точке x и положим $U_n(x)=V_n(x)\cup p(V_n(x)\setminus\{x\})$. Множества вида $U_n(x)$ составляют базу окрестностей точек x из C_1, а все точки из C_2 изолированы: для $x\in C_1$ полагаем $\mathscr{B}(x)=\{U_n(x): n\in\mathbb{N}\}$, а для $x\in C_2$ — $\mathscr{B}(x)=\{\{x\}\}$.



[1] Квадратные скобки здесь означают лишь то, что рассматривается стоун-чеховская компактификация суммы $X\oplus Y$, а не сумма βX и Y. В литературе для этой цели обычно используются круглые скобки, так как всякое пространство считается подпространством своей стоун-чеховской компактификации, так что гомеоморфные вложения β вообще не рассматриваются и нет опасности перепутать компактификацию суммы с её образом при таком вложении.

Топологическое пространство X (с топологией, порождённой этой базой окрестностей) называется *двойной окружностью Александрова*.

Заметьте, что двойная окружность Александрова тоже является компактификацией пространства D. Покажите, что компактификации A и X несравнимы. Выведите отсюда, что $\alpha D \neq \beta D$ и $X \neq \beta D$.