Задачи-7

1. Приведите пример нехаусдорфова компактного T_1-пространства.

2. а) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если оно замкнуто в любом хаусдорфовом пространстве, содержащем его в качестве подпространства.
б) Докажите, что регулярное пространство компактно, если и только если любое взаимно однозначное непрерывное отображение этого пространства на произвольное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

3. а) Точка x топологического пространства X называется *точкой полного накопления* множества $Y \subset X$, если для любой её окрестности U имеет место равенство $|U \cap Y| = |Y|$. Докажите, что топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое бесконечное множество в X имеет точку полного накопления.
б) Докажите, что мощность любого несчётного компакта $K \subset \mathbb{R}$ равна $2^{\aleph_0}$.
в) Заметьте, что из пункта б) вытекает, что мощность всякого несчётного замкнутого подмножества прямой равна $2^{\aleph_0}$.

4. Семейство $\mathcal{N}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью*[1)] этого пространства, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдётся $N \in \mathcal{N}$, для которого $x \in N \subset U$. Определение сети отличается от определения базы лишь тем, что элементы сети не обязаны быть открытыми (таким образом, всякая база является сетью). *Сетевой вес* $nw(X)$ пространства X определяется, по аналогии с весом, как наименьшая мощность сети в X.
а) Докажите, что для всякого хаусдорфова пространства X существует непрерывное взаимно однозначное отображение этого пространства на хаусдорфово пространство Y со свойством $w(Y) \leqslant nw(X)$.
б) Заметьте, что для любого компакта X имеет место равенство $w(X) = nw(X)$.
в) Покажите, что всякий компакт имеет базу, мощность которой не превосходит мощности этого компакта.

5. а) Верно ли, что вес компактов не увеличивается при непрерывных отображениях, т.е. $w(f(X)) \leqslant w(X)$ для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$, где X — компакт?
б) Верно ли, что характер компактов не увеличивается при непрерывных отображениях?

6. Докажите, что всякий метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества.

7. Докажите, что компактное подмножество K вполне регулярного пространства X имеет тип G_δ (является пересечением счётного числа открытых множеств) тогда и только тогда, когда K функционально замкнуто, т.е. $K = f^{-1}(\{0\})$ для некоторой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$.

8. Заметьте, что плоскость Тихонова[2)] компактна и, значит, нормальна, но не наследственно нормальна.

9. Покажите, что двойная окружность Александрова[3)] наследственно нормальна, но не совершенно нормальна[4)]

10. Заметьте, что тихоновское произведение $[0,1]^{[0,1]}$, т.е. пространство всех функций $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с тихоновской топологией, не удовлетворяет первой аксиоме счётности. Докажите, что множество всех неубывающих функций $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с топологией, индуцированной из тихоновского произведения $[0,1]^{[0,1]}$, является неметризуемым сепарабельным компактом с первой аксиомой счётности.

11. Докажите теорему Бэра о категории для полных метрических пространств: *в любом полном метрическом пространстве (X,d) пересечение $G = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ любой последовательности $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

12. а) Докажите, что топологическое произведение $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ метризуемо полной метрикой (т.е. его топология порождается некоторой полной метрикой) тогда и только тогда, когда каждый сомножитель метризуем полной метрикой.
б) Покажите, что пространство $\mathbf{P}$ метризуемо полной метрикой (а значит, обладает свойством Бэра).
в) Укажите явно полную метрику на $\mathbf{P}$.
г) Покажите, что топология пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не порождается никакой полной метрикой.
д) Гомеоморфны ли пространства $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^{\aleph_0}$? $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$? $\mathbf{P}$ и $\mathbb{Q}^{\aleph_0}$?

13. Докажите *лемму Лебега*: для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ метрического компакта (X,d) существует *число Лебега*, т.е. такое положительное число λ, что каждый шар $B_d(x,\lambda)$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathcal{U}$.

---

1) Понятие сети не следует путать с понятием ε-сети!
2) См. задачу 4 из пятой порции задач.
3) См. слайды к двенадцатой лекции.
4) См. задачу 9 б) из пятой порции задач.

14. а) Докажите, что всякая непрерывная функция на компактном пространстве принимает свои минимальное и максимальное значения.

б) Докажите, что в метрическом пространстве расстояние между любыми непересекающимися компактным и замкнутым множествами положительно.

15. а) Докажите, что линейно упорядоченное пространство X с порядковой топологией компактно тогда и только тогда, когда для всякого непустого множества $Y \subset X$ существуют $\inf Y$ и $\sup Y$.

б) Докажите, что квадрат $[0,1] \times [0,1]$ с топологией лексикографического порядка компактен.

16. Топологическое пространство X называется *однородным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$ такой, что $f(x) = y$.

а) Верно ли, что любой компакт является непрерывным образом однородного компакта?

б) Верно ли, что любой бесконечный однородный компакт содержит нетривиальную сходящуюся последовательность?