Задачи-6

В задачах этого раздела A — произвольное индексное множество.

1. а) Как известно, если композиция $g\circ f$ непрерывных отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ факторна, то отображение g факторно. Обязано ли отображение f быть факторным?

б) Докажите, что если $f\colon X\to Y$ — факторное отображение, $g\colon Y\to Z$ — произвольное отображение и композиция $g\circ f$ непрерывна, то отображение g тоже непрерывно.

2. Верно ли, что если $f\colon X\to Y$ факторно и $Z\subset X$, то подотображение $Z\to f(Z)$ отображения f факторно? Что, если $Z=f^{-1}(S)$ для некоторого открытого множества $S\subset Y$? для некоторого замкнутого множества $S\subset Y$?

3. Пусть $f\colon X\to Y$ — факторное отображение и $\mathrm{id}\colon Z\to Z$ — тождественное отображение. Верно ли, что декартово произведение $f\times \mathrm{id}\colon X\times Z\to Y\times Z$ всегда факторно?

4. Приведите пример факторного, но не открытого и не замкнутого отображения.

5. В задаче 4 из первой порции задач (и в курсе аналитической геометрии) проективная плоскость $\mathbb{P}^2$ определялась как множество всех проходящих через точку $(0,0,0)$ прямых в $\mathbb{R}^3$ и расстояние между двумя такими прямыми полагалось равным углу между ними. Докажите, что это пространство гомеоморфно квадрату, обе пары противоположных сторон которого склеены с перекручиванием, и диску, к которому вдоль границы приклеен лист Мёбиуса.

6. Покажите, что произведение $\square\,\mathbb{R}^\omega$ счётного числа прямых с ящичной топологией несвязно, т.е. его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств.

7. Проверьте, что диагональное произведение счётного числа тождественных функций $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, т.е. отображение $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\omega$, заданное правилом $F(x)=(x,x,x,\dots)$ для $x\in\mathbb{R}$, не является непрерывным относительно ящичной топологии на $\mathbb{R}^\omega$.

8. Пусть X — любое бесконечное множество. Покажите, что последовательность функций $f_n\colon X\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к функции f в пространстве $\mathbb{R}^X$ с ящичной топологией тогда и только тогда, когда $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к f поточечно (т.е. последовательности $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся в $\mathbb{R}$ к $f(x)$ для всех $x\in X$) и существуют конечное множество $F\subset X$ и натуральное число N с тем свойством, что $f_n(x)=f(x)$ для всех $n\geqslant N$ и $x\in X\setminus F$.

9. Пусть X_α, $\alpha\in A$, — топологические пространства.

а) Покажите, что если $Y\subset\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ плотно в $\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$, то проекция $\pi_\alpha(Y)$ множества Y на сомножитель X_α плотна в X_α для каждого $\alpha\in A$.

б) Приведите пример произведения $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ и множества $Y\subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ плотна в X_α для каждого $\alpha\in A$, однако Y не плотно в X.

10. а) Приведите пример топологического произведения $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ и замкнутого множества $Y\subset X$, для которых проекции $\pi_\alpha(Y)$ не замкнуты в X_α.

б) Приведите пример топологического произведения $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ и незамкнутого множества $Y\subset X$ с тем свойством, что проекция $\pi_\alpha(Y)$ замкнута в X_α для каждого $\alpha\in A$.

11. Докажите, что топологическое произведение непустых T_1-пространств удовлетворяет первой аксиоме счётности (удовлетворяет второй аксиоме счётности, метризуемо) тогда и только тогда, когда все сомножители обладают тем же свойством и все, кроме не более чем счётного числа, одноточечны.

12. Докажите счётную мультипликативность сепарабельности без использования теоремы Хьюитта–Марчевского–Пондицери.

13. Докажите, что канторово множество[1)] $C\subset\mathbb{R}$ гомеоморфно тихоновской степени $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ дискретного пространства $\{0,1\}$.

14. Докажите, что всякое T_0-пространство X, обладающее счётной базой из открыто-замкнутых множеств, гомеоморфно вкладывается в канторово множество[1)] $C\subset\mathbb{R}$ (и, следовательно, метризуемо).

15. Докажите, что любое счётное метризуемое пространство вкладывается в пространство $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ рациональных чисел.

16. Докажите, что пространство $\mathbf{P}$ иррациональных чисел гомеоморфно топологическому произведению $\mathbb{N}^{\aleph_0}$.

17. Докажите, что топологическое произведение $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ не нормально.

[1)] *Канторово множество* — подмножество отрезка $[0,1]$, которое строится по индукции так: на первом шаге индуктивного построения имеется один отрезок $[0,1]$, и из него удаляется средняя треть без концов (интервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$), так что остаются два отрезка; на каждом следующем шаге из всех имеющихся на этом шаге отрезков удаляются средние трети без концов. Канторово множество получается после счётного числа шагов.

18. Докажите, что если X — хаусдорфово пространство и $\mathscr{Y}$ — семейство его подпространств, то пространство $\bigcap\{Y : Y \in \mathscr{Y}\} \subset X$ с топологией, индуцированной из X, гомеоморфно замкнутому подпространству тихоновского произведения $\prod\{Y : Y \in \mathscr{Y}\}$.

19. Пусть κ — любой бесконечный кардинал. Докажите, что счётная степень метрического ежа $J(\kappa)$ колючести κ с тихоновской топологией универсальна для всех метризуемых пространств веса κ, т.е. любое метризуемое пространство веса κ гомеоморфно подпространству пространства $J(\kappa)^{\aleph_0}$.

20. а) Покажите, что если X — T_2-пространство, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество всех подмножеств пространства X мощности, не превосходящей n, замкнуто в $\exp X$.

б) Покажите, что если X — T_1-пространство, то множество $\exp_{<\omega} X$ всех его конечных подмножеств плотно в $\exp X$.

в) Покажите, что если X — бесконечное T_1-пространство, то $d(X) = d(\exp X)$.

21. а) Проверьте, что $\exp X$ всегда является T_0-пространством.

б) Покажите, что если X является T_1-пространством, то $\exp X$ тоже является T_1-пространством. Верно ли обратное?

в) Докажите, что для T_1-пространства X экспоненциальное пространство $\exp X$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда X регулярно.

г) Докажите, что если X — T_1-пространство и экспоненциальное пространство $\exp X$ регулярно, то X нормально.

22. Докажите, что $\exp \mathbb{N}$ не нормально.

23. Пусть $f : X \to Y$ — отображение топологического пространства X в пространство Y.

а) Заметьте, что f непрерывно тогда и только тогда, когда многозначное отображение $F : X \to Y$, определённое правилом $F(x) = \{f(x)\}$, полунепрерывно снизу или, что равносильно, сверху.

б) Докажите, что f открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда многозначное отображение $G : Y \to X$, определённое правилом $G(y) = \{f^{-1}(y)\}$, полунепрерывно снизу (сверху).

в) Покажите, что если $X \in T_1$, то отображение $i : X \to \exp X$, определённое правилом $i(x) = \{x\}$, — гомеоморфное вложение.