Задачи-5

1. Покажите, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам отделимости T_0 и T_3, регулярно. Верно ли, что всякое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_0 и T_4, нормально?

2. Пусть X — метризуемое пространство, топология которого порождается метрикой d, и пусть F и G — непересекающиеся замкнутые подмножества X. Постройте в явном виде (в терминах ε-окрестностей относительно метрики d) непересекающиеся открытые окрестности множеств F и G.

3. Докажите, что любое пространство с топологией линейного порядка наследственно нормально.

4. Пусть $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией[1)], и пусть $W_0 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega\}$ — множество всех конечных ординалов вместе с первым бесконечным, тоже с порядковой топологией[2)]. Пространство $W_1 \times W_0$ с топологией произведения называется *плоскостью Тихонова*[3)]. Докажите, что

а) пространство $W_1 \times W_0$ нормально;

б) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$ не нормально;

в) пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$, в отличие от плоскости Немыцкого, не содержит несчётных замкнутых дискретных подпространств.

5. а) Покажите, что всякое регулярное пространство со счётной базой нормально. Всякое ли хаусдорфово пространство со счётной базой нормально?

б) Покажите, что всякое счётное регулярное пространство нормально. Всякое ли счётное хаусдорфово пространство нормально?

6. Пусть X — произвольное пространство, Z — регулярное пространство, Y — плотное подпространство X и $f\colon Y \to Z$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение f продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$ тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного отображения $Y \cup \{x\} \to Z$ для каждой точки $x \in X \setminus Y$.

7. а) Приведите пример двух разных функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сужения которых на всюду плотное в $\mathbb{R}$ множество $\mathbf{P}$ иррациональных чисел непрерывны и совпадают.

б) Приведите пример двух разных функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые в каждой точке всюду плотного в $\mathbb{R}$ множества $\mathbf{P}$ непрерывны и совпадают.

8. Множество A в топологическом пространстве X называется *функционально замкнутым*, или *нуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\{0\})$ для некоторой непрерывной функции. Множество $A \subset X$ *функционально открыто*, или является *конуль-множеством*, если $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ для некоторой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$. (См. также задачу 10 б) ниже.)

а) Докажите, что во вполне регулярном пространстве X точка x имеет тип[4)] G_δ тогда и только тогда, когда одноточечное множество $\{x\}$ функционально замкнуто.

б) Приведите пример вполне регулярного пространства, в котором не все точки имеют тип G_δ.

9. а) Докажите, что в нормальном пространстве X замкнутое множество F имеет тип[4)] G_δ тогда и только тогда, когда F функционально замкнуто[5)].

б) T_1-пространство, в котором все замкнутые множества функционально замкнуты, называется *совершенно нормальным*. Покажите, что пространство совершенно нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и все замкнутые множества в нём имеют тип G_δ.

в) Докажите, что любое совершенно нормальное пространство наследственно совершенно нормально.

г) Приведите пример нормального не совершенно нормального пространства.

д) Покажите, что в ненормальном пространстве замкнутые G_δ-множества не обязаны быть функционально замкнутыми, даже если это пространство вполне регулярно.

10. а) Докажите, что всякое метризуемое пространство совершенно нормально.

б) Выведите из пункта а), что множество A функционально открыто (замкнуто) в пространстве X тогда и только тогда, когда существуют непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ и открытое (замкнутое) множество $Y \subset \mathbb{R}$, для которых $A = f^{-1}(Y)$.

11. Покажите, что прямая Зоргенфрея[6)] S нормальна и даже совершенно нормальна, однако её квадрат $S \times S$ с топологией произведения не нормален.

---

1) См. также задачу 11 из третьей порции задач.

2) Таким образом, точки пространства W_0 образуют сходящуюся последовательность вместе с её пределом ω. Это (и любое гомеоморфное ему) пространство так и называют — *сходящаяся последовательность*, хотя оно не является последовательностью в строгом смысле. Заметьте, что при этом на множестве $W_0 \setminus \{\omega\} = \omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ индуцируется обычная — дискретная — топология, совпадающая с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$, а окрестностями точки ω являются дополнения до конечных подмножеств множества $W_0 \setminus \{\omega\}$.

3) Иногда плоскостью Тихонова называют пространство $(W_1 \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$.

4) См. задачу 9 из третьей порции задач.

5) См. предыдущую задачу.

6) См. задачу 10 из третьей порции задач.

12. Докажите, что

а) $|X| \leqslant 2^{w(X)}$ для любого T_1-пространства X;

б) $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$ для любого хаусдорфова пространства X;

в) $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$ для любого T_3-пространства X.