Задачи-4

1. Отображение $f\colon (X,d)\to(Y,\rho)$ метрических пространств называется *липшицевым*, если существует такое число L (*константа Липшица* отображения f), что $\rho(f(x),f(y))\leqslant L\cdot d(x,y)$ для любых точек $x,y\in X$. Покажите, что всякое липшицево отображение метрических пространств непрерывно.

2. Приведите пример отображения $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, которое непрерывно ровно в одной точке.

3. а) Заметьте, что отображение $f\colon X\to Y$ открыто тогда и только тогда, когда в пространстве X существует база, образ каждого элемента которой открыт в Y.
б) Покажите, что образ любой (не обязательно открытой) окрестности точки x топологического пространства X при открытом отображении $f\colon X\to Y$ является окрестностью точки $f(x)$ в пространстве Y.

4. Приведите пример топологических пространств X и Y и непрерывной сюръекции $f\colon X\to Y$, которая
а) не является ни открытым, ни замкнутым отображением;
б) является открытым, но не является замкнутым отображением;
в) является замкнутым, но не является открытым отображением;
г) является замкнутым и взаимно однозначным, но не открытым отображением;
д) является открытым и замкнутым отображением, но не является гомеоморфизмом.

5. Пусть $f\colon X\to X$ — непрерывное отображение топологического пространства X в себя. Покажите, что подотображение $X\to f(X)$ отображения f является ретракцией тогда и только тогда, когда $f\circ f=f$.

6. Верно ли, что если график $\operatorname{Gr} f$ отображения $f\colon X\to Y$ топологических пространств гомеоморфен пространству X, то f непрерывно?

7. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Покажите, что связность сохраняется непрерывными отображениями, т.е. непрерывный образ любого связного пространства связен.

8. а) Покажите, что биекция $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она монотонна (т.е. либо всюду возрастает, либо всюду убывает). Верно ли это для произвольного линейно упорядоченного пространства с порядковой топологией?
б) Покажите, что всякое непрерывное взаимно однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на себя является гомеоморфизмом. Верно ли это для произвольного топологического пространства?

9. Ниже перечислены наборы топологических пространств (их обозначения можно найти в конце вводной главы). Покажите, что пространства из каждого набора гомеоморфны друг другу, а пространства из разных наборов — нет:
а) любой отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$, где $a<b$, диск $\overline{D}^1$ и любой диск $\overline{D}^1_r(x_0)$, где $r>0$ и $x_0\in\mathbb{R}$;
б) любые полуоткрытые интервалы $[a,b)$ и $(a,b]$, где $a,b,\in\mathbb{R}$, $a<b$, и замкнутые лучи $(-\infty,c]$ и $[c,\infty)$, где $c\in\mathbb{R}$;
в) любой открытый интервал (a,b), где $a<b$, любые открытые лучи $(-\infty,c)$ и (c,∞), прямая $\mathbb{R}$, окружность без точки $S^1\setminus\{s\}$, где $s\in S^1$, любая дуга $\smile AB\subset S^1$ без концов (где $A,B\in S^1$, $A\neq B$), диск D^1 и любой диск $D^1_r(x_0)$, где $r>0$ и $x_0\in\mathbb{R}$;
г) открытое полупространство $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}\subset\mathbb{R}^n$, сфера S^n без точки, n-мерный сферический сегмент без границы[1)], пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и любой диск $D^n_r(\mathbf{x}_0)$, где $r>0$ и $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$, для произвольного $n\geqslant 2$;
д) замкнутый диск $\overline{D}^{2k}$, произведение обычных плоских дисков $\underbrace{\overline{D}^2\times\ldots\times\overline{D}^2}_{k\text{ раз}}$, $2k$-мерный куб $[-1,1]^{2k}$ и $2k$-мерный сферический сегмент с границей для $k\geqslant 1$.

10. Покажите, что замкнутый диск $\overline{D}^n$ и любой n-мерный симплекс Δ^n, где $n\geqslant 1$, гомеоморфны.

11. Докажите, что тор T^2 гомеоморфен «бублику» — поверхности в $\mathbb{R}^3$, получаемой вращением окружности S^1 вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей её.

12. а) Вложите $\overline{D}^2\times S^1$, $\overline{D}^1\times T^2$ и $\overline{D}^1\times S^2$ в $\mathbb{R}^3$.
б) Докажите, что тор T^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого натурального n.

13. Докажите, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна стрелке Зоргенфрея.[2)]

14. Придумайте два негомеоморфных пространства X и Y, для которых существуют непрерывные биекции $X\to Y$ и $Y\to X$.

[1)] То есть пересечение сферы S^n с произвольным открытым полупространством при условии, что пересечения S^n с самим этим полупространством и с его дополнением непусты; сферический сегмент без границы можно представлять себе как усечённую сферу или как сферу, из которой вырезали кружок (вместе с границей).
[2)] См. задачу 10 из третьей порции задач.

15. Докажите, что для любых двух счётных всюду плотных подмножеств A и B вещественной прямой $\mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $f(A) = B$.

16. Покажите, что отображение $f: X \to Y$ топологических пространств

а) непрерывно и замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{f(A)}^Y = f\left(\overline{A}^X\right)$ для любого множества $A \subset X$;

б) непрерывно и открыто тогда и только тогда, когда $\overline{f^{-1}(B)}^X = f^{-1}\left(\overline{B}^Y\right)$ для любого $B \subset Y$.

17. Покажите, что метрика $d: X \times X \to \mathbb{R}$ на топологическом пространстве $(X, \mathscr{T})$ непрерывна относительно топологии произведения на $X \times X$ тогда и только тогда, когда порождаемая ею метрическая топология $\mathscr{T}_d$ слабее (нестрого) топологии $\mathscr{T}$. В частности, на метризуемом пространстве непрерывна всякая метрика, порождающая его топологию.

18. *Непрерывный путь*, соединяющий точки x и y в топологическом пространстве X, — это любое непрерывное отображение $\alpha: [0, 1] \to X$, удовлетворяющее условиям $\alpha(0) = x$ и $\alpha(1) = y$.

Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ — прямоугольник, непрерывный путь $\alpha: [0, 1] \to \Pi$ соединяет точки, принадлежащие двум противоположным сторонам прямоугольника Π, а непрерывный путь $\beta: [0, 1] \to \Pi$ соединяет точки, принадлежащие двум другим противоположным сторонам. Докажите, что образы путей α и β пересекаются, т.е. существуют $s, t \in [0, 1]$, для которых $\alpha(s) = \beta(t)$.