Задачи-3

1. Покажите, что если X — метризуемое топологическое пространство и d — любая метрика, порождающая топологию X, то точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда $d(x, A) = 0$, так что $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$. Выведите отсюда, что замыкание $\overline{B_d(x, \varepsilon)}$ в пространстве X всякого открытого шара относительно любой метрики d, порождающей топологию X, содержится в замкнутом шаре $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$ того же радиуса с тем же центром относительно той же метрики. Верно ли, что всегда $\overline{B_d(x, \varepsilon)} = \overline{B}_d(x, \varepsilon)$?

2. Проверьте, что оператор Fr взятия границы множества в топологическом пространстве X обладает следующими свойствами:
а) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$;
б) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$;
в) $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
г) $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;
д) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr} A$;
е) $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;
ё) $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$;
ж) $\operatorname{Fr} \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Fr} A$;
з) A открыто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus A$;
и) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A = A \setminus \operatorname{Int} A$;
к) A открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fr} A = \varnothing$.
Верно ли, что если $A \subset B$, то $\operatorname{Fr} A \subset \operatorname{Fr} B$? В частности, верно ли, что $\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B$?

3. Покажите, что для топологического пространства X следующие условия равносильны:
а) X дискретно;
б) все точки пространства X изолированы;
в) все подпространства пространства X дискретны;
г) все подпространства пространства X замкнуты.

4. Пусть κ — произвольный бесконечный кардинал.
а) Приведите пример недискретного топологического пространства, в котором все подпространства мощности, не превосходящей κ, дискретны.
б) Покажите, что в топологическом пространстве все подпространства мощности, не превосходящей κ, дискретны тогда и только тогда, когда все подпространства мощности, не превосходящей κ, замкнуты.

5. Укажите подмножества A и B вещественной прямой с обычной топологией, для которых (а) $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$; (б) $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \neq \operatorname{Int}(A \cup B)$. Может ли одно из этих множеств быть замкнутым? открытым?

6. Для каких множеств внутренность совпадает с замыканием? Опишите все такие подмножества прямой $\mathbb{R}$.

7. а) Покажите, что каждая последовательность имеет поднаправленность, которая не является подпоследовательностью.
б) Верно ли, что точка топологического пространства является предельной точкой последовательности в этом пространстве тогда и только тогда, когда к ней сходится некоторая подпоследовательность данной последовательности?
в) Покажите, что если последовательность сходится к некоторой точке, то и всякая подпоследовательность этой последовательности сходится к той же точке.

8. Топологическое пространство X называется *пространством Фреше–Урысона*, если к любой точке прикосновения x любого множества $A \subset X$ сходится некоторая последовательность точек множества A (иными словами, если точка $x \notin A$ предельна для множества A тогда и только тогда, когда к x сходится некоторая последовательность точек множества A).
а) Заметьте, что каждое пространство с первой аксиомой счётности является пространством Фреше–Урысона.
б) Приведите пример бесконечного недискретного топологического пространства, в котором все сходящиеся последовательности тривиальны. Может ли такое пространство удовлетворять первой аксиоме счётности? быть счётным?

9. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Говорят, что Y — множество *типа* G_δ или G_δ*-множество* в X, если Y является пересечением счётного числа открытых в X множеств. Вместо «одноточечное множество типа G_δ» говорят «точка типа G_δ».
а) Заметьте, что в метризуемом пространстве все замкнутые множества имеют тип G_δ.
б) Является ли множество всех рациональных чисел G_δ-подмножеством вещественной прямой с обычной топологией? Является ли таковым множество всех иррациональных чисел?
в) Заметьте, что в пространстве с первой аксиомой счётности все точки имеют тип G_δ. Верно ли, что в пространстве с первой аксиомой счётности все замкнутые множества имеют тип G_δ?

г) Приведите пример топологического пространства, в котором нет нетривиальных сходящихся последовательностей, однако все точки имеют тип G_δ.

10. Вещественная прямая с топологией, порождённой базой $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, называется *прямой Зоргенфрея* и обычно обозначается S. Подпространство $[0,1) \subset S$ прямой Зоргенфрея называется *стрелкой Зоргенфрея*, а топология прямой Зоргенфрея называется *топологией стрелки*. Докажите, что прямая (и стрелка) Зоргенфрея

а) удовлетворяет первой аксиоме счётности;
б) не удовлетворяет второй аксиоме счётности;
в) наследственно сепарабельна, т.е. любое её подпространство сепарабельно;
г) неметризуема.

11. Пусть $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией и $W_1 = W_1^0 \cup \{\omega_1\} = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ — множество всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, тоже с порядковой топологией. Заметьте, что W_1^0 является открытым плотным подпространством пространства W_1. Покажите, что W_1^0 — несепарабельное пространство с первой аксиомой счётности, каждая точка в нём имеет тип G_δ и к каждой его неизолированной точке сходится нетривиальная последовательность. (Заметьте, что отсюда вытекает, что всякий не имеющий непосредственного предшественника счётный ординал α является пределом строго возрастающей последовательности ординалов $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$; на языке порядка это означает, что $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.) При этом W_1 содержит точку ω_1, к которой не сходится никакая последовательность и которая не имеет тип G_δ.

12. а) Приведите пример несепарабельного пространства со свойством Суслина.
б) Покажите, что свойство Суслина и сепарабельность наследуются открытыми подпространствами.
в) Покажите, что свойство Суслина наследуется плотными подпространствами, а сепарабельность не наследуется.

13. *Наследственное число Суслина* $hc(X)$ топологического пространства X, которое также называется *спрэдом* пространства X и обозначается $s(X)$, определяется естественным образом:
$$hc(X) = s(X) = \sup\{c(Y) : Y \subset X\}.$$
Покажите, что $hc(X) = \sup\{|Y| : Y$ — дискретное подпространство пространства $X\}$.

14. Заметьте, что кардинальнозначные характеристики топологического пространства X, с которыми мы успели познакомиться, связаны неравенствами
$$\chi(X) \leqslant w(X) \leqslant 2^{|X|}, \quad c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X) \geqslant hc(X) \geqslant c(X), \quad d(X) \leqslant |X|.$$
Приведите примеры пространства X, для которого $\chi(X) < c(X)$, и пространства Y, для которого $\chi(Y) > hc(Y)$.