Задачи-2

1. Проверьте, что пары (X,d) являются метрическими пространствами:
а) X — любое векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $d(x,y)=\|x-y\|$;
б) X — любое векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$, $d(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$;
в) $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — инъективная функция.

2. а) Покажите, что любая метрика d на любом множестве X эквивалентна метрике, ограниченной единицей, т.е. метрике $\tilde{d}$ с тем свойством, что $\tilde{d}(x,y)\leqslant 1$ для любых $x,y\in X$.
б) Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X называются *липшицево эквивалентными*, если существуют такие положительные числа c и C, что $c\cdot d_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant C\cdot d_1(x,y)$ для любых $x,y\in X$. Приведите пример эквивалентных, но не липшицево эквивалентных метрик.
в) Покажите, что две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве V *эквивалентны* (т.е. определяемые ими метрики $d_1(x,y)=\|x-y\|_1$ и $d_2(x,y)=\|x-y\|_2$ эквивалентны) тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа c и C, что $c\cdot\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant C\cdot\|x\|_1$ для любого $x\in V$.

3. а) Покажите, что функции $\rho_1,\rho_2\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, определённые правилами $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max\limits_{i\leqslant n}|x_i-y_i|$ и $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i\leqslant n}|x_i-y_i|$ для $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n),\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, являются метриками на $\mathbb{R}^n$. Эквивалентны ли эти метрики друг другу и евклидовой метрике $d_n(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{\sum\limits_{i\leqslant n}(x_i-y_i)^2}$ на $\mathbb{R}^n$? Нарисуйте шары относительно этих метрик для случая $n=2$.
б) Эквивалентны ли метрики на множестве числовых последовательностей $\left\{\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n^2<\infty\right\}$, порождённые нормами $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$?
в) Покажите, что формулы
$$d_1(f,g)=\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt \quad\text{и}\quad d_2(f,g)=\sqrt{\int\limits_0^1(f(t)-g(t))^2dt}$$
определяют неэквивалентные метрики на пространстве $C([0,1])$ непрерывных функций на отрезке. Сравнимы ли порождаемые ими топологии?

4. Пусть $\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство (его точками служат все проходящие через $\mathbf{0}=(\underbrace{0,\dots,0}_{n+1\text{ раз}})$ прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$). Проверьте, что величину угла между прямыми можно принять за расстояние между ними в $\mathbb{P}^n$, т.е. функция $d_n\colon\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n\to\mathbb{R}$, определённая правилом $d_n(l_1,l_2)=(\widehat{l_1,l_2})$ для $l_1,l_2\in\mathbb{P}^n$, является метрикой на $\mathbb{P}^n$.

5. Могут ли в метрическом пространстве существовать два таких несовпадающих шара разных радиусов, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса?

6. Проверьте, что дискретная метрика неархимедова. Покажите, что в ультраметрическом пространстве
а) любая точка любого шара является центром этого шара;
б) если два шара пересекаются, то один из них целиком содержится в другом;
в) всякий шар одновременно и открыт, и замкнут;
г) все сферы (множества вида $\{x: d(x,x_0)=\varepsilon\}$) открыты;
д) все треугольники равнобедренны.
Может ли шар меньшего радиуса содержать шар большего радиуса в ультраметрическом пространстве?

7. а) Проверьте, что для всякого нормирования $\|\cdot\|$ любого поля F функция $d\colon F\times F\to\mathbb{R}$, определённая правилом $d(x,y)=\|x-y\|$, является метрикой.
б) Покажите, что p-адическая норма $|\cdot|_p$ является нормированием, и что порождаемая ею метрика d_p неархимедова.
в) Эквивалентна ли метрика d_p обычной метрике $d(x,y)=|x-y|$ на $\mathbb{Q}$? метрикам $d_{p'}$ для простых чисел $p'\neq p$?

8. Пусть X — множество, d — метрика на нём, a — любое положительное число, $\boldsymbol{a}\colon X\times X\to\mathbb{R}$ — функция, тождественно равная a, и $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — не равная тождественно нулю функция со свойствами $f(0)=0$, $f(x)\geqslant 0$ и $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ для всех $x,y\in\mathbb{R}$. Проверьте, что $a\cdot d$, $\min\{d,\boldsymbol{a}\}$, $f\circ d$ и $\frac{d}{1+d}$ тоже метрики. Эквивалентны ли они друг другу и метрике d?

9. Пусть X — множество и d_1 и d_2 — две метрики на нём. Какие из функций $\max\{d_1,d_2\}$, $\min\{d_1,d_2\}$, d_1+d_2, $d_1\cdot d_2$ и $\frac{d_1}{d_2}$ тоже являются метриками? (В последнем случае полагаем $\frac{d_1}{d_2}(x,x)=0$ для $x\in X$.)

10. Покажите, что топологическое пространство дискретно тогда и только тогда, когда оно имеет базу, состоящую из одноточечных множеств.

11. Покажите, что на любом множестве, содержащем хотя бы две точки, существуют несравнимые топологии.

12. Докажите, что если топологическое пространство обладает счётной базой, то любая его база содержит не более чем счётное подсемейство, являющееся базой. Верно ли аналогичное утверждение для локальных баз? предбаз? Заметьте, что решение этой задачи переносится без изменений на базы и предбазы любой бесконечной мощности κ.

13. а) Приведите пример метризуемого пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

б) Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счётности. Может ли такое пространство быть счётным?

14. *Симметрикой* (*квазиметрикой*) на множестве X называется функция $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

① $\rho(x,y)\geqslant 0$,

② $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ и

③ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (соответственно ③ $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$) для всех $x,y,z\in X$

(симметрика отличается от метрики отсутствием требования выполнения неравенства треугольника, а квазиметрика — отсутствием симметричности). Подобно метрике, каждая симметрика (квазиметрика) ρ порождает топологию $(X,\mathscr{T}_\rho)$ на множестве X, в которой открытыми являются в точности те множества, которые содержат каждую свою точку x вместе с некоторым «шаром» $B(x,\varepsilon)=\{y\in X:\rho(x,y)<\varepsilon\}$ (заметьте, что сами шары не обязаны быть открытыми!). Топологическое пространство, топология которого порождается некоторой симметрикой (квазиметрикой), называется *симметризуемым* (*квазиметризуемым*).

а) Рассмотрите симметрику ρ на множестве $X=\{0\}\cup\Big(\{0\}\cup\big\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\big\}\Big)\times\mathbb{N}$, определённую правилом

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=y,\\ \frac{1}{n}, & \text{если } x=0 \text{ и } y=(0,n) \text{ или } y=0 \text{ и } x=(0,n),\\ \frac{1}{k}, & \text{если } x=(0,n) \text{ и } y=\big(\frac{1}{k},n\big) \text{ или } y=(0,n) \text{ и } x=\big(\frac{1}{k},n\big),\\ 1 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Покажите, что симметризуемое пространство $(X,\mathscr{T}_\rho)$ не удовлетворяет первой аксиоме счётности.

б) Покажите, что шары $B(x,\varepsilon)$ в квазиметризуемом пространстве открыты. Выведите отсюда, что квазиметризуемое пространство всегда удовлетворяет первой аксиоме счётности. Придумайте порождающую топологию квазиметрику на плоскости Немыцкого.

15. Покажите, что топология, порождённая лексикографическим порядком на плоскости $\mathbb{R}^2$, строго сильнее евклидовой топологии.

16. Докажите, что евклидова топология на плоскости не порождается никаким линейным порядком.

17. Опишите индуцированную из плоскости Немыцкого L топологию на граничной прямой l .

18. Сравните следующие топологии на замкнутой верхней полуплоскости:

а) топология, индуцированная из евклидовой плоскости;

б) топология плоскости Немыцкого;

в) топология, индуцированная из плоскости с топологией лексикографического порядка;

г) топология, индуцированная из плоскости с топологией колексикографического порядка;

д) топология, порождённая лексикографическим порядком на верхней полуплоскости;

е) топология, порождённая колексикографическим порядком на верхней полуплоскости.