Задачи-10

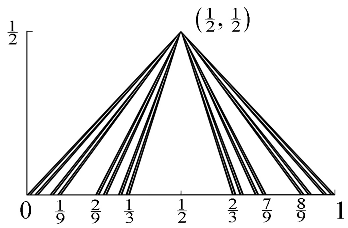
1. Проверьте, что если последовательность $C_1, C_2, \ldots$ связных подпространств топологического пространства такова, что $C_n \cap C_{n+1} \neq \varnothing$ при $n = 1, 2, \ldots$, то объединение $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ связно.

2. а) Докажите *теорему Серпинского*: *никакой континуум нельзя представить как счётное объединение попарно непересекающихся замкнутых множеств, по крайней мере два из которых непусты.*

б) Приведите пример связного подпространства плоскости, которое является счётным объединением непустых попарно непересекающихся замкнутых множеств.

3. Докажите, что любое открыто-замкнутое подмножество тихоновского пространства X является пересечением с X некоторого открыто-замкнутого подмножества компакта βX. Можно ли распространить это утверждение с βX на произвольное тихоновское пространство, содержащее X в качестве плотного подпространства? на произвольную компактификацию пространства X?

4. Пусть E — множество всех концевых точек интервалов, удаленных из отрезка $[0, 1]$ в стандартном процессе построения канторова множества C. Положим $I = C \setminus E$. Для каждого $c \in C$ соединим точку $(c, 0) \in \mathbb{R}^2$ с точкой $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ отрезком L_c и обозначим через F_c множество всех точек $(x, y) \in L_c$, у которых координата y рациональна, если $c \in E$, и иррациональна, если $c \in I$. Подпространство $F = \bigcup_{c\in C} F_c$ евклидовой плоскости называется *веером Кнастера–Куратовского*; оно известно также как *протекающая*[1] *канторова палатка* и *канторов вигвам*.



а) Докажите, что пространство F связно.

б) Докажите, что пространство $F^0 = F \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ наследственно несвязно.

5. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует непрерывное отображение $f\colon [0, 1] \to X$, для которого $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (такое отображение называется *путём*, соединяющим точки x и y). Топологическое пространство X называется *локально связным*, если в каждой окрестности любой точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

а) Докажите, что любое линейно связное пространство связно.

б) Приведите пример локально связного несвязного пространства.

в) Приведите пример связного, но не линейно связного и не локально связного пространства.

6. а) Пусть X — связное метризуемое пространство и d — любая метрика, порождающая его топологию. Покажите, что для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$

$$\text{существуют такие } k \in \mathbb{N} \text{ и } x_1, \ldots, x_k \in X, \text{ что } x = x_1,\ y = x_k \text{ и } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ для } i < k. \qquad (\star)$$

б) Докажите, что каждый метрический компакт (X, d), в котором условие $(\star)$ выполнено для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$, связен.

в) Приведите пример несвязного метрического пространства (X, d), в котором условие $(\star)$ выполнено для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$.

7. Топологическое пространство называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств. Заметьте, что всякое нульмерное пространство несвязно.

а) Докажите, что пространство $X \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из всех точек, у которых одна координата рациональна, а другая иррациональна, нульмерно. Постройте явно его базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

б) Покажите, что пространство $Y \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из всех точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе иррациональны, связно.

[1] В противоположность палатке, сделанной из целых отрезков L_c вместо множеств F_c. Бывает и «сильно протекающая канторова палатка» (*Cantor's leakier tent*) — она получается перестановкой слов «рационально» и «иррационально» в определении палатки. Такая палатка уже нульмерна.