Задачи-1

1. Докажите, что для любых множеств X и Y
$$X \cap \Big(\bigcup_{Z\in Y} Z\Big) = \bigcup_{Z\in Y} (X\cap Z) \qquad \text{и} \qquad X \cup \Big(\bigcap_{Z\in Y} Z\Big) = \bigcap_{Z\in Y} (X\cup Z).$$

2. Проверьте, какие из следующих дистрибутивностей верны:
а) $(X \vartriangle Y)\cap Z = (X\cap Z)\vartriangle (Y\cap Z)$;
б) $(X \vartriangle Y)\cup Z = (X\cup Z)\vartriangle (Y\cup Z)$;
в) $(X \cap Y)\vartriangle Z = (X\vartriangle Z)\cap (Y\vartriangle Z)$;
г) $(X \cup Y)\vartriangle Z = (X\vartriangle Z)\cup (Y\vartriangle Z)$.

3. Докажите, что для любых множеств X и Y выполнены *законы де Моргана*:
$$X \setminus \Big(\bigcup_{Z\in Y} Z\Big) = \bigcap_{Z\in Y} (X\setminus Z) \qquad \text{и} \qquad X \setminus \bigcap_{Z\in Y} Z = \bigcup_{Z\in Y} (X\setminus Z).$$

4. Проверьте, что для любых множеств $X_1 \subset X_2 \subset X$ и $Y_1 \subset Y_2 \subset Y$ и любого отображения $f\colon X\to Y$
$$\begin{array}{lcl}
f(X_1)\subset f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1)\subset f^{-1}(Y_2);\\
f(X_1\cap X_2)\subset f(X_1)\cap f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\cap Y_2)= f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2);\\
f(X_1\cup X_2)= f(X_1)\cup f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\cup Y_2)= f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2);\\
f(X_2\setminus X_1)\supset f(X_2)\setminus f(X_1) & \text{и} & f^{-1}(Y_2\setminus Y_1)= f^{-1}(Y_2)\setminus f^{-1}(Y_1);\\
f(X_1\vartriangle X_2)\supset f(X_1)\vartriangle f(X_2) & \text{и} & f^{-1}(Y_1\vartriangle Y_2)= f^{-1}(Y_1)\vartriangle f^{-1}(Y_2);\\
f^{-1}\big(f(X_1)\big)\supset X_1 & \text{и} & f\big(f^{-1}(Y_1)\big)= Y_1\cap f(X).
\end{array}$$
Как изменятся эти формулы для инъективных, сюръективных и биективных отображений?

5. а) Всякий ли максимальный (минимальный) элемент в упорядоченном множестве является наибольшим (наименьшим)? Всякий ли наибольший элемент является максимальным?
б) Может ли упорядоченное множество иметь несколько максимальных элементов? несколько наибольших элементов? не иметь ни максимальных, ни наибольших элементов?
в) Верно ли, что если упорядоченное множество имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент наибольший?

6. Пусть κ и λ — кардиналы, X и Y — непересекающиеся множества, $|X|=\kappa$ и $|Y|=\lambda$. Напомним, что *сумма* $\kappa+\lambda$ кардиналов κ и λ определяется как мощность множества $X\cup Y$, их *произведение* $\kappa\cdot\lambda$ — как мощность множества $X\times Y$, а *λ-я степень* κ^λ кардинала κ определяется как мощность множества $X^Y=\{f\colon Y\to X\}$. (Заметьте, что для каждого множества A существует ровно одно отображение $f\colon\varnothing\to A$ с пустой областью определения (это пустое множество), так что $\kappa^0=1$ для любого кардинала κ; заметьте также, что степень 0^κ не определена для $\kappa\neq 0$.) Проверьте следующие свойства этих операций (ниже κ, λ и μ — кардиналы):

а) ассоциативность сложения и умножения:
$$(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu), \quad (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu);$$
б) коммутативность сложения и умножения:
$$\kappa+\lambda=\lambda+\kappa, \quad \kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa;$$
в) дистрибутивность умножения относительно сложения:
$$\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu;$$
г) монотонность:
если $\kappa\leqslant\lambda$, то $\kappa+\mu\leqslant\lambda+\mu$, $\kappa\cdot\mu\leqslant\lambda\cdot\mu$ и $\kappa^\mu\leqslant\lambda^\mu$;
если $1\leqslant\kappa$ и $\lambda\leqslant\mu$, то[1] $\kappa^\lambda\leqslant\kappa^\mu$;
д) если κ бесконечен, то $\kappa\cdot\kappa=\kappa$;
е) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен и оба они отличны от нуля, то
$$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\};$$
ё) $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$, $\quad(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$, $\quad\kappa^{\lambda\cdot\mu}=(\kappa^\lambda)^\mu$;
ж) если хотя бы один из кардиналов κ и λ бесконечен, $\kappa\geqslant 2$ и $\lambda\geqslant 1$, то
$$\max\{\kappa,2^\lambda\}\leqslant\kappa^\lambda\leqslant\max\{2^\kappa,2^\lambda\};$$
в частности, если λ бесконечен, то $2^\lambda=\kappa^\lambda$ для любого $\kappa\leqslant 2^\lambda$, $\kappa\geqslant 2$.

7. Докажите *теорему Кёнига*: если A — произвольное множество и для каждого $\alpha\in A$ X_α и Y_α — множества, удовлетворяющие условию $|X_\alpha|<|Y_\alpha|$, то
$$\Big|\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\Big| < \Big|\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\Big|.$$
Заметьте, что из этой теоремы немедленно вытекает теорема Кантора: $\kappa<2^\kappa$ для любого кардинала κ.

---
[1] *Предупреждение*: обратное неверно — существует модель ZFC, в которой $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$.

8. Покажите, что если X — произвольное бесконечное множество, A — произвольное множество мощности $|A| \leqslant |X|$ и для каждого $\alpha \in A$ X_α — множество мощности $|X_\alpha| \leqslant |X|$, то $\left|\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\right| \leqslant |X|$. Останется ли это утверждение верным, если всюду заменить знак «$\leqslant$» на «$<$»?

9. а) Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно множеству $[X]^{<\aleph_0}$ всех его конечных подмножеств.

б) Покажите, что для любого бесконечного множества X и любого кардинала $\kappa \leqslant |X|$ множество $[X]^\kappa$ всех подмножеств X мощности κ равномощно множеству X^κ.

в) Верно ли, что любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?

г) Верно ли, что в предположении справедливости континуум-гипотезы любое несчётное множество равномощно множеству всех его счётных подмножеств?